ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2015. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/ 260.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 144.

A) Zadaci iz matematike

3441. Odredi sve trojke cijelih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju jednadžbu

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 \,.$$

3442. Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$a^3 b + b^3 c + c^3 a \geq abc(a + b + c) \,.$$

3443. Neka su a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 pozitivni brojevi takvi da je $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$. Dokaži nejednakost

$$\prod_{i=1}^{5} \left(\frac{1}{a_i} - 1 \right) \geq 1024 \,.$$

3444. Ako je

$$xy + x + y = 71$$
$$x^2 y + xy^2 = 880$$

odredi $x^2 + y^2$.

3445. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$\frac{9}{11 + \log x} + \frac{2}{7 - \log x} = \frac{13}{12} \,.$$

3446. Duljine paralelnih stranica trapeza su a i b. Odredi duljinu dužine paralelne s bazama trapeza koja ga dijeli na dva dijela jednakih površina.

3447. Povučena je simetrala AD jednakokračnog trokuta ABC ($|AB| = |BC|$). Odredi duljinu stranice $\overline{AC}$ ako je $P_{ABD} = S_1$ i $P_{ADC} = S_2$.

3448. U šiljastokutnom trokutu ABC, $\overline{AD}$ i $\overline{CM}$ su njegove visine, opseg trokuta ABC je 15 cm, opseg trokuta MBD je 9 cm i polumjer opisane kružnice trokuta MBD je 1.8 cm. Izračunaj duljinu stranice $\overline{AC}$.

3449. U kružni isječak AOB kruga polumjera R sa središnjim kutom α upisan je jednakostraničan trokut kojemu je jedan vrh u polovištu luka $\overset{\frown}{AB}$, a preostala dva su na polumjerima $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$. Kolika je duljina stranice trokuta?

3450. Dan je trokut ABC kod kojeg je $|AC| : |BC| = 1 : 3$ i $\sphericalangle ACB = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Točka D je polovište stranice $\overline{AC}$. Nađi omjer površine kruga opisanog trokutu BCD i površine kruga upisanog trokutu ABD.

3451. Dokaži da za $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{\cos^6 x} + \frac{1}{\sin^6 x} + \frac{1}{\cos^6 x \sin^6 x} \geq 80 \,.$$

3452. Dan je jednakokračan trokut ABC, $|CA| = |CB|$. Točka D je polovište stranice $\overline{AB}$ i dužina $\overline{DE}$ je okomita na $\overline{BC}$. Točka H je polovište dužine $\overline{DE}$. Dokaži da je $CH \perp AE$.

3453. Kvadrat je upisan u kružnicu polumjera r. Dokaži da je suma četvrtih potencija udaljenosti proizvoljne točke na kružnici do vrhova kvadrata konstantan.

3454. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i α, β, γ nasuprotni im kutovi, dokaži da vrijedi

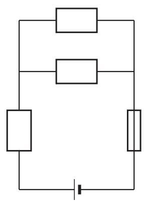
$$\begin{aligned} &a^2 \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha \\ &\quad = b^2 \cos^2 \beta \cos^2 2\beta + c^2 \cos^2 \gamma \cos^2 2\gamma \\ &\qquad + 2bc \cos \beta \cos \gamma \cos 2\beta \cos 2\gamma \cos 4\alpha \,. \end{aligned}$$

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 382. Učenik je želio izračunati korisnost električnog bojlera koji ima termometar koji točno pokazuje temperaturu vode u njemu. Zabilježio da je temperatura prije uključivanja iznosila $25\,^\circ\mathrm{C}$. Nakon jednog sata povisila se je na $55\,^\circ\mathrm{C}$. Snaga bojlera je 2500 W, u njemu je 60 l vode, a specifični toplinski kapacitet vode iznosi 4200 J/kgK. Kolika je korisnost bojlera? Kolika struja teče kroz njega? Napon gradske električne mreže je 230 V.

OŠ – 383. Drveni valjak ima promjer 10 cm. Postavljen u uspravan položaj tlači podlogu tlakom od 1600 Pa. Kolika mu je visina? Gustoća drva od kojeg je valjak napravljen iznosi 800 kg/m^3.

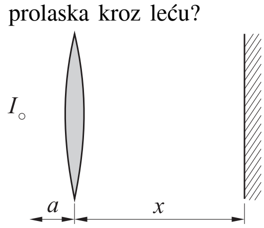
OŠ – 384. Osigurač u strujnom krugu na shemi može izdržati struju do 1 A. Napon izvora je 30 V, a otpori paralelno spojenih otpornika iznose 20 i $30\ \Omega$. Koju najmanju vrijednost mora imati otpor trećeg otpornika da osigurač ne bi pregorio?



OŠ – 385. Učenik je aluminijski valjak objesio na oprugu konstante elastičnosti 16 N/m i ona se produljila za 25 cm. U posudi površine dna 80 cm^2 je razina vode udaljena od vrha posude 2 cm. Hoće li se voda preliti ako valjak uronimo u posudu? Gustoća aluminija je 2700 kg/m^3.

1574. U nekom trenutku tijelo se giba uzbrdo po kosini brzinom 1 m/s. Nakon zaustavljanja i pokretanja niz kosinu, tijelo ponovo prijeđe isti položaj nakon 1.5 s, brzinom 0.5 m/s (suprotnog smjera). Odredi prevaljeni put, nagib kosine i koeficijent trenja tijela i kosine.

1575. Točkasti izvor svjetlosti, konvergentna leća i ravno zrcalo poredani su kao na slici. Ako je udaljenost izvora od leće $a = 2$ cm, a jačina leće $J = 10$ dpt, koliki mora biti razmak x leće i zrcala da bi od svjetlosti iz izvora dobili paralelan snop nakon refleksije i ponovnog prolaska kroz leću?

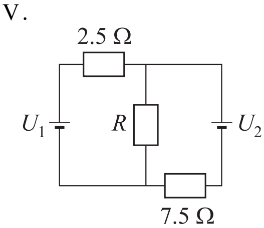


1576. Koristeći izraz za moment tromosti kugle, odredi moment tromosti šuplje aluminijske kugle mase 2 kg, vanjskog radijusa 10 cm. Kolika je debljina aluminija? Gustoća aluminija je 2700 kg/m^3.

