ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2015. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 1/261.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 216.

A) Zadaci iz matematike

3455. Odredi sva pozitivna cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$(1+x!)(1+y!)=(x+y)!\,.$$

3456. Neka su a i b realni brojevi takvi da je $a^3+b^3=13$ i $a^9+b^9=-299$. Odredi ab.

3457. Dan je niz brojeva rekurzivno: $a_0=1$, $a_1=3$, $a_2=9$, $a_n=a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}$ za $n\geq 3$. Pokaži da je $a_n\leq 3^n$ za svaki prirodan broj n.

3458. Kružnice polumjera 9 i 4 cm dodiruju se izvana. Odredi polumjer kružnice koja dodiruje ove dvije izvana i njihovu zajedničku tangentu.

3459. Na stranici $\overline{AD}$ i dijagonali $\overline{AC}$ paralelograma $ABCD$ dane su točke M i N tako da je $|AM|=\frac{1}{5}|AD|$ i $|AN|=\frac{1}{6}|AC|$. Dokaži da su točke B, N i M kolinearne. U kojem omjeru točka N dijeli dužinu $\overline{MB}$?

3460. Točka C je polovište promjera $\overline{AB}$ kružnice $ABED$, pri čemu je tetiva $\overline{DE}$ paralelna s $\overline{AB}$. Pravac AP okomit je na AD i siječe ED u točki P. Pokaži da vrijedi jednakost

$$|PC|^2=|AP|^2+|AC|^2+|AE|^2\,.$$

3461. Ako su a, b, c, d površine strana tetraedra volumena V i h_a, h_b, h_c, h_d odgovarajuće mu visine, dokaži nejednakost

$$(a+b+c+d)(h_a+h_b+h_c+h_d)\geq 48V\,.$$

3462. U trokutu ABC je $|AC|:|BC|=2:1$ i kut $\gamma=\arccos\frac{3}{4}$. Na stranici $\overline{AC}$ dana je točka D takva da je $|CD|:|AD|=1:3$. Odredi omjer polumjera opisane kružnice trokuta ABC i polumjera upisane kružnice trokuta ABD.

3463. Kvadrati $ABMN$ i $CDKL$ su konstruirani s vanjske strane nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ konveksnog četverokuta $ABCD$. Dokaži da su polovišta dijagonala četverokuta $ABCD$ i $MNKL$ vrhovi kvadrata ili se međusobno podudaraju.

3464. Izračunaj vrijednost izraza (bez kalkulatora)

$$\frac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ\,.$$

3465. Unutar kruga radijusa 16 cm nalazi se 650 točaka. Dokaži da postoji prsten s unutarnjim radijusom 2 cm i vanjskim 3 cm koji pokriva barem 10 od tih točaka.

3466. Dana je kružnica $k(O_1,R)$ i pravac p koji ju ne siječe i od njezinog središta udaljen je d. Odredi geometrijsko mjesto središta kružnica koje dodiruju danu kružnicu i pravac p.

3467. Nađi rješenje sistema linearnih kongruencija

$$x+2y\equiv 1 \pmod 5$$

$$2x+y\equiv 1 \pmod 5\,.$$

3468. Neka je F_n Fibonaccijev niz ($F_1=F_2=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ za $n>1$). Odredi sume

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}}$, b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}$.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 386. Minutna kazaljka na Big Benu je dugačka 4.3 m, a satna 2.7 m. Kolika je brzina krajnje točke minutne kazaljke i koliko je puta ona veća od brzine krajnje točke satne kazaljke?

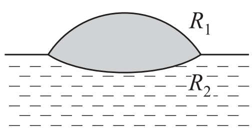
OŠ – 387. Arhimedov zakon kaže da je tijelo uronjeno u tekućinu lakše za težinu istisnute tekućine. Izračunaj ubrzanje koje ima kamen mase 10 kilograma dok tone u vodi. Gustoća kamena je 2500 kg/m^3, a gustoća vode je 1000 kg/m^3.

OŠ – 388. Automobil mase 1.2 tone može jednoliko ubrzati iz mirovanja do brzine 90 km/h za 6 sekundi. Kolika mu je snaga?

OŠ – 389. Promatrač u čamcu na rijeci je uočio da valovi koji ljuljaju njegov čamac imaju razmak između susjednih valnih brjegova 60 centimetara. Izmjerio je da za četiri sekunde pored njega prođe 8 valova. Kolika je brzina tih valova? Vraćajući se na obalu uočio je da su se razmaci između brjegova smanjili na 40 centimetara. Kolika je brzina valova u plićem dijelu vode?

1580. Kolika mora biti masa kuglice koja pri centralnom elastičnom sudaru s dotad mirnom kuglicom mase 250 g izgubi 70.84% kinetičke energije?

1581. Na površini mirne vode pliva bikonveksna plastična leća kao na slici. Paralelni snop zraka okomito odozgo leća će fokusirati na dubini 30 cm. Kad bi leća bila u zraku, njena bi žarišna daljina bila 12 cm. Odredi radijuse zakrivljenosti oba dioptra. Indeks loma plastike od koje je načinjena leća je 1.46, indeks loma vode $\frac{4}{3}$, a indeks loma zraka uzmimo da je jednak 1.



1582. Jednoliki tanki štap duljine l obješen je na jedan kraj tako da drugi kraj slobodno njiše (fizičko njihalo). Na kojoj bi ga udaljenosti od središta štapa trebali objesiti tako da period malih njihaja ostane toliki koliki je bio za štap obješen na jednom kraju?

