Realnost poretka

Siniša Režek[1]

Sustavi i organizacija natjecanja

Sport u modernom svijetu postao je sastavni dio svakodnevnice i sve je manje onih koji nisu uključeni u neki vid bavljenja sportom. U području sporta postoji nekoliko razina natjecanja: profesionalni, amaterski, rekreativni, školski sport, te sport osoba s invaliditetom. Bez obzira jesmo li za sport vezani profesionalno kao sportaš, trener, sudac, sportski djelatnik ili kao organizator raznih sportsko-rekreativnih i animacijskih aktivnosti, vrlo je bitno da razumijemo funkcioniranje samog sporta. Jedno od najvećih područja vezanih uz sport su sportska natjecanja. Ona su neizostavan dio svakog od ranije navedenih sustava i zbog toga je iznimno važno poznavati sustave i formate sportskih natjecanja. Poznavanje sustava natjecanja omogućava nam da samu sportsku aktivnost, odnosno natjecanje, prilagodimo ciljanoj populaciji ovisno o razini sportske treniranosti, dobi, sportskim interesima, broju sudionika i vremenskom periodu koji nam je na raspolaganju za provedbu samog natjecanja.

Realnost poretka na jednom natjecanju po *švicarskom sustavu* zavisi od odnosa broja kola i broja sudionika, kao i od varijante koja je primjenjena u sparivanju sudionika (dirigirana, nedirigirana, itd.). Dok neki smatraju da je cilj sustava da se dobije pravi pobjednik natjecanja, drugi nastoje granice sustava proširiti i na diferencijaciju poretka više sudionika. U tome se međutim ne može ići previše daleko, izvan logičkih i matematičkih okvira.

Dok je kod *kružnog sustava* teorijski uvijek moguće da na kraju natjecanja svi sudionici imaju različiti broj bodova, kod švicarskog sustava to nije slučaj. Ako na natjecanju po *Bergerovom sustavu* imamo 10 sudionika, na kraju natjecanja svaki od njih, zavisno o broju postignutih bodova, svrstava se u jednu od 19 grupa: grupa s 9 bodova, grupa s 8.5 bodova, 8, 7.5, ...,0.5, te 0 bodova. Kako broj tih grupa iznosi $2n-1$ (n je broj sudionika), dakle približno je dvostruko veći od broja sudionika, to je teorijski moguće da kod natjecanja koje se igra po Bergerovom sustavu ne dođe do diobe mjesta. Međutim, kod švicarskog sustava to nije slučaj, jer je broj sudionika gotovo uvijek veći, ponekad i po nekoliko desetina puta, od broja grupa, što znači da, po završetku natjecanja, neminovno mora doći do svrstavanja više igrača u istu grupu, tj. do diobe mjesta. Tako, naprimjer, ako sudjeluje 110 igrača, a igra se 5 kola imat ćemo na kraju natjecanja 11 grupa (broj grupa iznosi $2k+1$, za k broj kola) i to: grupu igrača s 5, 4.5, 4, ..., 1, 0.5 i 0 bodova u kojima će biti raspoređeno 110 sudionika. Međutim, to ne znači da je svaka grupa linearno zaposjednuta s po 10 igrača. Iz iskustva se već zna da će grupe s najvećim i najmanjim brojem bodova biti najmalobrojnije, a sve što se ide ka sredini – sve mnogobrojnije, tako da će srednje grupe, koje sačinjavaju igrači s oko 50% bodova, biti najmnogobrojnije. Znači, broj igrača u pojedinim grupama nije sasvim slučajan i proizvoljan, već se upravlja po određenim principima, zasnovanim na zakonima kombinatorike i računa vjerojatnosti. Tablice koje predviđaju koliki broj igrača

[1] Autor je profesor matematike i fizike u Osnovnoj školi "Žitnjak" u Zagrebu i međunarodni šahovski sudac, e-pošta: srezek@gmail.com

će biti u pojedinim grupama poslije nekog kola nazivaju se *diferencijalnim tablicama* i služe kao osnova za utvrđivanje broja realno plasiranih sudionika.

