FIZIKA

Boškovićava slutnja atoma kao kvantnomehičkog oscilatora

Roko Pešić[1]

Uvod

Isusovac Ruđer Josip Bošković (1711. – 1787.) se po svojim znanstvenim doprinosima i anticipacijama, posebno u području fizike, općenito smatra najvećim hrvatskim i jednim od najvećih svjetskih znanstvenika svoga vremena. U svom najvažnijem djelu *Theoria philosophiae naturalis...*[2] (*Teorija prirodne filozofije...*, ili što bi u slobodnom prijevodu danas značilo "Teorijska fizika") izdanom u Beču 1758., a zatim u Veneciji 1763. godine [1], iznio je smione ideje o strukturi tvari, međudjelovanjima te o prostoru i vremenu. Svojim idejama je nagovijestio suvremenu atomistiku i teoriju relativnosti. Boškovićeve predodžbe o atomu kao složenoj čestici koja ima unutarnju strukturu, još su i danas aktualne u suvremenoj teorijskoj fizici elementarnih čestica.

Ovaj članak, međutim, nema namjeru detaljno obrazlagati sve njegove ideje o atomu, već samo na jednom primjeru približiti čitateljima gotovo zapanjujuću činjenicu o tome koliko su Boškovićeve predodžbe srodne suvremenim konceptima kvantne mehanike. Glavnina članka podijeljena je u dva dijela: u prvom će biti riječi o klasičnom fizikalnom modelu harmonijskog oscilatora koji uz primjenu Planckove pretpostavke vodi na Bohrove postulate. Drugi dio članka ukratko će opisati Boškovićeve zamisli o međudjelovanju čestica prema tekstu iz njegove *Teorije prirodne filozofije* [1,2].

Usporedivši Planckove i Bohrove zamisli s Boškovićevim, čitatelj će i sam moći povući zaključke o njihovim sličnostima, ali i razlikama, te koliko je Boškovićeva slutnja bila ispred svog vremena, promatrajući je iz perspektive razvoja fizike mikrosvijeta u 20. stoljeću.

Klasični harmonijski oscilator

Kao što znate, jednadžba gibanja za jednostavni harmonijski oscilator (npr. kuglicu obješenu na elastičnoj opruzi) glasi: $ma = -kx$ gdje m označava masu kuglice, k koeficijent elastičnosti opruge, x je koordinata položaja kuglice, dok je a oznaka za akceleraciju. Može se pokazati da je rješenje ove diferencijalne jednadžbe oblika:

$$x(t) = \alpha \sin(\omega t + \delta),$$

gdje je $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Grčka slova α i ω označavaju amplitudu i frekvenciju titranja oscilatora. Deriviranjem po vremenskoj varijabli (t) dobivamo izraz za brzinu:

---

[1] Autor je profesor fizike, e-pošta: `rpesic@nsk.hr`

[2] Puni naslov djela glasi: *Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium*, ili u prijevodu na hrvatski, *Teorija prirodne filozofije svedena na jedan jedini zakon sila koje postoje u prirodi.*

$$v(t) = \alpha\omega\cos(\omega t + \delta).$$

Za ukupnu energiju harmonijskog oscilatora dobiva se izraz [6]:

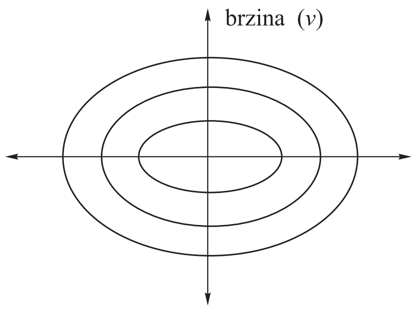
$$E = \frac{1}{2}\omega^2\alpha^2.$$

Dinamičko stanje harmonijskog oscilatora možemo predočiti u tzv. *faznoj ravnini*, u kojoj na os apscisa nanosimo položaj, a na os ordinata brzinu (ili količinu gibanja). Točku koja predočuje to stanje u određenom trenutku nazivamo *fazna točka*. Gibanje harmonijskog oscilatora opisujemo gibanjem fazne točke. Krivulju po kojoj se fazna točka giba tijekom vremena nazivamo *fazna krivulja*.

Slike fazne ravnine s faznim krivuljama nazivamo *fazni portret*. U ovom konkretnom primjeru jednostavnim računom iz izraza za $x(t)$ i $v(t)$, pomoću osnovnog trigonometrijskog identiteta može se pokazati, da je jednadžba fazne krivulje

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{v^2}{(\omega\alpha)^2} = 1.$$

To je elipsa s poluosima $\alpha = \frac{1}{\omega}\sqrt{2E}$ i $\omega\alpha = \sqrt{2E}$, gdje je E ukupna energija harmonijskog oscilatora:



Slika 1. Fazne krivulje za tri različite vrijednosti energije E.