1583. Zavojnica ohmskog otpora 10 Ω troši snagu 400 W priključena na izmjenični napon 110 V frekvencije 50 Hz. Kolika će biti snaga ako uz isti napon udvostručimo frekvenciju? Koliki je induktivitet zavojnice?

1584. Odredi radijus i brzinu kruženja satelita oko Jupitera kojemu je ophodno vrijeme jednako periodu rotacije Jupitera ("geostacionarna" orbita). Masa Jupitera je $1.8986 \cdot 10^{27}$ kg, a period rotacije 9 h 55 min 30 s.

1585. Potpuna pomrčina Sunca dogodit će se u Zagrebu 3. rujna 2081. godine. U trenutku maksimalne pomrčine, prividni promjer Sunca će biti 0.5284°, a Mjeseca 0.5664°. Uzmimo da je relativna kutna brzina Mjeseca u odnosu na Sunce 360 stupnjeva u 29.5 dana (sinodni period). Koristeći navedene kutne veličine, procijeni vrijeme trajanja potpune pomrčine, te ukupno trajanje pomrčine.

1586. Prolaskom kroz morsku vodu, sunčeva svjetlost gubi na intenzitetu. Neka plava (480 nm) svjetlost po metru dubine izgubi 1.75%, a žuta (580 nm) 8.8% intenziteta. Odredi dubinu mora do koje dopire 1% žute svjetlosti, te dubinu do koje dopire 1% plave svjetlosti.

C) Rješenja iz matematike

3427. *Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost*

$$\underbrace{11\ldots1}_{2n} = \underbrace{22\ldots2}_{n} + \underbrace{33\ldots3}_{n}{}^2 .$$

Rješenje. Označimo $a = \underbrace{11\ldots1}_{n}$. Tada je

$$\begin{aligned}\underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{22\ldots2}_{n}\\ &= (10^n a + a) - 2a = (10^n - 1)a\\ &= 9(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 1)a\\ &= 9a \cdot a = (3a)^2 = \underbrace{33\ldots3}_{n}{}^2.\end{aligned}$$

Zlatko Petolas (2),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3428. *Nađi sva cjelobrojna rješenja sistema linearnih diofantskih jednadžbi*

$$x + y + z = 100$$
$$x + 8y + 50z = 156 .$$

Prvo rješenje. Oduzimanjem jednadžbi dobivamo $7y + 49z = 56$, odakle slijedi

$$y + 7z = 8,$$

što je diofantska jednadžba kojoj je $y = 1$, $z = 1$ jedno partikularno rješenje, pa su sva njezina rješenja

$$y = 1 + 7k, \quad z = 1 - k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Iz prve jednadžbe sada imamo

$$x = 100 - y - z = 98 - 6k.$$

Dakle sva rješenja sustava su $x = 98 - 6k$, $y = 1 + 7k$, $z = 1 - k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Zlatko Petolas (2), Zagreb

Drugo rješenje. Oduzimanjem jednadžbi dobivamo

$$7y + 49z = 156 - 100 = 56$$

odakle je

$$y = 8 - 7z.$$

Sada iz prve jednadžbe imamo

$$x + 8 - 7z + z = 100$$

tj.

$$x = 92 + 6z.$$

Dakle, sva rješenja su oblika

$$(x, y, z) = (92 + 6z, 8 - 7z, z), \quad z \in \mathbf{Z}.$$

Petar Orlić (3),
XV. gimnazija, Zagreb

Treće rješenje. Promatrajmo sustav jednadžbi kao sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$x + y = 100 - z$$

$$x + 8y = 156 - 50z.$$

Tada je

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 100 - z & 1 \\ 156 - 50z & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{800-8z-156+50z}{8-1}$$

$$= 92 + 6z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 100 - z \\ 1 & 156 - 50z \end{vmatrix}}{7} = \frac{156-50z-100+z}{7}$$

$$= 8-7z.$$

Dakle, rješenje je

$$z \in \mathbf{Z}, \quad x = 92 + 6z, \quad y = 8 - 7z.$$

Ur.

3429. *Nađi sva rješenja diofantske jednadžbe*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}.$$

Rješenje.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{14} - \frac{1}{y} = \frac{y - 14}{14y} \implies$$

$$x = \frac{14y}{y - 14} = 14 + \frac{14^2}{y - 14} \qquad (1)$$

Kako mora biti $x \in \mathbf{Z}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ slijedi

$$y - 14 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, 14, \pm 28, \pm 49, \pm 98, \pm 196\}. \qquad (2)$$

(1) i (2) daju sva rješenja:

$$(x, y) \in \{(-182, 13), (-84, 12), (-35, 10), (-14, 7), (7, -14), (10, -35), (12, -84), (13, -182), (15, 210), (16, 112), (18, 63), (21, 42), (28, 28), (42, 21), (63, 18), (112, 16), (210, 15)\}.$$

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3430. *Vrijedi:* $\lfloor\sqrt{44}\rfloor = 6$ *i* $\lfloor\sqrt{4444}\rfloor = 66$. *Dokaži da vrijedi i općenito*

$$\Bigl\lfloor\sqrt{\underbrace{44\ldots44}_{2n}}\Bigr\rfloor = \underbrace{6\ldots6}_{n}.$$

Rješenje. Označimo $a = \underbrace{11\ldots1}_{n}$. Tada je

$$10^n = 9a + 1.$$

Sada je

$$\underbrace{44\ldots4}_{2n} = 4(10^n a + a) = 4((9a + 1)a + a)$$

$$= 36a^2 + 8a,$$

tj.

$$36a^2 < \underbrace{44\ldots4}_{2n} < 36a^2 + 12a + 1 = (6a + 1)^2$$

odnosno

$$6a < \sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n}} < 6a + 1.$$

Dakle,

$$\Bigl\lfloor\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n}}\Bigr\rfloor = \underbrace{66\ldots6}_{n}.$$

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3431. *Dokaži da za sve realne brojeve* x*,* y*,* z *vrijedi nejednakost*

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq \frac{3}{4}(x-y)^2.$$

Kada se postiže jednakost?