1577. U prvom mjerenju gravitacijske konstante G (Cavendish, 1798) upotrijebljene su olovne kugle mase 158 kg. Koristeći konstantu G izračunaj ubrzanje na površini te kugle zbog njenog gravitacijskog polja. Gustoća olova je $11\,300 \text{ kg/m}^3$, a G iznosi $6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

1578. Na kojoj bi se udaljenosti iza Mjeseca morao nalaziti opažač kojemu bi prividne veličine Mjeseca i Zemlje bile jednake? Upotrijebi srednje vrijednosti za radijus Zemlje (6371 km), Mjeseca (1738 km) i udaljenosti Zemlja-Mjesec (384 400 km).

1579. Koliki je otpor R u strujnom krugu na shemi, ako njime teče struja 2 A? $U_1 = 9$ V, $U_2 = 12$ V.



1580. Koliko puta više Sunčeve svjetlosti padne na površinu Jupitera nego na površinu Zemlje? Jupiter je prosječno 5.2 puta udaljeniji od Sunca, i prosječan radijus mu iznosi 69 200 km (za Zemlju uzeti 6371 km).

C) Rješenja iz matematike

3414. *Nađi sva realna rješenja sustava jednadžbi*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 9$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right) = 18.$$

Uputa. Koristi identitet

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a).$$

Rješenje. Ako zamijenimo u pomoćnom identitetu: $a = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $b = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$, $c = 1$, dobivamo

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}} + 1\right)^3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 1 + 3 \cdot 18$$
$$= 9 + 1 + 54 = 64 = 4^3$$

tj.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = 3. \tag{1}$$

Uvrštavanjem (1) u drugu jednadžbu iz teksta zadatka slijedi

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = 2. \qquad (2)$$

(1) i (2) daju sustav: $a+b=3$, $ab=2$ koji ima rješenja $(a,b) \in \{(1,2),(2,1)\}$ tj. rješenje početnog sustava je

$$(x,y) \in \left\{ \left(1, \frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{8}, 1\right) \right\}.$$

Zlatko Petolas (2),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3415. *Riješi sustav jednadžbi*

$$x+y+z=2 \qquad (1)$$

$$x^2-y^2-z^2=2 \qquad (2)$$

$$x-3y^2+z=0. \qquad (3)$$

Rješenje. Iz (3) i (1) dobivamo

$$3y^2 = x+z = 2-y,$$

$$3y^2+y-2=0,$$

$$y_1 = \frac{2}{3}, \quad y_2 = -1.$$

Sada imamo:

1)
$$y_1 = \frac{2}{3} \implies x+z = \frac{4}{3}$$

$$x^2-z^2 = (x+z)(x-z) = \frac{22}{9}$$

$$x-z = \frac{11}{6}$$

$$x = \frac{19}{12}, \quad z = -\frac{1}{4}.$$

2)
$$y_1 = -1 \implies x+z=3$$

$$x^2-z^2=3$$

$$x-z=1$$

$$x=2, \quad z=1.$$

Provjerom se lako utvrdi da su to rješenja.

Petar Orlić (3),
XV. gimnazija, Zagreb

3416. *Dokaži da za svaki prirodan broj n jednadžba $x^2+y^2=z^n$ ima pozitivno cjelobrojno rješenje.*

Prvo rješenje. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po $n \in \mathbf{N}$: pokazujemo da za svaki prirodni broj n postoji uređena trojka $(x,y,z) \in \mathbf{N}^3$ takva da je $x^2+y^2=z^n$.

Baza indukcije. Za $n=1$ tvrdnja vrijedi jer npr. $(1,1,2)$ je tražena trojka.

Za $n=2$ je npr. $(3,4,5)$ tražena trojka.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da za dani $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 2$, postoji trojka $(x,y,z) \in \mathbf{N}^3$ takva da je $x^2+y^2=z^n$, za sve $n \leq k$.

Korak indukcije. Prema pretpostavci indukcije postoji trojka $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbf{N}^3$ takva da je $x_0^2+y_0^2=z_0^{k-1}$.

Tada je za $n=k+1$

$$z_0^{k+1} = z_0^{k-1}z_0^2 = \left(x_0^2+y_0^2\right)z_0^2$$
$$= (x_0z_0)^2+(y_0z_0)^2,$$

tj. trojka $(x_0z_0, y_0z_0, z_0) \in \mathbf{N}^3$ je jedno rješenje jednadžbe $x^2+y^2=z^{k+1}$.

Time je pokazan i korak indukcije.

Zlatko Petolas (2), Zagreb

Drugo rješenje.

1) Za $\forall k \geqslant 1$, $n=2k-1$ imamo

$$x = 1 \cdot 5^{k-1}, \quad y = 2 \cdot 5^{k-1}$$

tj.

$$x^2+y^2 = (1^2+2^2)\cdot 5^{2k-2} = 5^{2k-1} = 5^n$$

pa je $(5^{k-1}, 2\cdot 5^{k-1}, 5)$ jedno rješenje.

2) Za $\forall k \geqslant 1$, $n=2k$ imamo

$$x = 3 \cdot 5^{k-1}, \quad y = 4 \cdot 5^{k-1}$$

tj.

$$x^2+y^2 = (3^2+4^2)\cdot 5^{2k-2} = 5^{2k} = 5^n$$

pa je $(3\cdot 5^{k-1}, 4\cdot 5^{k-1}, 5)$ jedno rješenje.