Nema sumnje da se kod kružnog sustava, u kome svaki sudionik igra sa svakim, poredak svih sudionika uzima kao realan. Jer, ako, naprimjer, imamo 16 sudionika koji se svi tako razlikuju po snazi da najjači igrač može pobijediti sve ostale, drugi po snazi – sve ostale osim najjačeg, treći po jačini – sve osim prvu dvojicu itd., onda po završetku natjecanja dobivamo izdiferenciran poredak za sve sudionike: najjači je prvi s 15 bodova, drugi po snazi zauzima drugo mjesto s 14 bodova itd. i najslabiji je posljednji s 0 bodova. Dakle, da bi najjači igrač imao mogućnost da to dokaže, drugi po snazi da dokaže da je drugi itd., potrebno je kod kružnog sustava sa 16 sudionika odigrati svih 15 kola. Ako bi se natjecanje sa 16 sudionika igralo po eliminacijskom ("nokaut") – *kup sustavu*, onda najjači igrač ima mogućnost da dokaže da je najjači u svega 4 kola. Na početku kup natjecanja ne znamo koji je od 16 sudionika najjači. Po završetku 1. kola, najjači igrač se nalazi među osam pobjednika iz prvog kola; po završetku drugog kola – među četiri pobjednika iz prva dva kola, po završetku trećeg kola među dva pobjednika iz sva tri kola i na kraju, pobjednik u finalnom meču (u četvrtom kolu) je pobjednik natjecanja, dakle najjači igrač. Za posljednjeg u finalu ne može se pouzdano tvrditi da je drugi (iako se u praksi to uzima), jer u kup sustavu ne postoji matematička mogućnost da se drugo mjesto izdiferencira kao realno. Zbog toga, je u kup sustavu realan poredak samo za prvoplasiranog sudionika, dok je u kružnom sustavu realan poredak za sve sudionike.

Ispitajmo kakva je realnost poretka kod švicarskog sustava, koji je u osnovi ispravan, jer se pobjednik traži i dobiva među najjačim igračima (koji tijekom natjecanja postižu najveći broj bodova) i koji se sastaju među sobom. Ali, da bi postojala mogućnost da se najjači igrač izdvoji, potrebno je odigrati dovoljan broj kola. Ako se igra natjecanje po švicarskom sustavu s, npr., 16 sudionika, i pod pretpostavkom da na natjecanju, radi jasnijeg izlaganja, nema remi partija, najjači igrač moći će se izdiferencirati tek poslije četvrtog kola. Jer, poslije prvog dobivamo 2 grupe igrača: jednu koju sačinjava 8 igrača s po jednim bodom i drugu, također s 8 igrača s po nula bodova; poslije drugog kola imat ćemo 3 grupe igrača i to: 4 igrača s 2 boda, 8 igrača s jednim bodom i 4 igrača s 0 bodova; poslije trećeg kola broj grupa se povećava na četiri i to: 2 igrača s 3 boda, 6 igrača s 2 boda, 6 igrača s 1 bodom i 2 igrača s 0 bodova. Poslije četvrtog kola imat ćemo pet grupa s ovakvim rasporedom u grupama: 1 igrač s 4 boda, 4 igrača s 3 boda, 6 igrača s 2 boda, 4 igrača s 1 bodom i 1 igrač s 0 bodova. Iz ovog se zaključuje da se prvo mjesto izdvojilo, a isto tako i posljednje, što znači da je njihov poredak realan. Za drugog igrača po snazi (kao i pretposljednjeg) to poslije četiri odigrana kola nije slučaj. Može se samo tvrditi da se drugi igrač po snazi nalazi u grupi od 4 igrača s 3 boda (odnosno pretposljednji – u grupi od 4 igrača s 1 bodom), ali pitanje koji je od njih realno drugi (od vrha, odnosno od dna) – ostaje bez odgovora. Da bi i drugo mjesto bilo izdiferencirano, potrebno bi bilo odigrati još neko kolo ili pri istom broju kola, smanjiti broj sudionika.