Rješenje.

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz-\frac{3}{4}(x-y)^2$$

$$=\frac{x^2+y^2}{4}+z^2+\frac{xy}{2}-xz-yz$$

$$=\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-z\right)^2 \geqslant 0.$$

Jednakost vrijedi kad je $x+y=2z$.

Petar Orlić (3), Zagreb

U zadatku **3432.** je došlo do tiskarske greške i treba glasiti:

3432. *Neka su* $x, y \in (0,1)$ *takvi da postoji pozitivan broj* $a \neq 1$ *takav da je*

$$\log_x a + \log_y a = 4\log_{xy} a.$$

Dokaži da je $x=y$.

Rješenje. Prelaskom na prirodni logaritam i dijeljenjem s $\ln a \neq 0$ dobivamo:

$$\frac{\ln a}{\ln x}+\frac{\ln a}{\ln y}=4\cdot\frac{\ln a}{\ln x+\ln y}$$

$$\iff \frac{\ln x+\ln y}{\ln x\ln y}=\frac{4}{\ln x+\ln y}$$

$$\iff (\ln x+\ln y)^2=4\ln x\ln y$$

$$\iff (\ln x-\ln y)^2=0$$

$$\iff \ln x=\ln y$$

$$\iff x=y.$$

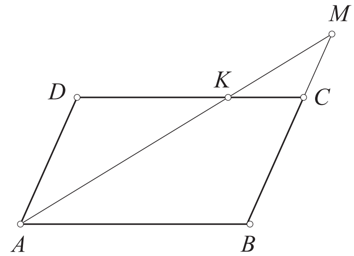
Zlatko Petolas (2), Zagreb

3433. *U paralelogramu* $ABCD$ *je* $|AD|=|BC|=12$ *cm. Na pravcu* BC *je dana točka* M *takva da pravac* AM *odsijeca od paralelograma trokut* AKD *kojemu je površina jednaka trećini površine paralelograma. Kolika je duljina dužine* $\overline{CM}$*?*

Rješenje. Trokut AKD i paralelogram $ABCD$ imaju istu visinu v okomitu na CD:

$$\frac{|DK|v}{2}=\frac{1}{3}|DC|v \implies |DK|=\frac{2}{3}|DC|.$$

Dakle, $|KC|=|DC|-|DK|=\frac{1}{3}|DC|$.



Iz sličnosti trokuta AKD i MKC slijedi

$$\frac{|KC|}{|CM|}=\frac{|DK|}{|AD|} \iff \frac{|DC|}{3|CM|}=\frac{2|DC|}{3|AD|}$$

tj. $|CM|=\frac{1}{2}|AD|=6$ cm.

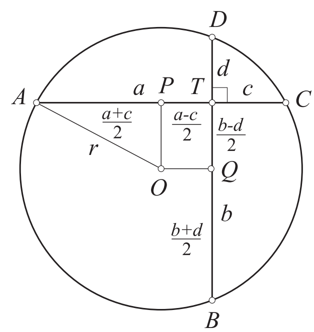
Zlatko Petolas (2), Zagreb

3434. *Ako su dvije tetive kružnice međusobno okomite, pokaži da se zbroj kvadrata duljina njihovih četiriju segmenata jednak kvadratu promjera kružnice.*

Prvo rješenje. Označimo

$$|AT|=a,\ |CT|=c,\ |BT|=b,\ |DT|=d.$$

Imamo $ac=bd$ (potencija točke).



Nadalje,

$$|AP|=\frac{a+c}{2},\quad |PT|=\frac{a-c}{2}$$

$$|BQ|=\frac{b+d}{2},\quad |TQ|=\frac{b-d}{2}.$$

Sada je

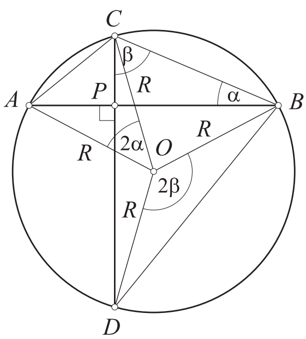
$$r^2=|AP|^2+|OP|^2=\frac{(a+c)^2}{4}+\frac{(b-d)^2}{4}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$$

tj. $a^2+b^2+c^2+d^2=4r^2=(2r)^2$.

Petar Orlić (3), Zagreb

Drugo rješenje. Ako je $\sphericalangle AOC = 2\alpha$, onda je $\sphericalangle ABC = \alpha$ te iz $\sphericalangle DOB = 2\beta$ dobivamo $\sphericalangle DCB = \beta$ (središnji i obodni kut nad istom tetivom).