Kvantni uvjet

Planck je svoj zakon zračenja crnog tijela izveo uz pretpostavku po kojoj energija harmonijskog oscilatora može biti samo cjelobrojni višekratnik od $h\nu$, gdje je h Planckova konstanta, a ν frekvencija fotona kojeg je emitirao (kvantni) oscilator. Iz te pretpostavke, kao i iz gore navedene jednadžbe elipse na slici 1 proizlazi da je površina elipse:

$$P = ab\pi = \alpha\omega\alpha\pi = \frac{E}{\nu} = \frac{nh\nu}{\nu} = nh, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Odatle vidimo da naš oscilator opisuje u faznoj ravnini samo one staze koje omeđuju površinu nh. Time smo došli do Bohrove formulacije kvantne teorije atoma. Naime, po prvom Bohrovu postulatu atomi mogu boraviti samo u određenim stacionarnim stanjima odnosno ne mogu kontinuirano emitirati svjetlost jer bi se time njihova energija i njihovo stanje kontinuirano mijenjali. Emisija i apsorpcija svjetlosti u kvantnoj su teoriji diskontinuiran, trenutan proces. Energija emitiranog fotona jednaka je razlici energije početnog i konačnog stanja:

$$h\nu = E_n - E_m.$$

Odatle je frekvencija spektralne linije:

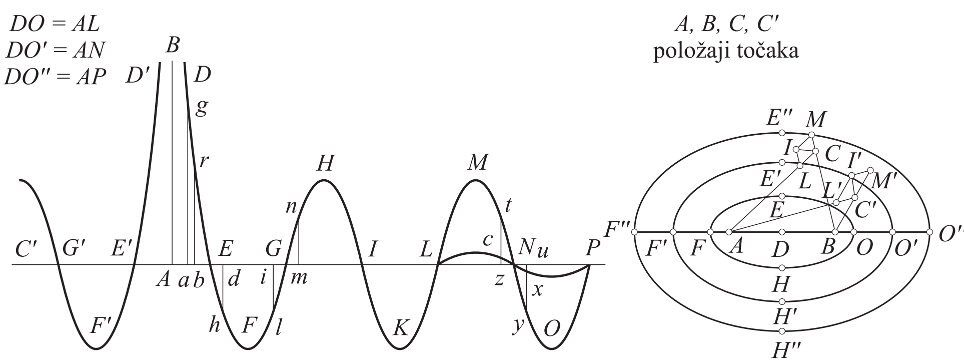
$$\nu = \frac{E_n - E_m}{h}$$

što je upravo Bohrov drugi postulat.

Može se pokazati da se bilo koje periodično gibanje u faznoj ravnini može prikazati krivuljama koje omeđuju neku određenu površinu. U klasičnoj mehanici moguće staze čine kontinuum i potpuno prekrivaju faznu ravninu, dok naprotiv, prema kvantnoj teoriji, moguća su samo ona gibanja za koja je fazna površina cjelobrojni višekratnik Planckove konstante, tj. nh [3].

Boškovićeva pretpostavka

U spomenutom glavnom djelu, ključna je Boškovićeva pretpostavka o sili koja vlada među jednostavnim, nedjeljivim, neprotežnim materijalnim točkama, a koje Bošković smatra centrima privlačno-odbojne sile. Tu silu Bošković opisuje svojom čuvenom krivuljom, a koja se po njemu naziva *Boškovićeva krivulja*. Ona je na slici 2a prikazana u koordinatnom sustavu u kojemu je udaljenost između točaka na osi apscisa, a sila, odnosno potencijal na osi ordinata. Vidimo da se veličina i smjer sile naizmjenično mijenja iz privlačne (negativna ordinata) u odbojnu (pozitivna ordinata) i obrnuto, ovisno o udaljenosti između točaka. Na beskonačno malim udaljenostima sila postaje odbojna i raste do beskonačnosti, što se danas može povezati s poznatim odbojnim potencijalom među nukleonima ("hard core") [4]. Kod velikih udaljenosti, naprotiv, prelazi u privlačnu silu koja se postupno smanjuje s povećanjem udaljenosti i u beskonačnosti se asimptotski približava osi apscisa (što se ovdje na slici ne vidi), što podsjeća na Newtonov zakon gravitacije.



a) *b)*

Slika 2. a) Boškovićeva krivulja koja prikazuje promjenjivi potencijal među materijalnim točkama, s naizmjeničnim odbojnim i privlačnim područjima.
b) Elipse pomoću kojih Bošković tumači međudjelovanja triju točaka.