Na osnovu izloženog može se zaključiti da na broj realno prvoplasiranih mjesta p, a istovremeno i na isto toliki broj zadnjeplasiranih, ima utjecaja ne samo broj kola k, već i broj sudionika n. Pored ovih faktora na broj realnih mjesta ima određenog utjecaja i varijanata švicarskog sustava po kojoj se igra (dirigirana ili nedirigirana) kao i broj i raspoređenost remi partija na natjecanju. Međutim ovi utjecaji nisu tako veliki, pa se praktički mogu zanemariti. Pomoću kombinatorike i računa vjerojatnosti s pretpostavljenim brojem remija može se za svako konkretno natjecanje doći do broja realnih mjesta. Međutim to je obiman i mukotrpan posao i za praksu neupotrebljiv.

Aproksimativne formule koje ovdje iznosimo daju sasvim dovoljnu točnost, i mogu se lako koristiti:

$$k = \log_2 n + 2(p - \sqrt{p}) \tag{1}$$

$$\log_2 n = k - 2(p - \sqrt{p}) \tag{2}$$

$$(p - \sqrt{p}) = \frac{k - \log_2 n}{2} \tag{3}$$

gdje je k broj kola, n broj sudionika i p broj realnih mjesta.

Prva formula služi da odredimo potreban broj kola ako nam je poznat broj sudionika i ako želimo dobiti određeni broj realnih mjesta. Pomoću druge određuje se maksimalan broj sudionika ako su utvrđeni k i p, dok treća služi za izračunavanje broja realnih mjesta, ako je broj sudionika i broj kola poznat.

Radi lakše upotrebe ovih formula dane su i dvije tablice. Tablica 1 služi da nađemo vrijednost za $\log_2 n$ ako nam je broj sudionika poznat i obrnuto. Tablica 2 daje odmah gotovu vrijednost izraza $(p - \sqrt{p})$ za vrijednosti p od 1 do 10 i obratno.

Tablica 1.

n	$\log_2 n$	n	$\log_2 n$	n	$\log_2 n$	n	$\log_2 n$
16	4.0	45	5.5	130	7.0	350	8.4
18	4.2	50	5.6	140	7.1	400	8.6
20	4.3	55	5.8	150	7.2	450	8.8
22	4.5	60	5.9	160	7.3	500	8.9
24	4.6	65	6.0	180	7.5	550	9.1
26	4.7	70	6.1	200	7.7	600	9.2
28	4.8	80	6.3	220	7.8	650	9.3
30	4.9	90	6.5	240	7.9	700	9.5
32	5.0	100	6.7	260	8.1	800	9.7
35	5.1	110	6.8	290	8.2	900	9.8
40	5.3	120	6.9	320	8.3	1000	9.9

Tablica 2.

p	$p-\sqrt{p}$	p	$p-\sqrt{p}$	p	$p-\sqrt{p}$	p	$p-\sqrt{p}$
1.0	0.0	3.4	1.6	5.8	3.4	8.2	5.3
1.2	0.1	3.6	1.7	6.0	3.6	8.4	5.5
1.4	0.2	3.8	1.9	6.2	3.7	8.6	5.7
1.6	0.3	4.0	2.0	6.4	3.9	8.8	5.8
1.8	0.5	4.2	2.2	6.6	4.0	9.0	6.0
2.0	0.6	4.4	2.3	6.8	4.2	9.2	6.2
2.2	0.7	4.6	2.5	7.0	4.4	9.4	6.3
2.4	0.9	4.8	2.6	7.2	4.5	9.6	6.5
2.6	1.0	5.0	2.8	7.4	4.7	9.8	6.7
2.8	1.1	5.2	2.9	7.6	4.8	10.0	6.8
3.0	1.3	5.4	3.1	7.8	5.0	10.2	7.0
3.2	1.4	5.6	3.2	8.0	5.2	10.4	7.2