Trokut BCP je pravokutan i njegovi šiljasti kutovi su $\sphericalangle PBC = \alpha$ i $\sphericalangle PCB = \beta$. Tada je $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$\sin\alpha = \cos\beta \quad \text{i} \quad \cos\alpha = \sin\beta. \qquad (1)$$

Kako su $\triangle ACP$ i $\triangle BDP$ pravokutni, vrijedi:

$$|AC|^2 = |AP|^2 + |CP|^2,$$
$$|BD|^2 = |BP|^2 + |DP|^2$$

pa je

$$\begin{aligned}
&|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2 + |DP|^2 \\
&= |AC|^2 + |BD|^2 \\
&= |AO|^2 + |CO|^2 - 2|AO| \cdot |CO| \cos 2\alpha \\
&\quad + |OB|^2 + |OD|^2 - 2|OB| \cdot |OD| \cos 2\beta \\
&= 2R^2(1 - \cos 2\alpha) + 2R^2(1 - \cos 2\beta) \\
&= 2R^2(2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta) \\
&\overset{(1)}{=} 4R^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4R^2.
\end{aligned}$$

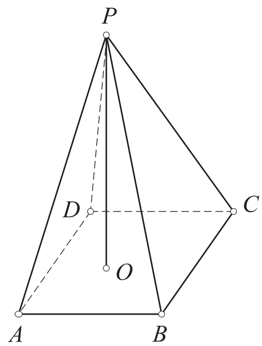
Sara Džebo (3), Peta gimnazija, Sarajevo, BiH

3435. *Dana je piramida $PABCD$ s bazom $ABCD$, koja je romb s kutom $\sphericalangle DAB = 60^\circ$. Ako je $|PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$, dokaži $|PA| = |PB|$.*

Prvo rješenje. Neka je $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$. Iz uvjeta na romb slijedi $|BD| = a$, $|AC| = \sqrt{3}a$. Koristit ćemo poznatu činjenicu

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})) = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2}.$$

(Ova posljednja jednakost slijedi iz kosinusovog poučka.)



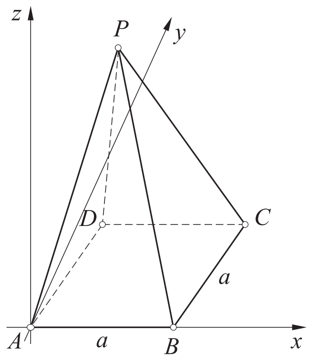
$$\begin{aligned}
|PB|^2 &= |PC|^2 - |PD|^2 = (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD})(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \\
&= \overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \\
&= (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \\
&= \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD} \\
&= \frac{|PB|^2 + |PC|^2 - a^2}{2} + \frac{|PB|^2 + |PD|^2 - a^2}{2} \\
&\quad - \frac{|PA|^2 + |PC|^2 - 3a^2}{2} - \frac{|PA|^2 + |PD|^2 - a^2}{2} \\
&= |PB|^2 - |PA|^2 + a^2.
\end{aligned}$$

Dakle $|PA|^2 = a^2$ tj. $|PA| = a = |AB|$.

Zlatko Petolas (2), Zagreb

Drugo rješenje. Stavimo piramidu u trodimenzionalni koordinatni sustav tako da je: $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $C\left(\frac{3a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $D\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $P(x,y,z)$. Tada imamo

$$|PC|^2 = \left(\frac{3a}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - y\right)^2 + z^2,$$
$$|PB|^2 = (a - x)^2 + y^2 + z^2,$$
$$|PD|^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - y\right)^2 + z^2.$$



Uvrštavanjem u jednadžbu

$$|PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$$

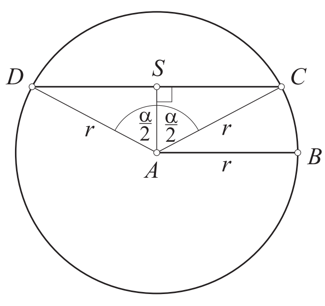
dobivamo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Tada je $|PA| = |AB| = a$.

Ur.

3436. *Dužina $\overline{AB}$ je polumjer kružnice. Njezina tetiva $\overline{CD}$ je paralelna s $\overline{AB}$ i površina trapeza $ABCD$ je najveća moguća. Odredi kut pod kojim se iz središta A vidi tetiva $\overline{CD}$.*

Rješenje. $\sphericalangle DAC = \alpha$, $\sphericalangle DAS = \sphericalangle CAS = \dfrac{\alpha}{2}$; S je središte tetive $\overline{CD}$.

$$P_{ABCD} = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |AS|.$$



Kako je $|AD| = |AC| = |AB| = r$, iz $\triangle ASD$ dobivamo:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|DS|}{|AD|} = \frac{\frac{1}{2}|CD|}{r}$$

$$|CD| = 2r\sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{i}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{|AS|}{|AD|}, \quad \text{tj.} \quad |AS| = |AD|\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Iz $|AS| = r\cos\dfrac{\alpha}{2}$ imamo

$$P_{ABCD} = \frac{r + 2r\sin\frac{\alpha}{2}}{2} \cdot r\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$P_{ABCD} = \frac{r^2}{2}\left(1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Promatrajmo funkciju

$$f(x) = \left(1 + 2\sin\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}$$

$$f'(x) = 2\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + \left(1 + 2\sin\frac{x}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$= \cos^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

$$= -2\sin^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)$$

$$= -2\sin^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + 1$$

Iz $f'(x) = 0$ dobivamo

$$4\sin^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} - 2 = 0.$$

Kako je $\dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ moguće je samo

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8}.$$

Kako je za $x < \pi$,

$$f''(x) = -2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2} < 0,$$

dobivamo da se za

$$\alpha = 2\arcsin\frac{-1 + \sqrt{33}}{8} \approx 72.75^\circ$$

postiže maksimum.