Područja označena slovima D, H, $M \ldots$, gdje krivulja ima pozitivne vrijednosti jesu područja odbojne sile, dok su područja označena slovima F, K, $O \ldots$, gdje je krivulja negativna, područja privlačne sile. Ono što je zanimljivo jest to da Bošković ovu krivulju povezuje s elipsama na slici 2b, pomoću kojih opisuje međudjelovanje materijalnih točaka, pa ćemo se malo zadržati na njegovom kvalitativnom i geometrijskom tumačenju toga međudjelovanja. Naime, u odjeljku 235. njegove *Theoriae naturalis...* on piše (citat iz [1, 2]):

235. Sint enim in fig. 33 ellipsium $FEOH$, $F'E'O'H'$, $F''E''O''H''$ semiaxes DO, DO', DO'' aequales primus distantiae AL limitis non cohaesionis figurae I; secundus distantiae AN limitis cohaesionis; tertius distantiae AP limitis iterum non cohaesionis, et primo quidem collocetur C aliquanto ultra perimetrum mediam $F'E'O'H'$: erunt AC, BC majores, quam si essent in perimetro, adeoque in fig. I factis Au, Az majoribus, quam essent prius, decrescet repulsio zt, crescet attractio uy; ac proinde hic in parallelogrammo $LCMI$ erit attractio CL major, quam repulsio CM, et idcirco accedet directio diagonalis CI magis ad CL, quam ad CM, et inflectetur introrsum versus perimetrum mediam. Contra vero si C' sit intra perimetrum mediam, factis BC', AC' minoribus, quam si essent in perimetro media; crescet repulsio $C'M'$ et decrescet attractio $C'L'$, adeoque directio $C'I'$ accedet magis ad priorem $C'M'$, quam ad posteriorem $C'L'$ et vis dirigetur extrorsum versus eandem mediam perimetrum. Contrarium autem accideret ob rationem omnino similem in vicinia primae, vel tertiae perimetri: atque inde patet, quod fuerat propositum. (citat završen)

Prevedeno na hrvatski to znači [2]:

235. Neka su, naime, na slici 33 (tj. na slici 2b) poluosi DO, DO', DO'' elipsa $FEOH$, $F'E'O'H'$, $F''E''O''H''$ jednake, redom: prva udaljenosti AL granice nekohezije na slici I (tj. slici 2a); druga udaljenosti AN granice kohezije; treća udaljenosti AP ponovo granice nekohezije. Prije svega smjestimo točku C nešto iznad srednje elipse $F'E'O'H'$: udaljenosti AC i BC bit će veće nego kad bi bile na elipsi, tako da će na slici I udaljenosti Au, Az biti veće nego prije, te se smanjuje odbijanje zt, a povećava privlačenje uy; i stoga će ovdje u paralelogramu $LCMI$ privlačenje CL biti veće, nego odbijanje CM, i stoga će se dijagonala CI približiti više prema CL, nego prema CM, i zaokrenuti unutra prema srednjoj elipsi. S druge strane ako je C' unutar srednje elipse, BC', AC' će biti manje, nego što bi bile da su na srednjoj elipsi; povećava se odbijanje $C'M$, a smanjuje se privlačenje $C'L'$, tako da se dijagonala $C'I'$ više približava prema prvoj $C'M'$ nego prema posljednjoj $C'L'$ pa će sila biti usmjerena prema vani prema istoj srednjoj elipsi. Suprotno bi se, pak zbog sasvim sličnog razloga, dogodilo u blizini prve ili treće elipse: i odavle biva jasno ono što prije bijaše izloženo.