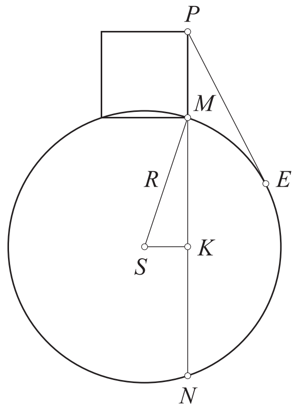
Petar Orlić (3), Zagreb

3417. *Kružnica polumjera R prolazi kroz dva susjedna vrha kvadrata. Duljina tangente na kružnicu iz trećeg vrha kvadrata je dvaput dulja od njegove duljine stranice. Kolika je duljina stranice kvadrata?*

Rješenje. Označimo duljinu stranice kvadrata s a. Koristimo potenciju točke P s obzirom na kružnicu, sa slike dobivamo:

$$|PE|^2 = |PM||PN|,$$

tj. $(2a)^2 = a\cdot(a+x)$, gdje je $x=|MN|$. Slijedi, $x=3a$.



Iz pravokutnog trokuta SKM slijedi:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=R^2$$

odakle dobivamo $a=R\sqrt{\frac{2}{5}}$.

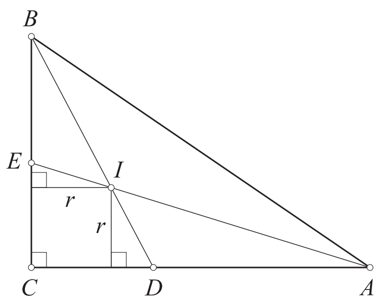
Zlatko Petolas (2), Zagreb

3418. *Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom uz vrh C. Označimo s $k(I,r)$ njemu upisanu kružnicu. Neka je D presjek pravaca BI i AC, a E je presjek od AI i BC. Površina trokuta AID je p, a površina trokuta BIE je q. Dokaži da je*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{r^2}.$$

Prvo rješenje. Kako su BD i AE simetrale kutova ABC i CAB imamo

$$|AD|=\frac{bc}{a+c},\quad |BE|=\frac{ac}{b+c}.$$



Sada je

$$P_{AID}=\frac{bc}{a+c}\cdot\frac{r}{2},\quad P_{BIE}=\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{r}{2},$$

tj.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\left(\frac{a+c}{bc}+\frac{b+c}{ac}\right)\cdot\frac{2}{r}$$
$$=\frac{a^2+ac+b^2+bc}{abc}\cdot\frac{2}{r}$$
$$=\frac{c^2+ac+bc}{abc}\cdot\frac{2}{r}=\frac{a+b+c}{ab}\cdot\frac{2}{r}.$$

Iz formula za površinu pravokutnog trokuta,

$$P=\frac{a+b+c}{2}r=\frac{ab}{2}$$

dobivamo

$$r=\frac{ab}{a+b+c}.$$

Odavde je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{r^2}$.

Petar Orlić (3), Zagreb

Drugo rješenje. Koristit ćemo sljedeće dvije relacije:

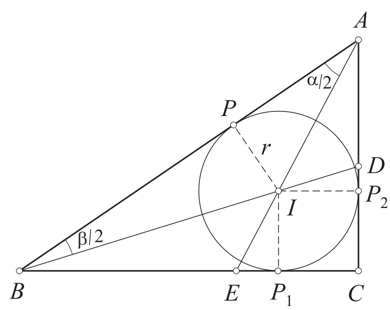
$$cr=ab-ar-br, \qquad (*)$$

$$c=a+b-2r. \qquad (**)$$

Zaista, iz jednakosti

$$\frac{ab}{2}=\frac{r(a+b+c)}{2}$$

imamo $(*)$, a iz $c=|BP|+|PA|=|BP_1|+|AP_2|=a-r+b-r$ $(**)$.



Nadalje, iz $p=\frac{r|DA|}{2}$ i $q=\frac{r|BE|}{2}$ dobivamo

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{r}\left(\frac{1}{|DA|}+\frac{1}{|BE|}\right). \qquad (1)$$

Zbog

$$|DA|=b-a\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=b-a\cdot\frac{r}{a-r}$$
$$=\frac{ab-ar-br}{a-r}\overset{(*)}{=}\frac{cr}{a-r},$$

$$|BE| = a - b\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = a - b\cdot\frac{r}{b-r}$$
$$= \frac{ab-ar-br}{b-r} \overset{(*)}{=} \frac{cr}{b-r}.$$

Sada (1) postaje

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{2}{r}\cdot\frac{a+b-2r}{cr} \overset{(**)}{=} \frac{2}{r^2}.$$

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3419. *Nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ s vanjske strane šiljastokutnog trokuta ABC nacrtani su slični pravokutnici $ACMN$ i $BCPQ$. Dokaži da se pravci BN i AQ sijeku na visini iz C trokuta ABC.*

Rješenje.

$$A(0,0),\ B(c,0),\ C(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$$
$$|AN| = d,\quad |BQ| = \frac{ad}{b},$$
$$N(-d\sin\alpha, d\cos\alpha),$$
$$Q\left(c+\frac{ad}{b}\sin\beta, \frac{ad}{b}\cos\beta\right)$$

$$\frac{d'}{d} = \frac{a}{b} \implies d' = \frac{ad}{b}$$
$$AQ\ldots y = \frac{ad\cos\beta}{bc+ad\sin\beta}x$$
$$BN\ldots \frac{y-y_B}{x-x_B} = \frac{y_N-y_B}{x_N-x_B}$$
$$\frac{y-0}{x-c} = \frac{d\cos\alpha - 0}{-d\sin\alpha - c}$$
$$y = \frac{-d\cos\alpha}{d\sin\alpha + c}(x-c),$$
$$\frac{ad\cos\beta}{bc+ad\sin\beta}x = \frac{-d\cos\alpha}{d\sin\alpha+c}(x-c)$$
$$[ad\cos\beta(d\sin\alpha+c)+d\cos\alpha(bc+ad\sin\beta)]x$$
$$= cd\cos\alpha(bc+ad\sin\beta),$$
$$x = \frac{bc^2\cos\alpha+acd\cos\alpha\sin\beta}{ad\sin\alpha\cos\beta+ac\cos\beta+bc\cos\alpha+ad\cos\alpha\sin\beta}$$
$$x = \frac{bc^2\cos\alpha+acd\cos\alpha\sin\beta}{ad(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+c(a\cos\beta+b\cos\alpha)}.$$

Sada je

$$x = \frac{bc^2\cos\alpha+acd\cos\alpha\sin\beta}{ad\sin(\alpha+\beta)+c\cdot c} = b\cos\alpha$$
$$\iff bc^2\cos\alpha + acd\cos\alpha\sin\beta$$
$$= abd\sin\gamma\cos\alpha + bc^2\cos\alpha$$
$$c\cos\alpha\sin\beta = b\sin\gamma\cos\alpha$$

tj.