Sara Džebo (3), Sarajevo, BiH

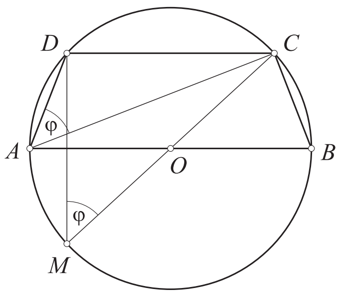
Učenik Zlatko Petolas je riješio zadatak uz pretpostavku da je $\overline{AB}$ promjer kružnice, pa donosimo i njegovo rješenje.

Rješenje. Neka je O središte kružnice radijusa r, v visina trapeza. Tada je $\varphi = \sphericalangle DAC = \sphericalangle DMC$ (obodni kutovi), pa iz pravokutnog trokuta DMC imamo

$$|CD| = 2r\sin\varphi, \quad 2v = 2r\cos\varphi$$

tj. $v = r\cos\varphi$. Sada se površina trapeza $ABCD$ može izraziti

$$\begin{aligned} P &= \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot v = \frac{2r + 2r\sin\varphi}{2} \cdot r\cos\varphi \\ &= r^2(1 + \sin\varphi)\cos\varphi. \end{aligned}$$



Maksimum površine po $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ tražimo pomoću derivacije

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dP}{d\varphi} = r^2(-\sin\varphi - \sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \\ &= r^2(1 - \sin\varphi - 2\sin^2\varphi) \\ &= -r^2(2\sin\varphi - 1)(\sin\varphi + 1). \end{aligned}$$

Iz uvjeta na φ slijedi da je to jedino moguće kada je $2\sin\varphi = 1$ tj. $\varphi = \dfrac{\pi}{6} = 30^\circ$.

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3437. *Dokaži jednakost*

$$\operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ = 3\,.$$

Prvo rješenje. Korištenjem $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$ dobivamo

$$\begin{aligned} &\operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ \\ &\quad = \sqrt{3}\operatorname{tg} 80^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 20^\circ \qquad (1) \\ &\quad = \sqrt{3}\frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}. \end{aligned}$$

Računamo prvo

$$\begin{aligned} &\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &\quad = \frac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \\ &\quad = \frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} \qquad (2) \\ &\quad = \frac{\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ} \\ &\quad = \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

jer $\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 160^\circ) = \sin 20^\circ$. Dalje

$$\begin{aligned} \sin 80^\circ &= \sin(60^\circ + 20^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ + \frac{1}{2}\sin 20^\circ, \\ \sin 40^\circ &= \sin(60^\circ - 20^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\sin 20^\circ, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} \sin 40^\circ \sin 80^\circ &= \frac{3}{4}\cos^2 20^\circ - \frac{1}{4}\sin^2 20^\circ \\ &= \frac{1}{4}(3 - 4\sin^2 20^\circ). \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} &\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ \\ &\quad = \frac{1}{4}(3\sin 20^\circ - 4\sin^3 20^\circ) \qquad (3) \\ &\quad = \frac{\sin 60^\circ}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}, \end{aligned}$$

jer je $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. Sada uvrštavanjem (2) i (3) u (1) slijedi tvrdnja.

Zlatko Petolas (2), Zagreb

Drugo rješenje. $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$. Treba dokazati $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Kako je

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 10^\circ} = \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} 10^\circ}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} 10^\circ},$$

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 10^\circ} = \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} 10^\circ},$$

imamo

$$\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 10^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 10^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Međutim, vrijedi:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}30^\circ &= \frac{\operatorname{tg}20^\circ + \operatorname{tg}10^\circ}{1-\operatorname{tg}20^\circ \operatorname{tg}10^\circ}\\ &= \frac{\dfrac{2\operatorname{tg}10^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 10^\circ}+\operatorname{tg}10^\circ}{1-\dfrac{2\operatorname{tg}^2 10^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 10^\circ}}\\ &= \frac{\operatorname{tg}10^\circ(3-\operatorname{tg}^2 10^\circ)}{1-3\operatorname{tg}^2 10^\circ},\end{aligned}$$

a kako je $\operatorname{tg}30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, tvrdnja je dokazana.

Petar Orlić (3), Zagreb

3438. *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} + \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} = \frac{5}{2}.$$

Rješenje. Kako je $7 \pm 4\sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})^2$, množenjem jednadžbe s $(2+\sqrt{3})^{\cos x}$, uz oznaku $t = (2+\sqrt{3})^{\cos x}$, ona prelazi u

$$t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0,$$

čija rješenja su $t_1 = \dfrac{1}{2}$, $t_2 = 2$.

U prvom slučaju imamo $(2+\sqrt{3})^{\cos x} = \dfrac{1}{2}$. Logaritmiranjem s bazom 2 i sređivanjem dobivamo

$$\cos x = \frac{-1}{\log_2(2+\sqrt{3})}$$

tj.

$$x = \arccos \frac{-1}{\log_2(2+\sqrt{3})},$$

a u drugom $(2+\sqrt{3})^{\cos x} = 2$. Ponovno logaritmiranjem i sređivanjem dobivamo

$$\cos x = \frac{1}{\log_2(2+\sqrt{3})}$$

tj.

$$x = \arccos \frac{1}{\log_2(2+\sqrt{3})},$$

Sara Džebo (3), Sarajevo, BiH

3439. *Dokaži da za svaki* $n \geq 1$ *vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$$

Prvo rješenje. Dokazat ćemo matematičkom indukcijom jaču nejednakost

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

Baza. $n = 1$

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{2} < 2 - \sqrt{2}$$

što je istina.