Međutim, ova rasprava s 4 kola i 16 sudionika je dobro heurističko opravdanje za slučaj $p = 1$, dakle kad nas zanima samo tko je najbolji. Tada je $n = 2^k$. To se može vidjeti i ovako: možemo zanemariti remi partije na natjecanju jer pretpostavljamo da su igrači dovoljno različitih snaga da "realni poredak" ima smisla, a onda će u svakoj partiji jači pobijediti – a pod tom pretpostavkom, k partija koje će svaki igrač igrati ima točno 2^k mogućih ishoda, što je taman dovoljno informacija da od 2^k igrača odaberemo najboljeg.

No broj $2(p - \sqrt{p})$ je korekcijski faktor, dobiven empirijski, a ne matematički (uostalom, rekli smo da su formule aproksimativne, a za $\sqrt{p}$ stvarno ne nalazimo neko kombinatorno opravdanje). Također ima veze i s detaljima samog sustava, jer zdravoseljačka metoda kaže da ako (kao u našem primjeru) na kraju imamo četvoricu s 3 boda i zanima nas tko je od njih najbolji (odnosno drugi u ukupnom poretku), onda primijenimo isti algoritam rekurzivno, i dobijemo da nam trebaju još $\log_2 4 = 2$ kola.

Kako se navedene formule primjenjuju i koriste tablice, pokazat ćemo na nekoliko primjera:

1. Koliko je najmanje kola potrebno odigrati na natjecanju po švicarskom sustavu od 80 sudionika, ako želimo dobiti 5 realnih mjesta?

Rješenje. Ovdje je $n = 80$, $p = 5$, $k =?$ Primjenom formule (1) dobivamo: $k = \log_2 80 + 2 \cdot (5 - \sqrt{5})$. Uzimajući vrijednost za $\log_2 80$ iz tablice (1) i za $(5 - \sqrt{5})$ iz tablice (2) dobivamo: $k = 6.3 + 2 \cdot 2.8 = 6.3 + 5.6 = 11.9$. Znači treba odigrati 12 kola.

2. Koliko se najviše sudionika može primiti na natjecanje od 9 kola po švicarskom sustavu, ako hoćemo dobiti 4 realna mjesta?

Rješenje. Ovdje je $k = 9$, $p = 4$, $n =?$ Primjenom formule (2) dobivamo: $\log_2 n = 9 - 2(4 - \sqrt{4}) = 5$. Sada iz tablice (1) nalazimo odgovarajuću vrijednost za n (antilogaritam od 5), a to je 32. Dakle, najviše se može primiti 32 sudionika.

3. Koliki je broj realnih mjesta na 5. prvenstvu Hrvatske (Pula, 1996.) na kome je sudjelovalo 57 igrača i odigrano 9 kola po švicarskom sustavu?

Rješenje. Ovdje je $k = 9$, $n = 57$, $p =?$ Primjenom formule (3) dobivamo: $p - \sqrt{p} = \dfrac{9 - \log_2 57}{2} = \dfrac{9 - 5.8}{2} = 1.6$, odakle je iz tablice (2): 3.4 tj. broj realnih mjesta je 3.

U današnje vrijeme, gdje su u velikoj primjeni "dirigirane" varijante, postoje jednostavniji i liberalniji kriteriji pri ocjeni realnosti poretka. Da bi se dobio "pravi pobjednik", po ocjeni Martina Morisona, potreban je isti broj kola koji bi za taj broj igrača bio potreban kada bi se natjecanje igralo po kup sustavu, kako to pokazuje sljedeća tablica:

broj sudionika	potreban broj kola
5 – 8	3
9 – 16	4
17 – 32	5
33 – 64	6
65 – 128	7
129 – 256	8
257 – 512	9
513 – 1024	10

Ako se želi odrediti realan poredak za više mjesta, a ne samo za pobjednika (prvo mjesto), onda je potrebno povećati broj kola na natjecanju.

