MATEMATIKA

Fraktalna dimenzija hrvatske obale iznosi 1.168!

Antonio Matošević[1]

Uvod

Benoît Mandelbrot, poznat i kao "otac fraktala", objavio je 1967. godine u časopisu Science članak naziva *How Long is The Coast of Britain?* istražujući u njemu samosličnost i fraktalna svojstva morske obale.

Logično je zapitati se zašto bi se obala uopće mogla smatrati fraktalom. Naime, najčešća su svojstva na kojima se temelje usporedbe obala njihove duljine i razvedenosti. No uvidom u službene izvore o duljinama obala već nailazimo na nedosljednosti. Tako na primjer World Resources Institute navodi iznos od 5664 km kao duljinu hrvatske obale s otocima, dok za istu tu obalu Državni zavod za statistiku predlaže 6278 km. Budući da je očita poprilična razlika u tim duljinama, postavlja se pitanje kako je moguće da su dva mjerodavna izvora istu obalu izmjerila sasvim drugačije. Odgovor je dao upravo Benoît Mandelbrot u svom članku. Iako naizgled jednostavno pitanje, u sebi zapravo krije temelje samosličnosti i fraktalne geometrije.

Objašnjenje fenomena[2]

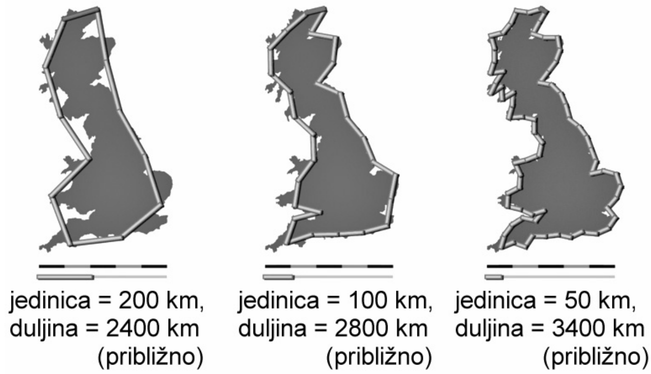
Na slici 1 je očito da se promjenom duljine "mjernog štapa" mijenja i duljina britanske obale. Uzevši dulje mjerne štapove kao na prvoj slici slijeva, očito je da ih ne možemo oko otoka posložiti tako da savršeno pratimo obris obale pa je duljina iste

---

[1] Autor je učenik 4. razreda XV. gimnazije u Zagrebu, e-pošta: `toni_matosevic@hotmail.com`

[2] `http://positive-perception.com/wp-content/uploads/2014/06/coastline.png`

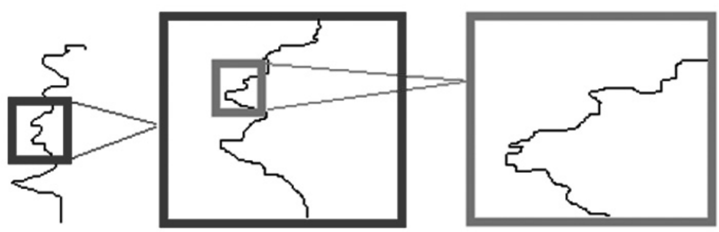
prilično neprecizna. Na srednjoj, a posebice na prvoj slici zdesna tako posloženi mjerni štapovi čine krivulju otprilike sličnu britanskoj obali, a time je i njena duljina preciznija. Dakle, što je mjerni štap manji, više nepravilnosti obale možemo slijediti te će se duljina obale povećavati.



Slika 1. Ovisnost duljine britanske obale o duljini mjernog štapa.

Duljina obale ovisi o duljini mjernog štapa

No ako je duljina mjernog štapa vrlo mala, izmjerena duljina obale može biti po volji velika. Taj fenomen naziva se *obalni paradoks* i prvi ga je predstavio engleski matematičar Lewis Fry Richardson.



Slika 2. Prikaz fraktalnosti obale.

Da posložimo veliki broj mjernih štapova, omogućila nam je to nepravilnost obale, stoga možemo reći da ona posjeduje svojstvo samosličnosti kao što se sa slike može vidjeti. Naravno, to nije savršena samosličnost kao što je to slučaj u nekih fraktala poput Kochove krivulje, nego je ona približna, tj. tzv. *Brownova* ili *statistička samosličnost*.