Pretpostavka. Za neki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

Korak.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+1}}\\ &\quad < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+1}}\\ &\quad = 2 - \frac{2n+3}{(n+2)\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

Dokažimo $\dfrac{2n+3}{(n+2)\sqrt{n+1}} > \dfrac{2}{\sqrt{n+2}}$ tj.

$$\begin{aligned}2n+3 &> 2\sqrt{(n+1)(n+2)}\\ (2n+3)^2 &> 4(n+1)(n+2)\\ &= (2n+2)(2n+4)\end{aligned}$$

što vrijedi.

Dakle

$$2 - \frac{2n+3}{(n+2)\sqrt{n+1}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+2}}$$

i dokaz je gotov.

Petar Orlić (3), Zagreb

Drugo rješenje. Pokažimo prvo da za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < \frac{2}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}.$$

Ekvivalentno

$$(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1} < 2(n+1)\sqrt{n}$$

$$\iff n\sqrt{n+1} < (n+1)\sqrt{n}$$

(dijeljenjem s $\sqrt{n(n+1)}$)

$$\iff \sqrt{n} < \sqrt{n+1}.$$

Dalje

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$
$$= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Sada je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$
$$= 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} < 2.$$

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3440. *Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi koji zadovoljavaju sistem jednadžbi*

$$x+y+xy=8$$
$$y+z+yz=15$$
$$z+x+zx=35\,.$$

Odredi vrijednost izraza $x+y+z+xyz$.

Rješenje. Uočimo

$$x+y+xy=8 \iff 1+x+y+xy=9$$
$$(1+x)(1+y)=9 \tag{1}$$

Slično dobijemo

$$(1+y)(1+z)=16, \tag{2}$$
$$(1+x)(1+z)=36. \tag{3}$$

Množenjem jednakosti (1), (2) i (3) dobivamo

$$(1+x)^2(1+y)^2(1+z)^2 = 9\cdot 16\cdot 36$$

tj.

$$(1+x)(1+y)(1+z)=72. \tag{4}$$

Dijeljenjem (4) s (1) slijedi

$$1+z=8 \implies z=7,$$

dijeljenjem (4) s (2)

$$1+x=\frac{9}{2} \implies x=\frac{7}{2}$$

i dijeljenjem (4) s (3)

$$1+y=2 \implies y=1.$$

Sada je

$$x+y+z+xyz=36.$$

Zlatko Petolas (2), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 378. *Staklena vaza ima dno u obliku kvadrata. Vanjski brid dna iznosi 8 centimetara. Bočne strane vaze debele su 3 milimetra. U vazi je voda do visine 20 centimetara od dna. Kad se u vazu stavi 10 cvjetova gerbera razina vode se povisi za 4 centimetra. Sve stabljike su došle do dna vaze. Koliki je promjer jedne stabljike gerbera?*

Rješenje.

$a_v = 8$ cm

$a_u = 8$ cm $- 3$ mm $= 7.7$ cm

$h = 20$ cm

$\Delta h = 4$ cm

$n = 10$

$d = ?$

$$V_{10} = \Delta V_{vode} = a_u^2 \cdot \Delta h = (7.7\text{ cm})^2 \cdot 4\text{ cm}$$
$$= 237.16\text{ cm}^3$$
$$V_1 = 23.716\text{ cm}^3$$

Stabljike su u obliku valjka kojem je visina jednaka uronjenom dijelu, dakle 24 cm.

$$r^2 = \frac{V}{h\pi}$$
$$r^2 = \frac{23.716\text{ cm}^3}{24\pi\text{ cm}} = 0.31\text{ cm}^2$$
$$r = 0.56\text{ cm}$$
$$d = 2r = 1.12\text{ cm}.$$

Zrinka Rođanec (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 379. *Saturnov satelit Japet je već dugo zanimljiv astronomima jer mu je jedna strana 10 puta sjajnija od druge. Neki smatraju da je on jednom okrznuo prsten pri čemu je ta strana zatamnjena, drugi da je to povezano s prašinom koju iza sebe ostavlja satelit Feba.*

Promjer Japeta je 1470 kilometara, a masa $1.8 \cdot 10^{21}$ kg. Kolika je njegova gustoća?

Rješenje.

$d = 1470$ km

$\underline{m = 1.8 \cdot 10^{21}\ \text{kg}}$

$\rho = ?$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$V = \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$$

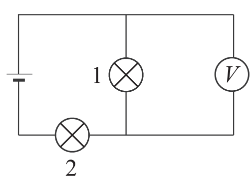
$$r = 735\ \text{km} = 7.35 \cdot 10^5\ \text{m}$$

$$V = \frac{4}{3}(7.35 \cdot 10^5\ \text{m})^3 \cdot \pi = 1.663 \cdot 10^{18}\ \text{m}^3$$

$$\rho = \frac{1.8 \cdot 10^{21}\ \text{kg}}{1.663 \cdot 10^{18}\ \text{m}^3} = 1082.4\ \text{kg/m}^3.$$

Karlo Marović (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 380. *Otpor trošila 1 na shemi iznosi 20 ohma, voltmetar pokazuje napon od 4 volta. Napon izvora je 10 volti. Kolika će struja teći krugom ako se ta dva trošila spoje paralelno na isti izvor?*



Rješenje.