Ako pažljivo analiziramo ovaj tekst, koji povezuje Boškovićevu krivulju na slici 2a s elipsama na slici 2b, vidimo kako Bošković pomoću privlačnih i odbojnih sila koje djeluju na česticu, nastoji protumačiti kako će se ona gibati upravo po točno određenim elipsama. Ako se čestica nađe u područjima koja nisu na elipsama, npr. u točki C odnosno točki C' privlačno-odbojne sile će je uvijek ponovo prisiliti na gibanje po srednjoj elipsi. Dakle, ako je čestica u točki C na nju će djelovati privlačna sila, prema srednjoj elipsi, a ako je čestica u točki C' tada će na česticu djelovati odbojna sila opet u pravcu srednje elipse. Iz toga se može zaključiti da će čestica izvoditi periodično gibanje, odnosno čestica će oscilirati oko srednje elipse, što podsjeća na oscilacije međuatomskih udaljenosti u dvoatomnoj molekuli. Iako Bošković nigdje izrijekom ne spominje fazne krivulje harmonijskog oscilatora, njegove elipse podsjećaju upravo na sliku 1. Vratimo se opet na Boškovićevo tumačenje u gore navedenom odjeljku 235. koji povezuje krivulju prikazanu na slici 2a s elipsama na slici 2b. Na svojoj krivulji Bošković razlikuje dvije vrste karakterističnih točaka [5]. Tako npr. točku N (a tako i točke E i I) u kojoj odbojna sila prelazi u privlačnu, Bošković naziva *međom (granicom) kohezije*. Ta točka bi na slici 2b odgovarala točki O' koja se nalazi na srednjoj elipsi. Iz teksta proizlazi da će čestica koja se nađe u točki N, pa se malo odmakne prema točki P (tj. O'' na vanjskoj elipsi), vratit će se prema N jer se našla u području u kojemu je sila privlačna. Ako se pak iz N pomakne prema L (tj. O na unutarnjoj elipsi) opet se vraća prema N jer se našla u području odbojne sile. U oba slučaja, vraćajući se prema N čestica zbog ustrajnosti (inercije) prelazi na drugu stranu, pa tako nastaje titranje oko N. Točku L (a tako i točke G i P) Bošković naziva *međom nekohezije*. Ta točka bi na slici 2b odgovarala točki O koja se nalazi na unutarnjoj elipsi. Ako se, naime, čestica u L odmakne prema N (tj. O' na srednjoj elipsi) naći će se u području odbojne sile, pa će se udaljavati od L, a približavati točki N. Odmakne li se čestica iz L prema točki I, naći će se u području privlačne sile, pa će se opet udaljavati od L.

Pogledajmo još jedno mjesto gdje Bošković obrazlaže elipse kao staze po kojima se čestice gibaju (citat iz [1, 2]):

234. *Verum est adhuc alia quaedam analogia cum iis limitibus; si considerentur plures ellipses iisdem illis focis, quarum semiaxes ordine suo aequentur distantiis, in altera cujuspiame limitibus cohaesionis figurae I, in altera limitis non cohaesionis ipsi proximi, et ita porro alternatim, communis autem illa eccentricitas sit adhuc etiam minor quavis amplitudine arcuum interceptorum limitibus illis figurae I, ut nimirum singulae ellipsium perimetri habeant quaternos tantummodo limites in quatuor verticibus axium. Ipse ejusmodi perimetri totae erunt quidam veluti limites relate ad accessum et recessum a centro. Punctum collocatum in quavis perimetro habebit determinationem ad motum secundum directionem perimetri ejusdem; at collocatum inter binas perimetros diriget semper vim suam ita, ut tendat versus perimetrum definitam per limitem cohaesionis figurae I, et recedat a perimetro definita per limitem non cohaesionis; ac proinde punctum a perimetro primi generis dimotum conabitur ad illam redire; et dimotum a perimetro secundi generis, sponte illam adhuc magis fugiet, ac recedet.* (citat završen)

Prijevod na hrvatski [2]:

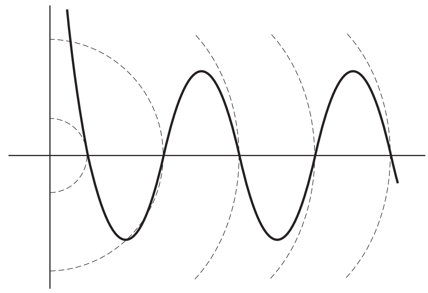
234. Ima, uistinu još jedna druga analogija s tim granicama. Ako uzmemo u razmatranje više elipsa s onim istim žarištima čije su poluosi, redom, jednake udaljenostima granica, dakle kod jedne elipse te poluosi odgovaraju bilo kojoj od granica kohezije na slici I, kod druge elipse granici nekohezije koja je onoj prvoj najbliža, i tako naizmjenično sve dalje i dalje, pa ako je zajednički ekscentricitet tih elipsa još manji od svake duljine lukova koji presjecaju ove granice na istoj slici, vidjet ćemo da će ***te elipse u cjelini biti kao neke granice s obzirom na približavanje ili udaljavanje od središta (misli se na središte djelovanja sile, op. prev). Točka koja se nalazi na bilo kojoj elipsi imat će neku sklonost da se giba u smjeru iste te elipse****; a točku koja se nalazi između dviju elipsa, sila će je usmjeriti da teži prema elipsi određenoj granicom kohezije na slici I, a da se udaljava od elipse određene granicom nekohezije; i stoga će se točka, koja je odmaknuta od elipse prve vrste, nastojati k njoj vratiti; a (točka koja je, op. prev.) odmaknuta od elipse druge vrste, spontano će još više bježati i udaljavati se od nje.*