Prema tome, dvije se korisne formule mogu ustanoviti:

1. Da se odredi minimalni broj kola za dani broj sudionika i određeni broj mjesta: $k + 2p$, gdje je k broj kola koji je potreban po kup sustavu za dani broj sudionika i p predstavlja broj mjesta za koji se, pored prvoplasiranog, traži realan poredak.

Primjer. Koliko je potrebno odigrati kola da se na natjecanju po švicarskom sustavu, ako sudjeluje 32 igrača, ako se želi realan poredak za prva četiri mjesta? Primjenom navedene formule proizlazi: $5 + 2 \cdot 3 = 11$ kola. Naime, iz gore navedene tablice se vidi da je za 32 igrača potrebno odigrati 5 kola (po nokaut sustavu) da bi se dobio "čisti (realni) pobjednik". Kako se traži realan poredak za još tri mjesta, to se taj broj množi s 2 i zbroj pokazuje broj kola potrebnih da se odredi realan poredak za prva četiri mjesta.

2. Da se odredi maksimalni broj igrača koji mogu sudjelovati, a da se osigura realan poredak za dani broj mjesta i za već određeni (utvrđeni) broj kola: 2^{k-2p}, gdje k označava broj kola, a p je broj mjesta za koji se, pored prvoplasiranog, želi dobiti realan poredak.

Primjer. Koliko najviše igrača može sudjelovati na jednom natjecanju od devet kola (po švicarskom sustavu), na kome se želi osigurati realan poredak za tri mjesta? Primjenom navedene formule proizlazi da maksimalno može sudjelovati: $2^{9-2\cdot 2} = 2^{9-4} = 2^5$, odnosno 32 igrača $(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$.

Ako se premaši maksimalni broj igrača u odnosu na broj kola, onda se ne može osigurati realan pobjednik. Međutim, ako se igra više kola nego je predviđeno minimumom ili ako sudjeluje manji broj igrača od maksimuma koji je tablicom predviđen, onda će se povećati preciznost sustava.

Numeričke karakteristike pojedinih sustava

U ovisnosti od broja sudionika n i broja kola k, proizlaze određene brojčane karakteristike pojedinih sustava koje smo upoznali, a koji su od značaja pri izboru sustava za pojedina natjecanja kao i za organizaciju istog.

Iznosimo ih u općem obliku u sljedećoj tablici:

naziv sustava	broj sudionika	broj kola	broj partija	broj realno plasiranih
kružni	n		$\frac{n(n-1)}{2}$	n
kup	n	$\lceil \log_2 n \rceil$	$n-1$	1
švicarski	n	k	$k\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$	$f(n,k)$
ševeninški	$2n$	n	n^2	$2n$

gdje vrijednosti u $\lceil\quad\rceil$ i $\lfloor\quad\rfloor$ zagradama, kao što je već i ranije spomenuto, označavaju da se uzimaju kao najveći cijeli broj koji nije veći od tog broja, odnosno najmanji cijeli broj koji nije manji od tog broja.

Tko je bolji? – meč

Primjer. Je li, u igri podjednakih protivnika, vjerojatnije dobiti 3 od 4 ili 6 od 8 partija (zadatak viteza De Merea)?

Rješenje. S obzirom da su protivnici podjednaki, vjerojatnost pobjede = vjerojatnost poraza = 0.5. U igri 3 od 4 je $n = 4$; $k = 3$ i vjerojatnost je: $P(\{3 \text{ od } 4\}) = \binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 0.5^1 = 0.25$. U igri 6 od 8 je $n = 8$; $k = 6$ i vjerojatnost je: $P(\{6 \text{ od } 8\}) = \binom{8}{6} \cdot 0.5^6 \cdot 0.5^2 = 0.109$.

Dakle, vjerojatnije je dobiti 3 od 4 nego 6 od 8.