$U = 10$ V

$U_1 = 4$ V

$\underline{R_1 = 20\ \Omega}$

$I_p = ?$

$$I_s = \frac{U_1}{R_1} = \frac{4\ \text{V}}{20\ \Omega} = 0.2\ \text{A}$$

$$U_2 = U - U_1 = 6\ \text{V}$$

$$R_2 = \frac{U_2}{I_s} = \frac{6\ \text{V}}{0.2\ \text{A}} = 30\ \Omega$$

Kad se trošila spoje paralelno ukupni otpor će im biti:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$$

$$R_p = 12\ \Omega$$

$$I = \frac{U}{R_p} = \frac{10\ \text{V}}{12\ \Omega} = 0.83\ \text{A}.$$

Ante Šego (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 381. *Tijela A i B vise na različitima stranama poluge koja ima oslonac u sredini. Tijelo A je od kroma, obujam mu je pet puta manji od obujma tijela B, a objesište je 30 centimetara od oslonca poluge. Tijelo B je od aluminija. Koliko je njegovo objesište udaljeno od oslonca? Gustoća kroma je 7200 kg/m³, a gustoća aluminija 2700 kg/m³.*

Rješenje.

$\rho_A = 7200\ \text{kg/m}^3$

$\rho_B = 2700\ \text{kg/m}^3$

$k_A = 30$ cm

$\underline{V_B = 5\ V_A}$

$k_B = ?$

$$F_A \cdot k_A = F_B \cdot k_B$$

$$m_A \cdot g \cdot k_A = m_B \cdot g \cdot k_B$$

$$\rho_A \cdot V_A \cdot k_A = \rho_B \cdot V_B \cdot k_B$$

$$\rho_A \cdot V_A \cdot k_A = \rho_B \cdot 5V_A \cdot k_B$$

$$\rho_A \cdot k_A = \rho_B \cdot 5k_B$$

$$k_B = \frac{\rho_A \cdot k_A}{5\rho_B} = \frac{7200\ \text{kg/m}^3 \cdot 30\ \text{cm}}{5 \cdot 2700\ \text{kg/m}^3} = 16\ \text{cm}.$$

Matija Turčić (8),
OŠ Horvati, Zagreb

1567. *Pri zagrijavanju crnog tijela za 10 K ukupna snaga zračenja poraste za 7.5%. Odredi početnu temperaturu crnog tijela. Na kojoj valnoj duljini tijelo najviše zrači?*

Rješenje. Snaga zračenja crnog tijela proporcionalna je četvrtoj potenciji temperature (Stefanov zakon):

$$P = \sigma S T^4.$$

Porast temperature za 10 K i snage za 7.5% možemo zapisati kao

$$1.075P = \sigma S(T + 10)^4.$$

Dijeljenjem druge jednadžbe prvom dobivamo

$$1.075=\left(\frac{T+10}{T}\right)^4.$$

Budući da nas zanima samo pozitivno i realno rješenje, korjenujemo:

$$\sqrt[4]{1.075}=1+\frac{10}{T}.$$

Rješenje te jednadžbe je $T=548.1$ K. Wienov zakon daje valnu duljinu najintenzivnijeg zračenja:

$$\lambda_m T=2.898\cdot 10^{-3}\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}.$$

Odatle je $\lambda_m=5287$ nm.

Ur.

1568. *Tijelo male mase giba se u gravitacijskom polju većeg tijela (zvijezde ili planeta) po elipsi. Ako s a označimo veliku poluos elipse, a s r trenutni radijus-vektor tijela, dokaži da za iznos trenutne brzine v vrijedi:*

$$v^2=GM\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right),$$

gdje je $G=6.672\cdot 10^{-11}$ opća gravitacijska konstanta u SI jedinicama, a M masa većeg tijela. Koristi zakon očuvanja energije i činjenicu da je ukupna energija tijela jednaka energiji kruženja po kružnici radijusa a.

Rješenje. Pri kružnom gibanju radijusa a energija je suma kinetičke i potencijalne:

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{a},$$

gdje je m masa tijela koje kruži. Kako je gibanje kružno, za konstantni v vrijedi izraz za centripetalnu silu:

$$F=\frac{mv^2}{a}=\frac{GmM}{a^2}.$$

Odatle je

$$mv^2=\frac{GmM}{a},$$

pa je ukupna energija $E=-\dfrac{GmM}{2a}$. Uvršteno u početni izraz, uz općenito gibanje s radijvektorom r:

$$-\frac{GmM}{2a}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{r}$$

i direktno izraženo po v^2 uz pokratu m

$$v^2=GM\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right),$$

daje traženu relaciju.

Ur.