Obratimo pažnju na gore navedenu Boškovićevu pretpostavku (tekst otisnut masnim slovima) da je gibanje čestice moguće samo po elipsama, a ne i između njih: Bošković ovdje kao da naslućuje prije spomenut Planckov kvantni uvjet, odnosno prvi Bohrov postulat, dakle da se atom može nalaziti u jednom od mogućih stabilnih tzv. stacionarnih stanja određene energije E_n, i dok je u tim stanjima, niti zrači niti apsorbira energiju. Na slici 3, na Boškovićevoj krivulji crtkanim linijama označena su takva stabilna stanja [4]. Primijetimo da se ta stanja nalaze na prije spomenutim granicama kohezije i nekohezije, jer u tim točkama ne djeluje niti privlačna niti odbojna sila, pa je ukupna sila na česticu jednaka nuli. Također uočavamo da su ta stanja ekvidistantna, tj. da se nalaze na međusobno jednakim udaljenostima. Osim u staroj kvantnoj teoriji, i u strogom kvantnomehaničkom formalizmu, koristi se model harmonijskog oscilatora čija energija može poprimiti samo vrijednosti [3]:

$$E_n = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ta jednadžba označava niz stabilnih (stacionarnih) stanja kvantnog harmonijskog oscilatora s jednako razmaknutim (ekvidistantnim) energijama. Ovdje slovo ν označava frekvenciju harmonijskog titranja čestice mase m s potencijalnom energijom koja ovisi o položaju. Prilikom prijelaza između susjednih stanja emitira se ili apsorbira kvant energije $E = h\nu$. Razlika u odnosu na Bohrov model je u tome što je najniža vrijednost energije kvantnog oscilatora (tzv. osnovno stanje) različita od nule, tj.

$$E_0 = \frac{1}{2}h\nu.$$



Slika 3. Pune linije pokazuju Boškovićev promjenjivi potencijal. Crtkane linije su stabilna stanja.

To osnovno stanje kvantnog oscilatora odgovaralo bi prvoj točki kohezije (točki E) na Boškovićevoj krivulji, što je na slici 3 označeno najmanjom crtkanom kružnicom, koja se nalazi najbliže izvoru sile (koji je u ishodištu koordinatnog sustava).

Zaključak

Možemo se pitati što je navelo Boškovića da u svojoj teoriji kao putanje po kojima će se čestica gibati pretpostavi upravo elipse. Naime, u njegovo vrijeme nije bilo ni uređaja, niti su se izvodili pokusi kojima bi se istraživala tvar na razini atoma. Moguće je da je on, pod utjecajem Newtona, čiju je teoriju gravitacije sigurno dobro poznavao i pristajao uz nju, smatrao da se materijalne čestice gibaju kao i planeti – po elipsama. Iako stroga kvantna mehanika ne poznaje pojam putanje po kojoj se čestica giba, Sommerfeld je poopćio Bohrov model atoma tako što je kao putanje po kojima se gibaju elektroni oko jezgre atoma uveo upravo elipse. Iz toga bi se dalo zaključiti da su Boškovićeve elipse određena slutnja Bohr-Somerfeldova modela atoma, a moguće, kao što piše u naslovu ovog članka, i modela atoma kao kvantnomehaničkoga oscilatora.

Literatura

[1] Josip Ruđer Bošković, *Theoria philosophiae naturalis: A theory of natural philosophy*; latin-english edition: from the text of the first, venetian edition (1763.), Chicago; London: Open Court Publishing Company, 1922.

[2] Josip Ruđer Bošković, *Teorija prirodne filozofije*, latinsko-hrvatsko izdanje, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1974.

[3] Ivan Supek, *Teorijska fizika i struktura materije*, 2. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[4] Dubravko Tadić, *Boškovićeve hipoteze i suvremene predodžbe o građi tvari*, Hrvatski znanstveni zbornik, tečaj 2, br. 1, Matica hrvatska, Zagreb, 1993.

[5] Žarko Dadić, *Ruđer Bošković*, Školska knjiga, Zagreb, 1998.

[6] Vladimir Paar, *Fizika kaosa – nova revolucija u znanosti*, Matematičko-fizički list, 42 (1991./ 1992.), 1–2 (168).