Fraktalna dimenzija

Na početku su spomenuta dva najčešća kriterija uspoređivanja obala, tj. duljina i razvedenost. Kako smo zaključili da je duljina obale neprecizna jer ovisi o duljini štapa kojim mjerimo, prema tom kriteriju očito ih ne možemo uspoređivati. Stoga ćemo se koristiti drugim navedenim kriterijem, tj. kriterijem razvedenosti.

Budući da obalu možemo smatrati fraktalom, možemo joj pripisati i sva svojstva fraktala, pa tako i fraktalnu dimenziju. Fraktalna dimenzija pokazatelj je kompleksnosti fraktala, u ovom slučaju obale, pa je lako zaključiti da je obala s većom fraktalnom dimenzijom kompleksnija, tj. razvedenija.

Fraktalna se dimenzija može odrediti pomoću više metoda, a navest ćemo dvije važne za naš konkretni slučaj.

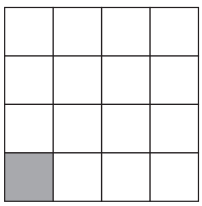
Metoda sličnosti

Ova se metoda koristi za određivanje fraktalne dimenzije kod potpuno samosličnih fraktala kao što su Kochova krivulja i Sierpinskijev trokut, a može se koristiti i za primjer određivanja dimenzije kvadrata i dimenzije kocke.

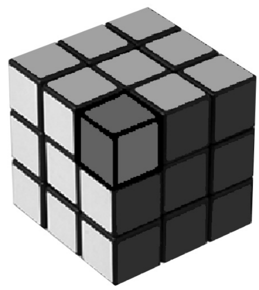
U slučaju kvadrata, podijelili smo njegove stranice na četvrtine i dobili 16 malih kvadrata:

$$4^2 = 16 \tag{1}$$

$$\log_4 16 = 2. \tag{2}$$



Slika 3.



Slika 4.

Podijelili smo bridove kocke na trećine i dobili 27 malih kocaka:

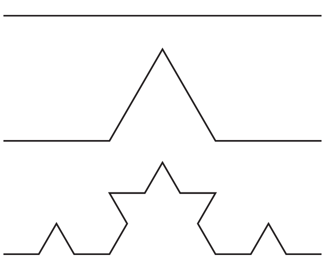
$$3^3 = 27 \tag{3}$$

$$\log_3 27 = 3. \tag{4}$$

(Slično svojstvo vrijedi ako stranicu kvadrata podijelimo na koliko god veliki broj jednakih dijelova. Također i za kocku.)

Možemo uočiti da su eksponenti u izrazima (1) i (3), odnosno rezultati logaritamskih vrijednosti u jednakostima (2) i (4) zapravo dimenzije kvadrata i kocke koje smo promatrali, što je i prilično intuitivno.

Istu metodu možemo primijeniti na samoslične fraktale, npr., na Kochovu krivulju:



Slika 5.
Prva iteracija Kochove krivulje.

Početnu dužinu podijelili smo na 3 jednaka dijela. Zatim nad srednjim dijelom konstruiramo krakove jednakostraničnog trokuta. Novi lik sastoji se od 4 dijela, svaki duljine jednake trećini duljine polazne dužine. U trećem koraku ponavljamo istu konstrukciju nad svakim od ta četiri intervala. I tako dalje nastavljamo u beskonačnost. Fraktalna dimenzija Kochove krivulje je:

$$\log_3 4 \approx 1.262.$$

Iako je Kochova krivulja sastavljena samo od dužina, očekivana bi dimenzija bila 1, no fraktalna dimenzija isključivo je veća od topološke, što se vidi i iz primjera. Dakle, Kochova je krivulja oblik između pravca i ravnine.

Geometrijska metoda

Kako morska obala nije potpuno samosličan fraktal, ne možemo primijeniti metodu sličnosti za određivanje njezine fraktalne dimenzije. Umjesto nje koristit ćemo geometrijsku metodu kojoj je temelje postavio već spomenuti Lewis Fry Richardson.

On je osmislio izraz koji iskazuje ovisnost duljine obale o duljini mjernog štapa:

$$L = CM^{1-D},$$

gdje je L duljina obale, C konstanta, M duljina mjernog štapa i D fraktalna dimenzija.