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

što je istinito.

Ur.

3420. *Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i α, β, γ nasuprotni im kutovi, dokaži* $c^2 = a^2\cos 2\beta + b^2\cos 2\alpha + 2ab\cos(\alpha-\beta)$.

Prvo rješenje.

$$a^2\cos 2\beta + b^2\cos 2\alpha + 2ab\cos(\alpha-\beta)$$
$$= a^2(1-2\sin^2\beta) + b^2(1-2\sin^2\alpha)$$
$$+ 2ab[\cos(\alpha+\beta) + 4\sin\alpha\sin\beta]$$
$$= a^2+b^2+2ab\cos(180^\circ - \gamma)$$
$$- 2(a\sin\beta - b\sin\alpha)^2$$
$$= a^2+b^2-2ab\cos\gamma = c^2$$

jer je $a\sin\beta = b\sin\alpha$ po poučku o sinusima.

Zlatko Petolas (2), Zagreb

Drugo rješenje. Adicijska formula za kosinus:

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Tvrdnja je ekvivalentna za:

$$c^2 = a^2\cos^2\beta - a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha$$
$$+2ab\cos\alpha\cos\beta + 2ab\sin\alpha\sin\beta$$
$$= (a\cos\beta + b\cos\alpha)^2 - (a\sin\beta - b\sin\alpha)^2.$$

Zbog poučka o sinusima vrijedi $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ tj. $a\sin\beta - b\sin\alpha = 0$.

Dakle, još preostaje dokazati

$$c^2 = (a\cos\beta + b\cos\alpha)^2.$$

No, $a\cos\beta + b\cos\alpha$

$$= \frac{a^2+c^2-b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} = c$$

zbog kosinusovog poučka i tvrdnja je dokazana.

Petar Orlić (3), Zagreb

3421. *Dokaži da za svaki cijeli broj* $n \geq 0$ *i za svaki* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{\cos^{2n} x} + \frac{1}{\sin^{2n} x} \geq 2^{n+1}.$$

Rješenje. Krećemo od očigledne nejednakosti:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Stavimo li $a = \frac{1}{\cos^n x}$, $b = \frac{1}{\sin^n x}$ dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^{2n} x} + \frac{1}{\sin^{2n} x} &\geq 2 \cdot \frac{1}{\cos^n x \sin^n x} \\ &= 2 \cdot \frac{2^n}{\sin^n(2x)} \geq 2^{n+1},\end{aligned}$$

jer za $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ vrijedi $0 < \sin(2x) \leq 1$.

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3422. *Neka su* $a, b, c, d \in [0, \pi]$ *tako da vrijedi*

$$2\cos a + 6\cos b + 7\cos c + 9\cos d = 0$$

$$2\sin a - 6\sin b + 7\sin c - 9\sin d = 0.$$

Dokaži jednakost

$$3\cos(a+d) = 7\cos(b+c).$$

Rješenje. Iz zadanih jednakosti, prebacivanjem s lijeve na desnu stranu dobivamo

$$2\cos a + 9\cos d = -6\cos b - 7\cos c \qquad (1)$$

$$2\sin a - 9\sin d = 6\sin b - 7\sin c. \qquad (2)$$

Kvadriranjem i zbrajanjem (1) i (2), te grupiranjem, imamo

$$\begin{aligned}85 &+ 36(\cos a\cos d - \sin a\sin d) \\ &= 85 + 84(\cos b\cos c - \sin b\sin c)\end{aligned}$$

odakle kraćenjem i korištenjem adicijske formule za kosinus slijedi dana jednakost.

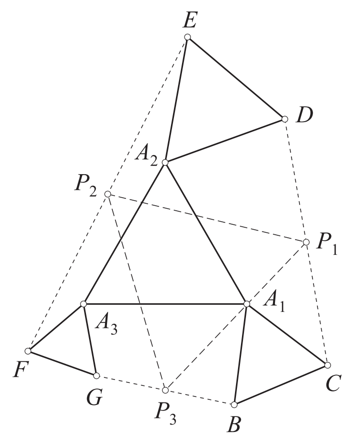
Sara Džebo (3), Peta gimnazija, Sarajevo, BiH

3423. *Dani su jednakostranični trokuti* $A_1A_2A_3$, A_1BC, A_2DE *i* A_3FG *iste orijentacije. Dokaži da su polovišta dužina* $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ *i* $\overline{BG}$ *vrhovi jednakostraničnog trokuta.*

Rješenje. Trokut A_1BC je dobiven rotacijom trokuta $A_1A_2A_3$ oko vrha A_1 i stranice su mu skalirane za nekakav faktor. Slično vrijedi za trokute A_2DE, A_3FG. Postavimo zato vrhove trokuta $A_1A_2A_3$ u kompleksnu ravninu te neka im odgovaraju kompleksni brojevi z_1, z_2, z_3 redom. Neka su φ_1, φ_2, $\varphi_3 \in [0, 2\pi)$ i a_1, a_2, $a_3 \in \mathbf{R}_+$ proizvoljni. Tada za vrhove B, C, D, E, F, G vrijedi

$$\begin{aligned}z_B &= a_1(z_2 - z_1)e^{i\varphi_1} + z_1 \\ z_C &= a_1(z_3 - z_1)e^{i\varphi_1} + z_1 \\ z_D &= a_2(z_3 - z_2)e^{i\varphi_2} + z_2 \\ z_E &= a_2(z_1 - z_2)e^{i\varphi_2} + z_2 \\ z_F &= a_3(z_1 - z_3)e^{i\varphi_3} + z_3 \\ z_G &= a_3(z_2 - z_3)e^{i\varphi_3} + z_3\end{aligned}$$

gdje je $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.



