# Morleyevo čudo: srce svakog trokuta je pravilno!

*Darko Veljan*[1]

Ljudi, životinje, biljke, projekti, postrojenja,...– svi imaju srce (ili srčike i sl.). No, i trokuti imaju srce i, štoviše, ono (euklidsko) je uvijek pravilno! Nemojte misliti da je to naslov ili ideja neke apstraktne ili otkačene fantazije, pjesme ili poeme. Ne, to je sadržaj jednog konkretnog geometrijskog poučka. U to ću vas pokušati uvjeriti ovim člankom. Ali krenimo redom, prvo tko je Morley?

Britansko-američki matematičar *Frank Morley* (1860. – 1937.) bavio se geometrijom i algebrom, rješavao i postavljao probleme, ali glavno područje mu je bila algebarska geometrija, grana matematike u kojoj se proučavaju svojstva krivulja, ploha i sličnih tvorevina koje su zadane algebarskim jednadžbama. Na primjer, $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$

[1] Autor je profesor u mirovini na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu, e-pošta: darko.veljan@gmail.com

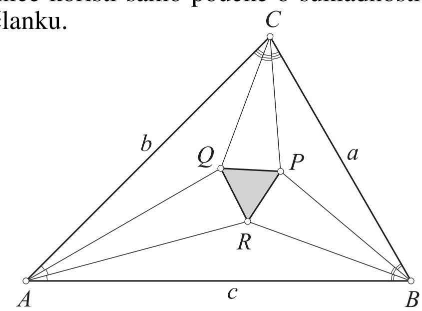
(odnosno, $4x^2+9y^2-36=0$) je algebarska jednadžba kojom je zadana elipsa. Iz te jednadžbe možemo zaključiti da je elipsa kao skup točaka $(x,y)$ u realnoj koordinatnoj ravnini omeđen skup, da mu je promjer jednak 6, da ga svaki pravac siječe u najviše dvije točke, itd. No, ako su $x$ i $y$ kompleksni brojevi, onda se to mijenja i nastupa algebarska geometrija. (Ponešto je o tome rečeno u autorovom članku, *Pierre Deligne – dobitnik Abelove nagrade 2013. godine*, MFL **64**(2), 2013./ 2014., 82–85.)

Morley je na početku svoje karijere bio profesor matematike na Sveučilištu Cambridge u Engleskoj, a zatim na Sveučilištu Johns Hopkins u SAD-u. Bio je i šahovski majstor, a zajedno sa svojim sinom napisao je 1933. knjigu *Inversive Geometry*. Školske godine 1899./ 1900. Morley je objavio članak s temom iz algebarske geometrije, u prvom broju časopisa Transactions of the American Mathematical Society. Jedan mali i vrlo poseban slučaj glavnog teorema iz tog članka danas nazivamo *Morleyev teorem o trisektrisama trokuta*.

*Trisektrisa (trodijelnica)* kuta je jedna od dviju zraka kojima je kut podijeljen na tri jednaka dijela. Podsjetimo se: bisektrisa ili simetrala kuta je raspolovnica, tj. pravac (ili zraka) kojim je kut podijeljen na dva jednaka dijela. Starogrčki teorem o simetralama kutova trokuta kaže da se sve tri simetrale kutova trokuta sijeku u jednoj točki – središtu upisane mu kružnice. Jednostavni dokaz te činjenice koristi samo poučke o sukladnosti trokuta. Iskažimo sada osnovni poučak u ovom članku.

**Morleyev teorem o trisektrisama trokuta (1899.).** *Tri točke presjeka susjednih trisektrisa kutova trokuta vrhovi su jednakostraničnog trokuta.*

Morleyevi kolege i drugi matematičari oko 1930. godine zadivljeni ljepotom i jednostavnošću tog "pravog dragulja" i s nevjericom da je otkriven tek nedavno, prozvali su ga, naprosto, Morleyevo čudo ("Morley's miracle"). Bila je to još jedna potvrda da je matematika, ne samo egzaktna, fundamentalna znanost i filozofija, nego i umjetnost.



*Morleyevo čudo: trisektrise kutova trokuta $ABC$ čine jednakostranični trokut $PQR$. Medicinski rečeno, srce svakog trokuta je pravilno!*

Doista je pomalo nevjerojatno da tako jednostavna elementarno-geometrijska činjenica nije otkrivena i mnogo ranije. Jedan od razloga je i taj da su geometričari od starogrčkog doba pa nadalje zazirali ili prebrzo odustajali od te teme kao predmeta izučavanja, jer je (euklidska) konstrukcija trisektrise kuta ravnalom i šestarom bila nejasna.

