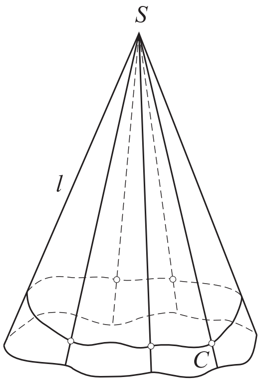
Odabrani zadaci o stošcu na matematičkom smjeru u gimnazijama u Sarajevu

Belma Alihodžić[1]

Osnovno o stošcu

Ako pravac l koji prolazi kroz čvrstu točku S prostora klizeći po nekoj krivulji C, tako da točka S ne leži u ravnini linije C, nastaje *stožasta površina*. Pravac l koji klizi po krivulji C nazivamo *izvodnica* (generatrisa), a krivulju C *vodilja* (direktrisa).



Ako zatvorenu stožastu površinu presijeca ravnina tako da siječe sve izvodnice stošca, nastaje *stožac*. *Baza stošca* je dio ravnine koji je presječen stožastom površinom. *Omotač stošca* je dio stožaste površine koji je određen točkom S i ravninom koja ju siječe. *Visina stošca* je okomica spuštena iz njegovog vrha na ravninu baze stošca. Ako je baza stošca krug, kažemo da je on *kružni stožac*. Ako pravac koji prolazi kroz vrh stošca okomito na ravninu baze i siječe bazu u središtu kruga, kažemo da je stožac *uspravan*. Taj pravac je *os simetrije stošca*. Presjek stošca s ravninom koja prolazi kroz njenu os nazivamo *osni presjek stošca*. Najveći osni presjek kosog stošca je *karakteristični presjek stošca*.

Površina uspravnog kružnog stošca, čiji je polumjer baze r i izvodnica s je: $P = r^2\pi + r\pi s$.

Volumen (obujam) tog stošca je: $V = \dfrac{1}{3}r^2\pi h$, gdje je h visina stošca.

Zadaci

1. Površina uspravnog kružnog stošca je $P = 96\pi\ \text{cm}^2$, a izvodnica $s = 10$ cm. Odrediti volumen stošca.

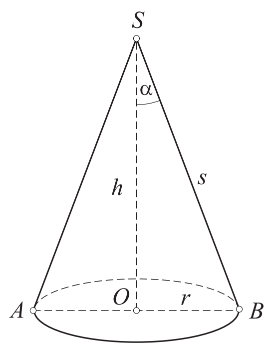
Rješenje. Polumjer r baze stošca odredimo iz relacije za površinu stošca: $P = r^2\pi + r\pi s$. Napišimo ovu jednadžbu u obliku: $\pi r^2 + s\pi r - P = 0$. Rješenja ove kvadratne jednadžbe nakon uvrštavanja numeričkih vrijednosti za s i P, su $r_1 = 6$, $r_2 = -16$. U obzir dolazi samo $r_1 = 6$, jer je polumjer pozitivan broj. Visina stošca je: $h = \sqrt{s^2 - r^2}$, odnosno $h = 8$. Traženi volumen stošca je $V = \dfrac{1}{3}r^2\pi h = 96\pi$.

[1] Autorica je magistar matematičkih znanosti i profesorica matematike u Prvoj bošnjačkoj gimnaziji u Sarajevu, e-pošta: `balihodzic@gmail.com`

2. Kod uspravnog stošca dan je omjer polumjera baze i visine $r : h = 3 : 4$ i površina omotača $M = 192\pi$. Odrediti volumen stošca.