1569. *Satelit se giba oko Zemlje tako da je najmanja brzina 7500 m/s, a najveća 7800 m/s. Koristeći izraz iz prethodnog zadatka, odredi duljinu velike poluosi putanje, ekscentricitet, najveću i najmanju visinu iznad površine Zemlje i ophodno vrijeme satelita. Uzeti da je Zemlja kugla radijusa 6371 km i mase $6\cdot 10^{24}$ kg.*

Rješenje. Koristit ćemo izraz iz prethodnog zadatka za brzinu u perigeju (najveća brzina, najmanja visina i radijvektor) i apogeju (najmanja brzina, najveća visina i radijvektor). Odgovarajući radijvektori elipse linearnog ekscentriciteta e su $r=a-e$ i $r=a+e$:

$$v_{\max}^2=GM\left(\frac{2}{a-e}-\frac{1}{a}\right)=GM\frac{a+e}{a(a-e)},$$

$$v_{\min}^2=GM\left(\frac{2}{a+e}-\frac{1}{a}\right)=GM\frac{a-e}{a(a+e)}.$$

Vidimo da će se množenjem tih jednadžbi radijvektori kratiti:

$$v_{\max}v_{\min}=\frac{GM}{a}.$$

Odatle je duljina velike poluosi $a=6843.1$ km. Uvrštanjem u prvu ili drugu relaciju dobijamo linearni ekscentricitet $e=134.125$ km, te numerički $\varepsilon=\dfrac{e}{a}=0.0196$. Visine su određene razlikom radijvektora i radijusa Zemlje,

$$\begin{aligned}h_{\min}&=r_{\min}-R=a-e-R\\&=6843.1-134.1-6371\\&=338\ \text{km},\\h_{\max}&=r_{\max}-R=a+e-R\\&=6843.1+134.1-6371\\&=606.2\ \text{km}.\end{aligned}$$

Za ophodno vrijeme trebamo treći Keplerov zakon:

$$T^2=a^3\frac{4\pi^2}{GM}\to T=5621\ \text{s},$$

dakle 93 minute i 41 sekundu.

Ur.

1570. *Period njihanja kuglice na jednom kraju štapa (koji slobodno njiše oko drugog kraja) manji je 4% u odnosu na matematičko njihalo iste duljine (uz zanemarivu masu štapa). Iz navedenog omjera odredi masu štapa, ako je masa kuglice 2.39 kg.*

Rješenje. Period matematičkog njihala je

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

a fizičkog

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}},$$

gdje je I moment tromosti oko objesišta, m ukupna masa i d udaljenost težišta od objesišta. Izrazi su redom

$$I = I_š + I_k = \frac{1}{3}m_š l^2 + m_k l^2$$
$$m = m_š + m_k$$
$$md = m_š\frac{l}{2} + m_k l.$$

Uvrštavanjem dobijemo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m_š l^2}{3} + m_k l^2}{g\left(\frac{m_š l}{2} + m_k l\right)}}.$$

Uvjet na period glasi $T = 0.96T_0$, što daje masu štapa $m_š = 1.47$ kg.

Ur.

1571. *Vozač automobila počne kočiti na 21 m udaljenosti od nepomične prepreke. Ako je u prepreku udario brzinom 1.2 m/s nakon 2.8 s, te se gibao jednoliko usporeno, odredi brzinu prije kočenja i usporavanje (akceleraciju) pri kočenju.*

Rješenje. Jednadžba za put i brzinu jednoliko usporenog gibanja je

$$s(t) = v_0 t + \frac{a}{2}t^2$$
$$v(t) = v_0 + at.$$

Uvrstimo li $t = 2.8$ s, $v = 1.2$ m/s i $s = 21$ m, dobijemo

$$21 = v_0 \cdot 2.8 + \frac{a}{2}2.8^2$$
$$1.2 = v_0 + a \cdot 2.8.$$

Taj sustav ima rješenje $a = -4.5$ m/s (minus znači usporavanje) i $v_0 = 13.8$ m/s $= 49.68$ km/h.

Ur.

1572. *Odredi ukupnu masu atmosfere Marsa. Neka je tlak na površini Marsa $p_0 = 600$ Pa, ubrzanje sile teže na površini $g = 3.71$ m/s^2, a radijus Marsa $R = 3390$ km.*

Rješenje. Tlak na površini jednak je težini stupca atmosfere nad jediničnom površinom. Umnožak tog tlaka i ukupne površine planeta daje težinu atmosfere:

$$p_0 P = mg,$$

što daje

$$m = \frac{p_0 \cdot 4\pi R^2}{g} = \frac{600 \cdot 4\pi \cdot (3.39 \cdot 10^6)^2}{3.71}$$
$$= 2.335 \cdot 10^{16} \text{ kg}.$$

Zanemarili smo slabljenje gravitacijskog polja s visinom, te povećanje površine s visinom, obje vrlo male korekcije.

Ur.

1573. *Na zavoju polumjera 1000 m brzina vlaka se jednoliko smanjuje. Brzina na početku zavoja iznosi 54 km/h, a nakon 500 metara puta po zavoju, brzina je 36 km/h. Koliko je ubrzanje vlaka na početku zavoja, a koliko nakon 500 metara?*

Rješenje. Akceleracija u smjeru gibanja (tangencijalna) slijedi iz izraza $v^2 = v_0^2 + 2a_t s$ i konstantna je. Uvrštavanjem dobijemo $a_t = -0.125$ m/s. Centripetalna akceleracija (radijalna) ovisi o brzini i iznosi $a_r = \frac{v^2}{r}$, gdje je v trenutna brzina, a r radijus kruženja. Uvrštavanjem brzine na početku i na kraju gibanja dobijemo $a_{r0} = 0.225$ m/s i $a_r = 0.1$ m/s. Ukupno ubrzanje u oba slučaja dobijemo kao rezultantu dviju navedenih međusobno okomitih komponenti:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2},$$

što iznosi $a_0 = 0.2574$ m/s na početku i $a = 0.1601$ m/s nakon 500 metara.

Ur.