Za tražena polovišta P_1, P_2, P_3, redom, iz zadatka vrijedi

$$z_{P_1} = \frac{z_C + z_D}{2}, \quad z_{P_2} = \frac{z_E + z_F}{2}, \quad z_{P_3} = \frac{z_B + z_G}{2},$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}z_{P_1} - z_{P_2} &= \frac{z_3 - z_1}{2}(a_1e^{i\varphi_1} + a_2e^{i\varphi_2} + a_3e^{i\varphi_3} - 1) \\ z_{P_2} - z_{P_3} &= \frac{z_1 - z_2}{2}(a_1e^{i\varphi_1} + a_2e^{i\varphi_2} + a_3e^{i\varphi_3} - 1) \\ z_{P_3} - z_{P_1} &= \frac{z_2 - z_3}{2}(a_1e^{i\varphi_1} + a_2e^{i\varphi_2} + a_3e^{i\varphi_3} - 1).\end{aligned}$$

Iz ove tri jednakosti i činjenice $|z_3 - z_1| = |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$ slijedi $|z_{P_1} - z_{P_2}| = |z_{P_2} - z_{P_3}| = |z_{P_3} - z_{P_1}|$ što znači da su P_1, P_2, P_3 vrhovi jednakostraničnog trokuta.

Zlatko Petolas (2), Zagreb

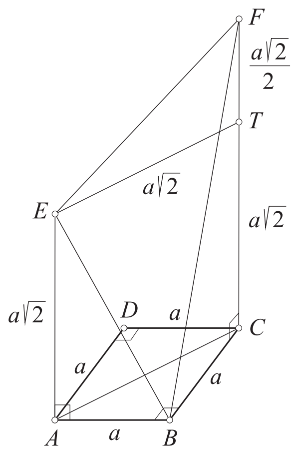
3424. *Duljina stranice kvadrata* $ABCD$ *je* a. *Iz vrhova* A *i* C *povučene su okomice* AE *i*

CF na ravninu ABCD tako da je $|AE| = |AC|$ *i* $|CF| = \frac{3}{2}|AC|$. *Odredi duljine* $|BE|$, $|EF|$ *i* $|BF|$ *u zavisnosti od* a. *Pokaži da je trokut* BEF *pravokutan s pravim kutom uz* E *i da je* EF *okomito na ravninu* BDE.

Prvo rješenje. Po Pitagorinom poučku vrijedi:

$$|BE| = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$
$$|BF| = \sqrt{\frac{9}{2}a^2 + a^2} = a\sqrt{\frac{11}{2}}$$
$$|EF| = \sqrt{|ET|^2 + |FT|^2}$$
$$= \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Sada je $|BE|^2 + |EF|^2 = |BF|^2$, pa je $\triangle BEF$ pravokutan, $\sphericalangle BEF = 90^\circ$.



Nadalje,

$$|FD| = \sqrt{\frac{9}{2}a^2 + a^2} = a\sqrt{\frac{11}{2}}$$
$$|ED| = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

tj.

$$|EF|^2 + |ED|^2 = |FD|^2$$

pa je $\triangle EDF$ pravokutan, $\sphericalangle DEF = 90^\circ$.

Konačno je $EF \perp BE$ i $EF \perp DE$ što su pravci koji određuju ravninu BDE, pa je $EF \perp BDE$.

Petar Orlić (3), Zagreb

Drugo rješenje. Postavimo problem u trodimenzionalni Kartezijev koordinatni sustav tako da $ABCD$ leži u xy-ravnini: $A = (0,0,0)$, $B = (a,0,0)$, $C = (a,a,0)$, $D = (0,a,0)$. Odavde, uz prepostavke zadatka, slijedi $E = (0,0,\sqrt{2}a)$, te $F = \left(a, a, \frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)$. Dalje,

$$\overrightarrow{EB} = (a, 0, -\sqrt{2}a), \quad \overrightarrow{EF} = \left(a, a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right),$$
$$\overrightarrow{BF} = \left(0, a, \frac{3\sqrt{2}}{2}a\right).$$

Dakle,

$$|BE| = |\overrightarrow{EB}| = \sqrt{a^2+0^2+(-\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{3}a,$$
$$|EF| = |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{a^2+a^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}a,$$
$$|BF| = |\overrightarrow{BF}| = \sqrt{0^2+a^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{11}{2}}a.$$
$$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EF} = a \cdot a + 0 \cdot a + (-\sqrt{2}a) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = 0$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{EB} \perp \overrightarrow{EF}$$

tj. $\triangle BEF$ je pravokutan s pravim vrhom u E.

$$\overrightarrow{ED} = (0, a, -\sqrt{2}a) \Longrightarrow$$
$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{ED} = a \cdot 0 + a \cdot a + \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \left(-\sqrt{2}a\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{ED}.$$

Dakle vektor $\overrightarrow{EF}$ je okomit na vektore $\overrightarrow{EB}$ i $\overrightarrow{ED}$, a svaki vektor iz ravnine BDE se može zapisati kao $\alpha\overrightarrow{EB} + \beta\overrightarrow{ED}$, za neke α, $\beta \in \mathbf{R}$, pa je

$$\overrightarrow{EF} \cdot (\alpha\overrightarrow{EB} + \beta\overrightarrow{ED}) = \alpha\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EB} + \beta\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{ED} = 0.$$

Dakle $\overrightarrow{EF}$ okomit na ravninu BDE.

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3425. *Članovi niza* $(a_n)_{n \geq 0}$ *zadovoljavaju relaciju*

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}) \qquad (1)$$

za sve nenegativne cijele brojeve m *i* n *takve da je* $m \geq n$.

Ako je $a_1 = 1$, *odredi* a_n.

Prvo rješenje.