Napomenimo ovdje da je tek 1837. Pierre Wantzel na temelju Gaussovih radova dokazao da se općenito trisektrisa kuta ne može (euklidski) konstruirati (vidi [9]) i time je razriješio 2000 godina stari klasični problem "trisekcije kuta" (ostala dva klasična problema: "duplikacija kocke" i "kvadratura kruga", također su negativno razriješena u 19. stoljeću).

Stoga je malo jasnije zašto je "zeleno svjetlo" za istraživanje te vrste došlo tek kasnije u 19. stoljeću. Prvi izravni dokazi Morleyevog čuda objavljeni su oko 1908. g., a novi se dokazi pojavljuju odonda pa sve do danas. Možemo slobodno reći da ovaj elegantni teorem iz euklidske geometrije, iako zagonetno stoljećima nezamiječen, ipak pripada dvadesetom stoljeću.

Svoje su dokaze ovog poučka dali i mnogi poznati matematičari (i fizičari), primjerice, A. Connes (dobitnik Fieldsove medalje), H. Coxeter, J. Conway, E. Dijkstra, D. Gale, I. Jaglom, H. Lebesgue, R. Penrose, J. Steiner, T. Tao (također dobitnik Fieldsove medalje) i mnogi drugi. U popisu literature na kraju ovog članka navedeno je nekoliko udžbenika, zbirki problema, popularizatorskih knjiga o matematici, prikaza, te internetskih stranica iz geometrije koji obrađuju ili spominju ovaj prekrasni poučak. U magistarskom radu R. Kolar-Šuper [8], pod vodstvom profesora Vladimira Volenca, iscrpno je prikazano 30-ak raznih dokaza Morleyevog teorema o trisektrisama i navedeno oko 200 knjiga, članaka i rasprava na tu temu. Istaknimo ovom prilikom da je profesor Volenec već 40-ak godina član uredništva Matematičko-fizičkog lista i da je napisao brojne članke i sastavio mnoge zadatke za ovaj časopis, na čemu mu odsrca zahvaljujemo!

Među dokazima Morleyevog teorema o trisektrisama ima planimetrijskih, analitičkih, algebarskih, trigonometrijskih, s kompleksnim brojevima, vektorskih, kinematičkih, pomoću origamija kao i mnogih "miješanih" dokaza. Spomenimo da se s trisekcijama vanjskih kutova trokuta slično mogu definirati i vanjski Morleyevi trokuti i da ih ukupno ima 27, od kojih je njih 18 uvijek pravilnih.

O Morleyevom se teoremu i danas znanstveno raspravlja i stalno se pojavljuju novi članci na tu temu. Na primjer, odavno se zna da Morleyev trokut u sfernoj ili hiperboličkoj geometriji ne mora biti pravilan. Isto je tako poznato da ne vrijedi izravan prostorni analogni poučak za tetraedar. No, ipak je nedavno izračunata duljina stranice Morleyevog trokuta u hiperboličkoj (zakrivljenoj) ravnini. Kada zakrivljenost teži k nuli onda na limesu duljine stranica postaju međusobno jednake, tj. vrijedi Morleyev poučak u euklidskoj ravnini. Isto je tako izračunata duljina brida Morleyevog tetraedra dobivenog trisekcijama diedralnih kutova polaznog tetraedra. Njegove, možebitne, simetrije nisu posve jasne.

Na kraju iznesimo kratki, trigonometrijski dokaz Morleyevog čuda koristeći samo sinusov poučak i "trostruku formulu", tj. formulu za sinus trostrukog kuta:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = 4\sin x \sin x' \sin x'',$$

pri čemu je $x' = \dfrac{\pi}{3} + x$, za svaki kut $x$.