Broj partija

Primjer. Na šahovskom natjecanju sudjelovalo je četvero sudionika. Svaki sa svakim od njih odigrao je po jednu partiju, koliko su oni ukupno odigrali partija?

Rješenje. Ako krećemo s metodom ispisivanja svih rezultata tko je s kim igrao nespretnim odgovorom dobit ćemo da je svaki sudionik odigrao po tri partije i da je ukupno odigrano 12 partija! (rezonirajući: četvero djece po tri partije). Zadatak je lak, ali i koristan, jer se može primijeniti kombinatorika. Ukupan broj odigranih partija je kombinacija drugog razreda od 4 elementa, tj.

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6.$$

Zadaci

1. Na šahovskom natjecanju sudjelovalo je sedam sudionika. Svaki sa svakim od njih odigrao je po jednu partiju. Koliko su ukupno odigrali partija?
2. Na šahovskom natjecanju odigrano je 45 partija. Koliko je sudionika sudjelovalo ako je svaki sa svakim odigrao samo po jednu partiju?
3. Na šahovskom natjecanju sudjelovala su dva učenika sedmog razreda i određen broj učenika osmog razreda. Svaki učenik igrao je s ostalima po jednu partiju. Dva sedmaša osvojila su zajedno 8 bodova, a svi osmaši sakupili su podjednak broj bodova. Koliko je osmaša sudjelovalo na natjecanju?

Odmah na proglašenje

Primjer. Pokušajmo sada vidjeti kako to izgleda bez da se igrači natječu. Zanima nas na koliko se različitih načina može podijeliti zlatna, srebrna i brončana medalja između osam natjecatelja?

Rješenje. Stoga podsjetimo se na koliko se načina može poredati k različitih elemenata iz skupa od n elemenata? Prvi element možemo odabrati na n načina. Nakon toga, drugi možemo odabrati na $n - 1$ načina, jer mora biti različit od prvog. Treći možemo odabrati na $n - 2$ načina. Posljednji, k-ti na $n - (k - 1)$ načina. Zato je ukupan broj načina jednak $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. Uređena k-torka različitih elemenata istog skupa $S=\{a_1,\ldots,a_n\}$ naziva se varijacijom k-tog razreda u skupu od n elemenata. Pri tome mora biti $k\leqslant n$. Broj varijacija označavamo s $V_n^k=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. Prema tome, riječ je o varijacijama trećeg razreda u skupu od osam elemenata. Zato je traženi broj $N=V_8^3=8\cdot7\cdot6=336$. Svakako je korisnije zapamtiti način na koji smo došli do ovog broja, nego samu formulu. Moramo biti sigurni da razumijemo princip uzastopnog prebrojavanja: Zlatnu medalju možemo podijeliti na 8 načina, srebrnu na 7 načina (među preostalih 7 natjecatelja), te brončanu medalju na 6 načina (među preostalih 6 natjecatelja). Zbog toga je broj različitih načina za dodjelu sve tri nagrade jednak $8\cdot7\cdot6=336$.

Zaključak

Osnovne zadaće suvremenog sporta su zadovoljavanje čovjekove potrebe za kretanjem, razvoj motoričkih sposobnosti i znanja, te unaprjeđenje zdravlja i to sve uz osjećaj ugode i zadovoljstva. Poznavanje sustava sportskih natjecanja olakšava nam da ostvarimo upravo to. Pravilnim odabirom sustava i formata natjecanja direktno utječemo na doziranje opterećenja, prilagođavamo se na vremenska ograničenja, te na taj način utječemo na količinu zadovoljstva samih sudionika.

Literatura

[1] D. Milanović, *Teorija treninga*, Zagreb, Sveučilište u Zagrebu, 2005.

[2] T. Hublin, N. Breslauer, *Sustavi natjecanja u sportu*, Zbornik Međimurskog veleučilišta u Čakovcu, br. 1, 2010.

[3] B. Draščić Ban, T. Poganj, *Primijenjena matematika*, Rijeka, Sveučilište u Rijeci, 2009.