Rješenje. Iz zadanog omjera $r : h = 3 : 4$ dobivamo $h = \frac{4}{3}r$. Površina omotača stošca je: $M = r\pi s$, gdje je $s = \sqrt{h^2 + r^2}$ te je: $M = r\pi\sqrt{h^2 + r^2}$. Uvrstimo li $h = \frac{4}{3}r$ imamo: $M = r\pi \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{3}r\right)^2 + r^2} = r\pi \cdot \frac{5r}{3}$, odnosno $M = \frac{5\pi r^2}{3}$ tj. $r = \sqrt{\frac{3M}{5\pi}}$. Uvrstimo numeričku vrijednost za M dobivamo: $r = \frac{24}{\sqrt{5}}$. Visina stošca je $h = \frac{4}{3} \cdot \frac{24}{\sqrt{5}} = \frac{32}{\sqrt{5}}$, a njegov volumen $V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{6144\pi}{5\sqrt{5}}$.

3. Kut pri vrhu osnog presjeka stošca je 2α, a zbroj duljina njene visine i izvodnice je m. Odrediti volumen i površinu stošca.



Rješenje. Sa slike iz pravokutnog trokuta OBS, imamo: $r = s \cdot \sin\alpha$ i $h = s \cdot \cos\alpha$.

Volumen stošca je $V = \frac{1}{3}(s \cdot \sin\alpha)^2\pi s \cdot \cos\alpha$, odnosno

$$V = \frac{s^3\pi\sin^2\alpha\cos\alpha}{3}.$$

Prema uvjetu zadatka je: $s + h = m$, te je $s + s \cdot \cos\alpha = m$ ili $s(1 + \cos\alpha) = m$ odakle je:

$$s = \frac{m}{1 + \cos\alpha} = \frac{m}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Uvrstimo li ovaj izraz u onaj za V dobit ćemo

$$V = \frac{\left(\frac{m}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)^3 \pi\sin^2\alpha\cos\alpha}{3} = \frac{m^3\pi\sin^2\alpha\cos\alpha}{24\cos^6\frac{\alpha}{2}}.$$

Površina stošca je: $P = r\pi(r + s) = s \cdot \sin\alpha \cdot \pi(s \cdot \sin\alpha + s) = s^2\pi\sin\alpha(1 + \sin\alpha)$.

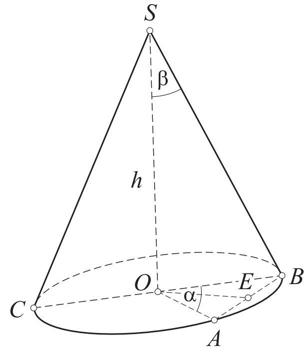
Uvrštavajući gore navedeno s u relaciju za površinu stošca dobivamo:

$$P = \left(\frac{m}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \pi\sin\alpha(1 + \sin\alpha) = \frac{m^2\pi\sin\alpha(1 + \sin\alpha)}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}.$$

4. Odrediti volumen stošca ako tetiva duljine a njene baze određuje luk α, a kut između visine stošca i izvodnice je β.

Rješenje. Neka je E polovište tetive $\overline{AB}$. Dužina $\overline{OE}$ je okomita na tetivu $\overline{AB}$ i raspolavlja kut α.

Iz $\triangle AOE$ imamo: $\dfrac{|EA|}{|OA|} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$ odakle je $|EA| = |OA|\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Kako je $|AB| = 2|EA|$ imamo



$$|AB| = 2|OA|\sin\frac{\alpha}{2} \implies |OA| = \frac{|AB|}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Iz $\triangle OBS$ dobivamo:

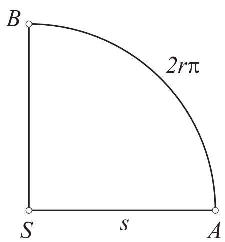
$$\frac{h}{|OB|} = \operatorname{ctg}\beta \implies h = |OB|\operatorname{ctg}\beta.$$

Kako je $|OB| = |OA| = r$ polumjer baze stošca imamo $h = \dfrac{a\operatorname{ctg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Volumen stošca je

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \pi\frac{a\operatorname{ctg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

i konačno $V = \dfrac{a^3\pi\operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}$.

5. Odrediti površinu i volumen stošca čiji je polumjer baze r kada se zna da je njezin omotač razvijen u ravninu četvrtina kruga.