Neka je, dakle, zadan trokut $ABC$ s kutovima $A$, $B$, $C$ redom kod vrhova $A$, $B$, $C$ i nasuprotnim stranicama $a$, $b$, $c$, te neka je $R$ radijus opisane mu kružnice. Neka je $PQR$ Morleyev trokut ("srce" kao na slici). Tvrdimo da je $PQR$ jednakostraničan trokut. Prvo, znamo da je

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Kako je $\sphericalangle BRA = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{C}{3} = \left(\dfrac{C}{3}\right)''$ iz poučka o sinusima dobivamo

$$\frac{|AR|}{\sin \frac{B}{3}} = \frac{c}{\sin\left(\frac{C}{3}\right)''}.$$

Iz sinusovog poučka za trokut $ABC$ imamo $c = 2R\sin C$. Koristeći "trostruku formulu" dobivamo

$$|AR| = \frac{2R\sin C \sin\frac{B}{3}}{\sin\left(\frac{C}{3}\right)''} = 8R\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}\sin\left(\frac{C}{3}\right)'.$$

Analogno vrijedi za trokute $ACQ$ i $BCP$, odakle dobivamo

$$\frac{|CQ|}{\sin\left(\frac{B}{3}\right)'} = \frac{|CP|}{\sin\left(\frac{A}{3}\right)'} = 8R\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}.$$

Promotrimo trokut čija je jedna stranica duljine $|CQ|$, a kutovi uz nju $\left(\frac{A}{3}\right)'$ i $\frac{C}{3}$. Sinusov poučak povlači da je taj trokut sukladan trokutu $CPQ$. Odatle odmah dobivamo

$$|PQ| = 8R\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}.$$

Iz ovog simetričnog zapisa slijedi $|PQ| = |QR| = |RP|$, i prema tome je trokut $PQR$ jednakostraničan. Time smo dokazali Morleyev teorem.

Dakle, doista je srce svakog trokuta pravilno kako smo na početku i najavili. I na engleskom se jeziku to može izreći kao: The heart of any triangle is regular!

Zainteresirani čitatelji mogu rješavati sljedeće zadatke:

**1.** Neka je $ABC$ pravokutan trokut s duljinama kateta $|AC| = |BC| = 1$. Tada je duljina stranice pripadnog Morleyevog trokuta jednaka $\sqrt{2} - \sqrt{1.5}$, a površina mu iznosi oko 3% površine trokuta $ABC$. Konstruirajte sve ravnalom i šestarom.

**2.** Neka je $OABC$ tetraedar, gdje je $O$ ishodište, a $A$, $B$, $C$ jedinične točke na koordinatnim osima u prostoru. Izračunajte duljine bridova i površine strana pripadnog Morleyevog tetraedra dobivenog trisekcijama diedralnih kutova. Opažate li neku simetriju?

**3.** Neka je $U$ presjek pravaca $BR$ i $CQ$, $V$ pravaca $AR$ i $CP$ i $W$ pravaca $AQ$ i $BP$ (vidi sliku). Tada su pravci $UP$, $VQ$ i $WR$ konkurentni, a presjecište se naziva "prva Morleyeva točka" trokuta $ABC$. Trokuti $UQR$, $VPR$ i $WPQ$ su jednakokračni, a $UP$ je okomit na $QR$, itd.

**4.** Dokažite da su pravci $AP$, $BQ$, $CR$ (vidi sliku) konkurentni. Točka presjeka naziva se "druga Morleyeva točka" trokuta $ABC$.

Kao nagrada rješavačima evo jedne "trigonometrijske šale-male". Hvali se baka kako je njezin unuk marljiv i pametan i da osim u školu ide i na poduke iz engleskog, francuskog i trigonometrije. — "Ajde zlato, reci tetama nešto na trigonometrijskom."

## Literatura


[1] J. Barnes, *Gems of Geometry*, Springer, NY, 2012.

[2] M. Berger, *Geometry I, II*, Springer, NY, 1987.

[3] B. Bollobás, *The Art of Mathematics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[4] H. Coxeter, S. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, Washington, 1967.

[5] M. Gardner, *New Mathematical Diversions*, Simon and Schuster, NY, 1966.

[6] R. Honsberger, *Mathematical Gems I*, MAA, Washington, 1973.

[7] R. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, NY, 1960.

[8] R. Kolar-Šuper, *Morleyev teorem i njegove generalizacije (magistarski rad)*, Sveučilište u Zagrebu, 2003.

[9] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika I*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[10] C. Pickover, *The Math Book*, Sterling, NY, 2009. (*Veličanstvena matematika kroz povijest u riječi i slici*, prijevod na hrvatski jezik, Zagreb, u tisku).

[11] V. V. Prasolov, *Problemi planimetrii*, Moskovskii učebniki, Moskva, 2006.

[12] E. Maor, E. Jost, *Beautiful Geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton, 2014.

[13] A. Bogomolny, `http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.html`

[14] E. Weisstein, `http://mathworld.wolfram.com/MorleysTheorem.html`

[15] *Wikipedia*, `http://Wikipedia.org/wiki/Mathematics`