Za $m = n$ imamo

$$a_{2m} + a_0 = a_{2m} \quad \text{tj.} \quad a_0 = 0.$$

Za $n = 0$ imamo

$$a_m + a_m = \frac{1}{2}a_{2m} \quad \text{tj.} \quad a_{2m} = 4a_m. \qquad (*)$$

Neka je sada $m = n + 2$. Tada imamo

$$a_{2n+2} + a_2 = \frac{1}{2}(a_{2n+4} + a_{2n}),$$

te zbog $(*)$:

$$a_{2n+2} + a_2 = 2(a_{n+2} + a_n).$$

S druge strane zbog $a_1 = 1$ i $(*)$ slijedi

$$a_2 = 4a_1 = 4,$$

te nakon kraćeg računanja

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2.$$

Zbog $a_0 = 0$ i $a_1 = 1$:

$$n = 0 \implies a_2 = 2a_1 - a_0 + 2 = 2^2,$$

$$n = 1 \implies a_3 = 2a_2 - a_1 + 2 = 3^2,$$

$$n = 2 \implies a_4 = 2a_3 - a_2 + 2 = 4^2,$$

pa ćemo dokazati metodom matematičke indukcije da je $a_n = n^2$.

Dakle,

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2 = 2n^2 - (n-1)^2 + 2$$

tj.

$$a_{n+1} = (n + 1)^2.$$

Sara Džebo (3), Sarajevo, BiH

Drugo rješenje. Ako u (1) stavimo $m = n = 0 \implies a_0 + a_0 = \frac{1}{2}(a_0 + a_0)$ tj. $a_0 = 0$.

Ako stavimo $m = 1$, $n = 0 \implies a_1 + a_1 = \frac{1}{2}(a_2 + a_0)$ tj. $a_2 = 4$.

Pokažimo da je

$$a_n = n^2, \quad \text{za svaki} \quad n \geq 0. \qquad (2)$$

Pokazat ćemo prvo, metodom matematičke indukcije, $a_{2k} = (2k)^2$, $k \geq 0$.

Baza indukcije. Za $k = 0$, $k = 1$ tvrdnja vrijedi jer $a_{2\cdot 0} = a_0 = 0 = 0^2$, $a_{2\cdot 1} = a_2 = 4 = 2^2$.

Pretpostavka indukcije. Prepostavimo da je za neki $k \in \mathbf{N}$, $a_{2j} = (2j)^2$, za sve $0 \leq j \leq k$.

Korak indukcije. Stavimo $m = k + 1$, $n = k - 1$ u (1):

$$a_{2k} + a_2 = \frac{1}{2}(a_{2(k+1)} + a_{2(k-1)}).$$

Iz ove jednakosti i prepostavke indukcije slijedi $a_{2(k+1)} = (2(k + 1))^2$ čime je pokazan i korak indukcije.

Stavimo sada $m = k + 1$, $n = k$, gdje $k \geq 0$, u (1):

$$a_{2k+1} + a_1 = \frac{1}{2}(a_{2(k+1)} + a_{2k})$$

$$\implies a_{2k+1} = (2k + 1)^2.$$

To znači da vrijedi (2) tj. $a_n = n^2$, za svaki $n \geq 0$.

Zlatko Petolas (2), Zagreb

3426. *Nađi funkciju $f(x)$ takvu da je*

$$\bigcup_{c\in\mathbf{R}} \left\{ y \geq \frac{1}{2}x^2 + cx + c^2 \right\} = \{(x, y) | y \geq f(x)\}.$$

Rješenje. Pokazat ćemo da je tražena funkcija $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$. Označimo zato dva skupa:

$$A = \bigcup_{c\in\mathbf{R}} \left\{ (x, y) | y \geq \frac{1}{2}x^2 + cx + c^2 \right\}$$

i

$$B = \left\{ (x, y) | y \geq \frac{1}{4}x^2 \right\}.$$

Pokazat ćemo $A = B$.

1° Neka je $(x_0, y_0) \in A$ proizvoljan. Dakle postoji $c \in \mathbf{R}$ takav da je

$$y_0 \geq \frac{1}{2}x_0^2 + cx_0 + c^2.$$

Zbog

$$\frac{1}{2}x_0^2 + cx_0 + c^2 \geq \frac{1}{4}x_0^2 \iff \left(\frac{1}{2}x_0 + c\right)^2 \geq 0$$

slijedi $y_0 \geq \frac{1}{4}x_0^2$ tj. $(x_0, y_0) \in B$ pa je $A \subseteq B$.

2° Neka je $(x_1, y_1) \in B$ proizvoljan $\Longrightarrow$

$$y_1 \geq \frac{1}{4}x_1^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1\right)x_1 + \left(-\frac{1}{2}x_1\right)^2.$$

Dakle, postoji $c \in \mathbf{R}$, $c = -\frac{1}{2}x_1$, takav da je $y_1 \geq \frac{1}{2}x_1^2 + cx_1 + c^2 \Longrightarrow (x_1, y_1) \in A$ pa je $B \subseteq A$. Time smo pokazali $A = B$.

Zlatko Petolas (2), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 374. *Hrvatski rekord u utrci na 100 metara od prošle godine drži Dario Horvat i iznosi 10.2 sekunde. Pretpostavimo da je Dario prvih 20 metara jednoliko ubrzavao i nakon toga trčao do cilja svojom maksimalnom brzinom. Koliko iznosi ta brzina ako je ubrzavanje trajalo 3.4 sekunde?*

Rješenje.

$s_1 = 20$ m

$t_1 = 3.4$ s

$\underline{s_2 = 80 \text{ m}}$

$v = ?$

$$s = \frac{a \cdot t_1^2}{2};$$

$$a = \frac{2 \cdot s}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 20 \text{ m}}{3.4 \text{ s}^2} = 3.46 \text{ m/s}^2;$$

$$v = a \cdot t = 3.46 \text{ m/s}^2 \cdot 3.4 \text{ s} = 11.765 \text{ m/s}.$$

Ur.

OŠ – 375. *Učenik je želio izmjeriti temperaturu vatre u kaminu. Stavio je željezni predmet mase 200 grama neko vrijeme u vatru i nakon toga ga je pomoću kliješta brzo stavio u izoliranu posudu u kojoj je bilo 2 litre vode temperature* $10\,^\circ C$. *Temperatura vode u posudi je porasla na* $20\,^\circ C$. *Kolika je temperatura vatre? Zagrijavanje posude zanemarite. Specifični toplinski kapacitet željeza je* 460 *J/kg* $^\circ C$, *a vode* 4200 *J/kg* $^\circ C$.