Rješenje. Sa slike se vidi da je: $\dfrac{2s\pi}{4} = 2r\pi \implies s = 4r$.

Površina stošca je $P = r\pi(r+s)$ tj. $P = r\pi(r+4r) = 5r^2\pi$.

Visina stošca je $h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{(4r)^2 - r^2} = r\sqrt{15}$.

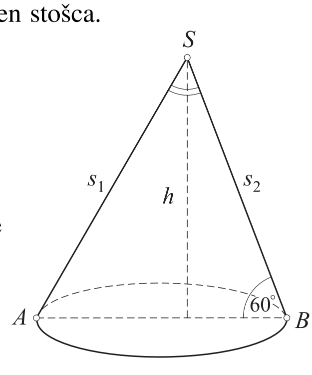
Volumen stošca je $V = \dfrac{1}{3}r^2\pi r\sqrt{15} = \dfrac{r^3\pi\sqrt{15}}{3}$.

6. Karakteristični presjek kosog stošca je pravokutan trokut čija hipotenuza je promjer baze $2r$, a jedan kut mu iznosi 60°. Odrediti volumen stošca.

Rješenje. Iz pravokutnog trokuta ABS imamo:

$$\frac{s_1}{2r} = \sin 60^\circ \implies s_1 = 2r\sin 60^\circ = r\sqrt{3}$$

$$\frac{s_2}{2r} = \cos 60^\circ \implies s_2 = 2r\cos 60^\circ = r.$$



Površina karakterističnog presjeka (pravokutnog trokuta) je

$$P_1 = \frac{s_1 s_2}{2} = \frac{r\sqrt{3}\cdot r}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{2}.$$

S druge strane je $P_1 = \dfrac{2rh}{2} = rh$.

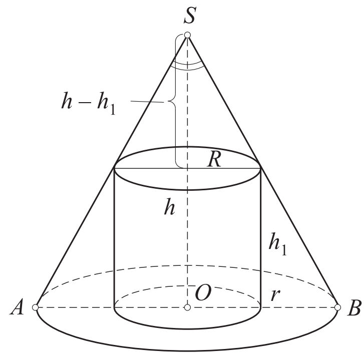
Izjednačimo li dvije posljednje relacije imamo

$$rh = \frac{r^2\sqrt{3}}{2} \implies h = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

Traženi volumen stošca je

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{r^3\pi\sqrt{3}}{6}.$$

7. Osni presjek uspravnog stošca je pravokutni trokut. Odrediti omjer volumena stošca i volumena upisanog istostraničnog valjka.



Rješenje. Visina stošca (visina istostraničnog pravokutnog trokuta) je $h = r$. Volumen stošca je $V_1 = \frac{r^3\pi}{3}$.

Valjak je istostraničan te je $h_1 = 2R$. Kako je $h - h_1 = R$ odnosno $r - h_1 = R$ tj. $R = \frac{r}{3}$. Sada je $h_1 = \frac{2r}{3}$. Volumen istostraničnog valjka je:

$$V_2 = R^2\pi h_1 = \left(\frac{r}{3}\right)^2 \pi \frac{2r}{3} = \frac{2r^3\pi}{27}.$$

Traženi omjer volumena je: $V_1 : V_2 = \frac{r^3\pi}{3} : \frac{2r^3\pi}{27}$ odnosno $V_1 : V_2 = 9 : 2$.

Zadaci za samostalni rad

1. Polumjer r baze, visina h i izvodnica s stošca su tri uzastopna prirodna broja. Površina stošca je 40π. Odrediti njegov volumen.

2. Odrediti volumen stošca čija je površina $P = 384\pi$, a izvodnica s je za 4 kraća od promjera baze.

Literatura

[1] *Matematika, opća enciklopedija Larousse*, Vuk Karadžić, Beograd 1974.

[2] Ahmed Kafedžić, *Izrađeni zadaci iz matematike*, Sarajevo 1974.

[3] Sead Softić, *Matematika za treći razred srednje škole*, Svjetlost, Sarajevo 2002.