Kako želimo dobiti izraz za fraktalnu dimenziju (D), uzet ćemo izraze za dvije različite duljine obale te pomoću njih dobiti traženi izraz. Imamo:

$$L_1 = CM_1^{1-D} \tag{5}$$

$$L_2 = CM_2^{1-D} \tag{6}$$

Podijelimo jednadžbu (6) s jednadžbom (5) i logaritmiramo dobivenu jednakost:

$$\log \frac{L_2}{L_1} = \log\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{1-D}.$$

Slijedeći logaritamska pravila, jednakost možemo napisati i kao:

$$\log \frac{L_2}{L_1} = (1-D)\log \frac{M_2}{M_1}.$$

Podijelimo zatim jednakost s $\log\left(\frac{M_2}{M_1}\right)$ i raspišimo dobiveni izraz:

$$1 - D = \frac{\log \frac{L_2}{L_1}}{\log \frac{M_2}{M_1}} = \frac{\log L_2 - \log L_1}{\log M_2 - \log M_1}.$$

Možemo uočiti da je desni dio jednakosti zapravo koeficijent smjera pravca (označimo ga s β) u grafu s koordinatnim osima $\log L$ (os ordinata) i $\log M$ (os apscisa). Primijetimo da većoj vrijednosti M (duljina mjernog štapa) odgovara manji L (duljina obale) pa je zato β negativan.

Iz toga slijedi

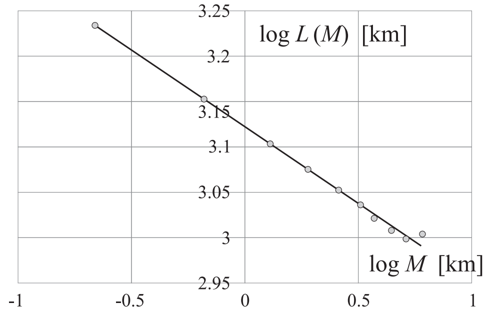
$$D = 1 - \beta.$$

Dakle je, općenito $D \geqslant 1$, točnije $1 \leqslant D \leqslant 2$.

Tako smo dobili izraz za fraktalnu dimenziju obale. Pomoću digitalnih geografskih karata Hrvatske (bez otoka) i Cipra te računalnog programa Java izmjerili smo po deset duljina obale u ovisnosti o duljini mjernog štapa za obje države. Podatke smo kao točke uređenih parova $(\log M,\ \log L(M))$ ucrtali u koordinatni sustav, izračunali koeficijente smjerova pravaca te dobili fraktalne dimenzije tih obala.

Fraktalna dimenzija hrvatske obale bez otoka

N	$L(M)$ [km]	M [km]
1	1041	387
2	1130	258
3	1267	129
4	1427	0.65
5	1706	0.22

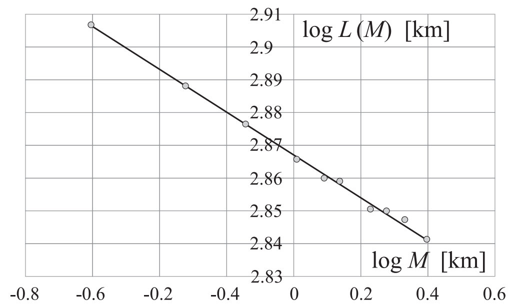


$$y = -0.168x + 3.121$$

Koeficijent smjera pravca iznosi -0.168 pa iz izraza $D = 1 - \beta$ dobivamo da je fraktalna dimenzija hrvatske obale bez otoka jednaka 1.168.

Fraktalna dimenzija ciparske obale

N	$L(M)$ [km]	M [km]
1	697	249
2	707	199
3	721	148
4	734	103
5	751	0.73



$$y = -0.063x + 2.868$$

Koeficijent smjera pravca iznosi -0.063 pa iz izraza $D = 1 - \beta$ dobivamo da je fraktalna dimenzija ciparske obale jednaka 1.063.

Budući da je fraktalna dimenzija hrvatske obale bez otoka veća od fraktalne dimenzije ciparske obale, zaključujemo da je hrvatska obala bez otoka razvedenija.

Literatura

[1] J. Gleick, *Chaos: Making a New Science*, Penguin Books, New York (1988).

[2] B. Mandelbrot, *How Long Is the Coast of Britain?*, Ch. 5 in The Fractal Geometry in Nature, W. H. Freeman, New York, (1983).

[3] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations And Applications*, John Wiley and Sons, New York, (2003).