Rješenje.

$m_ž = 200 \text{ g} = 0.2 \text{ kg}$

$V_v = 2$ L

$m_v = 2$ kg

$t_v = 10\,^\circ\text{C}, \quad t_s = 20\,^\circ\text{C}$

$\underline{c_ž = 460 \text{ J/kg}\,^\circ\text{C}, \quad c_v = 4200 \text{ J/kg}\,^\circ\text{C}}$

$t_ž = ?$

$Q_ž = Q_v$

$c_ž \cdot m_ž \cdot \Delta t_ž = c_v \cdot m_v \cdot \Delta t_v$

$\Delta t_v = t_s - t_v = 10\,^\circ\text{C};$

$$\Delta t_ž = \frac{c_v \cdot m_v \cdot \Delta t_v}{c_ž \cdot m_ž} = \frac{4200 \text{ J/kg}\,^\circ\text{C} \cdot 2 \text{ kg} \cdot 10\,^\circ\text{C}}{460 \text{ J/kg}\,^\circ\text{C} \cdot 0.2 \text{ kg}} = 913\,^\circ\text{C};$$

$t_ž = t_{vatre} = \Delta t_ž + t_s$

$t_{vatre} = 933\,^\circ\text{C}.$

Matija Turčić (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 376. *Akvarij je dugačak 5 dm, širok, 30 cm i visok 250 mm. U njega je utočeno 27 litara vode. Koliko je razina vode udaljena od gornjeg ruba akvarija?*

Rješenje.

$a = 5$ dm

$b = 30 \text{ cm} = 3 \text{ dm}$

$c = 250 \text{ mm} = 2.5 \text{ dm}$

$\underline{V = 27 \text{ L} = 27 \text{ dm}^3}$

$h = ?$

$$c_1 = \frac{V}{a \cdot b} = \frac{27 \text{ dm}^3}{5 \text{ dm} \cdot 3 \text{ dm}} = 1.8 \text{ dm};$$

$$h = c - c_1 = 2.5 \text{ dm} - 1.8 \text{ dm} = 0.7 \text{ dm} = 7 \text{ cm}.$$

Zrinka Brođanec (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 377. *Tijelo mase 2 kg miruje na horizontalnoj podlozi. Faktor trenja između njega i podloge iznosi 0.2. U* v*-*t *dijagramu prikažite gibanje tijela nakon što je na njega 2 s djelovala sila od 6 N.*

Rješenje.

$m = 2$ kg

$\mu = 0.2$

$t = 2$ s

$\underline{F = 6 \text{ N}}$

$v - t$ graf

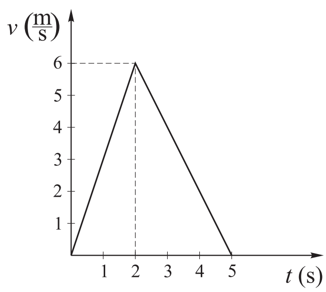
$$a_1 = \frac{F}{m} = \frac{6\ \text{N}}{2\ \text{kg}} = 3\ \text{m/s}^2;$$

$$v = a \cdot t = 3\ \text{m/s}^2 \cdot 2\ \text{s} = 6\ \text{m/s};$$

$$F_{tr} = \mu \cdot G = 0.2 \cdot 20\ \text{N} = 4\ \text{N};$$

$$a_2 = -\frac{F}{m} = -\frac{4\ \text{N}}{2\ \text{kg}} = -2\ \text{m/s}^2;$$

$$t = \frac{v}{a} = \frac{6\ \text{m/s}}{2\ \text{m/s}^2} = 3\ \text{s}.$$



Za 2 sekunde, dok je na njega djelovala sila od 6 N tijelo je ubrzavalo do brzine 6 m/s, a nakon toga je, zbog sile trenja, 3 sekunde usporavalo dok nije stalo.

Ante Šego (8),
OŠ Horvati, Zagreb

1560. *Pri jednoliko ubrzanom gibanju trajanja 10 s tijelo prevali ukupno 108 m, od toga 18 m u posljednjoj sekundi. Odredi ubrzanje, početnu brzinu i put prevaljen u prvoj sekundi.*

Rješenje. Općeniti izraz za put jednoliko ubrzanog gibanja iz ishodišta glasi:

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t.$$

Uvjeti zadatka tada su:

$$s(10) = 108$$

$$s(10) - s(9) = 18.$$

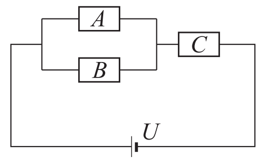
Uvrštavanjem iz druge jednadžbe dobijemo $v_0 = 18 - 9.5a$, što uvrstimo u prvu:

$$108 = 50a + 10v_0 = 180 - 45a.$$

Odatle je $a = 1.6\ \text{m/s}^2$, $v_0 = 2.8\ \text{m/s}$. Put u prvoj sekundi je $s(1) = a/2 + v_0 = 3.6\ \text{m}$.

Ur.

1561. *U strujnom krugu na slici otpornik A oslobađa Jouleovu snagu 4 W. Odredi snagu na otpornicima B i C. $R_A = 1\ \Omega$, $R_B = 2\ \Omega$, $R_C = 3\ \Omega$. Koliki je napon izvora?*



Rješenje. Iz $P_A = U_A I_A = 4$ W i $R_A = U_A/I_A = 1\ \Omega$ slijedi $U_A = 2$ V i $I_A = 2$ A. Kako su A i B spojeni paralelno, $U_B = U_A = 2$ V, pa je $I_B = U_B/R_B = 1$ A. Snaga na otporu B je tada $P_B = U_B I_B = 2 \cdot 1 = 2$ W. Struja kroz C je zbroj struja kroz A i B, dakle $I_C = 3$ A. Napon je $U_C = I_C R_C = 9$ V. Snaga na otporu C je dakle 27 W, a napon izvora je $U = U_A + U_C = 11$ V.

