Jedna nejednakost u vezi s trokutom i neke njene posljedice

Šefket Arslanagić[1]

U ovom radu ćemo dati dokaz nejednakosti

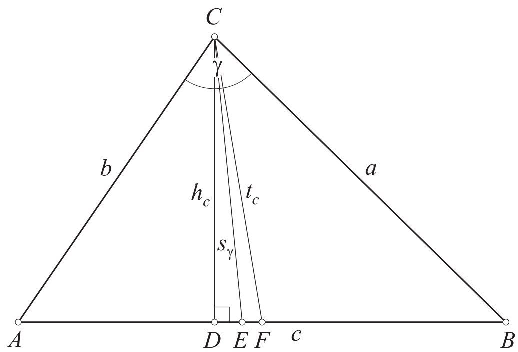
$$h_c \leqslant s_\gamma \leqslant t_c, \tag{1}$$

gdje su h_c i t_c visina i težišnica trokuta ABC, povučene iz njegovog vrha C i s_γ je duljina simetrale kuta $\gamma = \sphericalangle ACB$ tog trokuta. Najprije ćemo dokazati ovaj teorem.

Teorem 1. U svakom trokutu simetrala kuta leži između visine i težišnice povučenih iz istog vrha trokuta.

Dokaz. Neka su $|CD| = h_c$, $|CE| = s_\gamma$ i $|CF| = t_c$ (D, E, $F \in \overline{AB}$), visina, simetrala kuta γ i težišnica trokuta ABC (slika 1). Ne smanjujući općenitost, možemo pretpostaviti $|AC| < |BC|$, pa je tada $\sphericalangle BAC > \sphericalangle ABC$, a također je $\sphericalangle ACD < \sphericalangle BCD$. Sada je

$$\sphericalangle ACD < \frac{1}{2}\sphericalangle ACB \quad \text{i} \quad \sphericalangle ACD < \sphericalangle ACE.$$



Slika 1.

Odavde zaključujemo da se točka D nalazi između A i E.

Na osnovu teorema o simetrali unutarnjeg kuta trokuta imamo

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Pošto je $|AC| < |BC|$, tj. $\dfrac{|AC|}{|BC|} < 1$, te je i $|AE| < |BE|$. Kako je $|BE| > \dfrac{1}{2}|AB|$, zaključujemo $|AE| < \dfrac{1}{2}|AB|$ ili $|AE| < |AF|$ što znači da točka F leži između E i B. Tako smo dokazali da se točka E nalazi između D i F.

Posljedica 1. Ako je trokut ABC jednakokračan, točke D, E i F se podudaraju tj. $h_c \equiv s_\gamma \equiv t_\gamma$.

---

[1] Izvanredni profesor u mirovini na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Sarajevu,
e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

Napomena 1. Lako se dokaže da je za pravokutan trokut ABC ($\sphericalangle ACB = 90°$), $s_\gamma = CD$ simetrala kuta $\sphericalangle DCF$.

Dokazat ćemo još jedan teorem.

Teorem 2. U trokutu ABC vrijedi sljedeća nejednakost

$$\frac{t_c}{s_\gamma} \geqslant \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}. \tag{2}$$

Dokaz. Imamo

$$\left(\frac{t_c}{s_\gamma}\right)^2 = \frac{t_c^2}{s_\gamma^2} = \frac{\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)}{\frac{ab}{(a+b)^2}[(a+b)^2-c^2]} = \frac{(a+b)^2}{4ab} \cdot \frac{2a^2+2b^2-c^2}{(a+b)^2-c^2}. \tag{3}$$

Preostaje nam dokazati nejednakost

$$\begin{aligned} &\frac{2a^2+2b^2-c^2}{(a+b)^2-c^2} \geqslant 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 2a^2+2b^2-c^2 \geqslant (a+b)^2-c^2 \quad (\text{jer je } a+b>c) \\ \Longleftrightarrow\ & (a-b)^2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Dakle, nejednakost (4) vrijedi. Sada iz (3) i (4) imamo

$$\left(\frac{t_c}{s_\gamma}\right)^2 \geqslant \frac{(a+b)^2}{4ab},$$

a odavde dobivamo (2).

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b$. Sada iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dva pozitivna broja imamo

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \quad (a, b > 0)$$

a odavde

$$\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \geqslant 1. \tag{5}$$

Najzad iz nejednakosti (2) i (5) dobivamo

$$\frac{t_c}{s_\gamma} \geqslant 1,$$

tj.

$$s_\gamma \leqslant t_c. \tag{6}$$

Promatrajmo sada pravokutan trokut CDE (slika 1), kod kojeg je $|CD| = h_c$ njegova kateta i $|CE| = s_\gamma$ hipotenuza pa vrijedi $|CD| \leqslant |CE|$ tj.

$$h_c \leqslant s_\gamma. \tag{7}$$

Sada iz (6) i (7) slijedi nejednakost (1), tj.

$$h_c \leqslant s_\gamma \leqslant t_c.$$

Jednakost u (1) vrijedi ako je trokut ABC jednakokračan, $|AC| = |BC|$.

Napomena 2. Nejednakost $t_c \geqslant s_\gamma$ se može jednostavno dokazati i na ovaj način: Sa slike 1 vidimo da je trokut CDE pravokutan pa je kut $\sphericalangle CED$ šiljast, odnosno kut $\sphericalangle CEF$

je tupi, a kut $\sphericalangle CFE = \sphericalangle CFD$ je šiljast. Na osnovu činjenice da nasuprot većeg kuta u trokutu leži veća stranica, iz trokuta CEF dobivamo $\sphericalangle CEF > \sphericalangle CFE \implies |CF| > |CE|$, tj.

$$t_c \geqslant s_\gamma.$$

Naravno, u trokutu ABC vrijede i analogne nejednakosti

$$h_a \leqslant s_\alpha \leqslant t_a \tag{8}$$

$$h_b \leqslant s_\beta \leqslant t_b. \tag{9}$$

Nakon zbrajanja nejednakosti (1), (8) i (9) dobivamo

$$h_a + h_b + h_c \leqslant s_\alpha + s_\beta + s_\gamma \leqslant t_a + t_b + t_c. \tag{10}$$

Dokažimo sada sljedeći teorem.

Teorem 3. Ako su $h_a + h_b + h_c$ visine trokuta ABC, a r njegov radijus upisane kružnice, tada vrijedi nejednakost:

$$h_a + h_b + h_c \geqslant 9r. \tag{11}$$

Dokaz. Imamo

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2P} + \frac{b}{2P} + \frac{c}{2P} = \frac{a+b+c}{2P} = \frac{s}{P} = \frac{s}{sr} = \frac{1}{r},$$

gdje je s poluopseg, a P površina trokuta ABC. Dakle, vrijedi

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}. \tag{12}$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine tri pozitivna broja i jednakosti (12) slijedi

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{3} \geqslant \frac{3}{\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}}, \quad \text{tj.} \quad h_a + h_b + h_c \geqslant 9r,$$

a ovo je (11). Jednakost u (11) vrijedi ako je trokut istostraničan.

I na kraju dokažimo ovaj teorem.

Teorem 4. U trokutu vrijedi nejednakost

$$t_a + t_b + t_c \leqslant 4R + r, \tag{13}$$

gdje su R i r radijusi opisane i upisane kružnice trokuta ABC.

Dokaz. Neka su d_a, d_b, d_c redom udaljenosti središta opisane kružnice trokuta ABC od stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Tada imamo (nejednakost trokuta):

$$t_a \leqslant R + d_a, \quad t_b \leqslant R + d_b, \quad t_c \leqslant R + d_c,$$

a odavde, nakon zbrajanja

$$t_a + t_b + t_c \leqslant 3R + d_a + d_b + d_c. \tag{14}$$

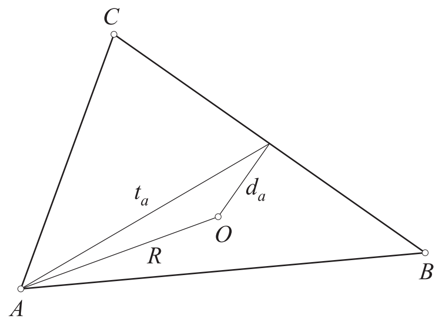
Iz trokuta OBC imamo (točka O je središte opisane kružnice trokuta ABC, $\sphericalangle BOC = 2\alpha$):

$$ad_a = R^2 \sin 2\alpha, \quad bd_b = R^2 \sin 2\beta, \quad cd_c = R^2 \sin 2\gamma,$$

a odavde

$$d_a = \frac{R^2 \sin 2\alpha}{a} = \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2R \sin \alpha} = R \cos \alpha,$$

te analogno $d_b = R \cos \beta$ i $d_c = R \cos \gamma$.



Slika 2.

Nakon zbrajanja posljednje tri jednakosti, dobivamo

$$d_a + d_b + d_c = R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma),$$

a odavde zbog poznate jednakosti $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \dfrac{r}{R}$,

$$d_a + d_b + d_c = R + r. \tag{15}$$

Sada iz (14) i (15) dobivamo nejednakost

$$t_a + t_b + t_c \leqslant 4R + r,$$

a ovo je tražena nejednakost.

Jednakost u (13) vrijedi ako i samo ako je $t_a = t_b = t_c$ (istostraničan trokut). Najzad iz nejednakosti (10), (11) i (13) slijedi

$$9r \leqslant h_a + h_b + h_c \leqslant s_\alpha + s_\beta + s_\gamma \leqslant t_a + t_b + t_c \leqslant 4R + r,$$

u kojoj jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut istostraničan.

Napomena 3. Na kraju ćemo dati još neke posljedice nejednakosti (1), (8) i (9):

$$\frac{h_a}{s_\alpha} + \frac{h_b}{s_\beta} + \frac{h_c}{s_\gamma} \leqslant 3, \qquad \frac{s_\alpha}{h_a} + \frac{s_\beta}{h_b} + \frac{s_\gamma}{h_c} \geqslant 3,$$

$$\frac{s_\alpha}{t_a} + \frac{s_\beta}{t_b} + \frac{s_\gamma}{t_c} \leqslant 3, \qquad \frac{t_a}{s_\alpha} + \frac{t_b}{s_\beta} + \frac{t_c}{s_\gamma} \geqslant 3.$$

Jednakost u svakoj od četiri posljednje nejednakosti vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$, tj. ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 2*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2010.

[2] O. Botema and oth., *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[3] Z. Kadelburg, D. Đukić, M. Lukić, I. Matić, *Nejednakosti (Materijali za mlade matematičare, Sveska 42)*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2003.

[4] I. H. Sivašinskij, *Zadačnik po elementarnoj matematike*, Nauka, Moskva, 1966.