Ur.

1562. *Konvergentna leća kružnog oblika promjera 10 cm ima žarišnu duljinu 60 cm. Sunčevu svjetlost fokusiramo pomoću leće. Ako je prividni promjer Sunca $0°32'$, a svjetlosni tok zračenja 1000 W/m^2 odredi:*

- *veličinu nastale slike Sunca,*
- *snagu svjetlosnog zračenja u žarištu,*
- *svjetlosni tok (W/m^2) u žarištu.*

Rješenje. Kutovi pod kojima se iz središta leće vide predmet i slika su jednaki, u slučaju Sunca $0°32'$. S obzirom da je slika u žarištu, dakle 60 cm udaljena od središta leće, promjer slike je $f \cdot \sin 32' = 0.5585$ cm. Na sliku se (idealno) fokusira sva upadna svjetlost, dakle površina *leće* puta svjetlosni tok izvora, što iznosi $P = (5\ \text{cm})^2 \pi \cdot 1000\ \text{W/m}^2 = 7.854$ W. Svjetlosni tok u žarištu je omjer snage i površine, koja je krug promjera 0.5585 cm, dakle 0.245 cm^2. Dobivamo $\Phi = P/S = 32.06\ \text{W/cm}^2 = 320.6\ \text{kW/m}^2$, što je 320.6 puta veći tok u žarištu od onoga koji bi na istu površinu dolazio bez prisustva leće.

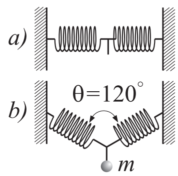
Ur.

1563. *Željezna plutača mase 150 kg (željeza) ima unutarnji volumen 250 litara i polako se puni vodom. U nekom trenutku, kad u plutaču uđe dovoljno vode, ona će potonuti. Koliko se litara zraka tada još nalazi* *u plutači? Gustoća željeza je 7.87 kg/l, vode 1 kg/l, a zraka je zanemariva.*

Rješenje. Iz gustoće i mase željeza slijedi da je volumen samog željeza $V = m/\rho = 19.06$ litara. Ukupan volumen plutače je dakle 269.06 litara, a da bi potonula, masa mora narasti na 269.06 kg (tada je prosječna gustoća jednaka gustoći vode). Odatle je masa vode $269.06 - 150 = 119.06$ kg, što znači 119.06 litara vode. Preostali volumen 130.94 l ispunjava zrak (masa tog zraka je oko 0.17 kg, što potvrđuje ispavnost zanemarivanja njegove mase u računu).

Ur.

1564. *Dvije jednake opruge spojene su međusobno i učvršćene horizontalno tako da se između njih može objesiti uteg (slika a). Pri vješanju utega mase m, kut θ među oprugama se smanji sa 180° na 120° (slika b). Koliki će biti kut θ ako objesimo uteg mase $2m$? Duljina neopterećene opruge je zanemarivo mala.*



Rješenje. Ako duljinu opruge bez tereta (gore na slici) označimo s x, a duljinu pod opterećenjem (dolje na slici) sa s, vrijedi $\sin(\theta/2) = x/s$. Za oprugu konstante elastičnosti k i zanemarive duljine neopterećene opruge, sila iznosi $F = ks$. Obje opruge stvaraju rezultantnu silu prema gore, iznosa $F_R = 2ks\cos(\theta/2)$. Ta je sila u ravnoteži s $F = mg$ za $\theta/2 = 60^\circ$, pa vrijedi

$$mg = \frac{2kx\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

Odatle je

$$\frac{mg}{kx} = \frac{1}{\operatorname{tg}60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pri vješanju dvostruko težeg utega, θ je rješenje jednadžbe

$$2\cdot\frac{mg}{kx} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta/2)} = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

što iznosi $\theta = 81.8^\circ$.

Ur.

1565. *Refleksija svjetlosti koja upada okomito na prozirnu plohu indeksa loma n određena je izrazom (iz Fresnelovih relacija):*

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2.$$

Odredi indeks loma stakla (reflektira 4%) i dijamanta (reflektira 17.2%) okomite svjetlosti.

Rješenje. Uvrštavanjem $R = 0.04$ za staklo i $R = 0.172$ za dijamant, te korjenovanjem dobivamo $0.2 = \dfrac{n-1}{n+1}$ za staklo i $0.41473 = \dfrac{n-1}{n+1}$ za dijamant. Rješavanje po n daje $n_{staklo} = 1.5$ i $n_{dijamant} = 2.417$.

Ur.

1566. *Sirius, najsjajnija zvijezda na nebu, udaljen je od Sunca 8.6 svjetlosnih godina (gs). Bliska zvijezda Procyon udaljena je 11.41 gs. Ako je prividni kut na nebu između tih dviju zvijezda 25.7°, koliko je Sirius udaljen od Procyona? Koliko je puta Sirius sjajniji gledano s Procyona u odnosu na "naš" pogled iz smjera Sunca? (Kako bi izračunali ili izmjerili prividni kut između dviju zvijezda?)*

Rješenje. Udaljenost Siriusa od Procyona je treća stranica trokuta kojemu su dvije $a = 8.6$ i $b = 11.41$, te kut između njih $\gamma = 25.7^\circ$. Kosinusov poučak daje

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = 5.226 \text{ gs}.$$

Na toj je udaljenosti Sirius 1.6456 puta bliži Procyonu nego nama. Prividni sjaj opada s kvadratom udaljenosti pa je, gledano s Procyona, Sirius $1.6456^2 = 2.708$ puta sjajniji. Prividni kutevi među zvijezdama se rijetko mjere direktno, češće se računaju iz sfernih koordinata obiju zvijezda. Kut dviju zvijezda sa zadanim (ϕ_1, λ_1) i (ϕ_2, λ_2) koordinatama je

$$\cos\gamma = \sin\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_1\cos\phi_2\cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Često se ϕ računa u stupnjevima (puni krug $= 360^\circ$), a λ u satima (puni krug $= 24$ sata).

Ur.