55. Međunarodna matematička olimpijada 2014. g.

Na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi, koja se održavala od 3. do 13. srpnja 2014. u Južnoafričkoj Republici u Cape Townu, hrvatska olimpijska ekipa je u konkurenciji 101 države i 560 natjecatelja ostvarila izvrsne rezultate.

Predstavnici Hrvatske su izabrani su na temelju rezultata Hrvatske matematičke olimpijade, gdje su redom prvih šest mjesta osvojili *Mislav Balunović*, *Petar Orlić*, *Erik Banek*, *Daniel Paleka*, *Vlatka Vazdar* i *Adrian Beker*. Voditelji su bili doc. dr. sc. *Mea Bombardelli* i *Tonći Kokan*. Intenzivne pripreme su počele 8. lipnja i trajale su bez pauze do 28. lipnja, održavajući se na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu. Pripreme su se sastojale od svakodnevnih predavanja i samostalnog rješavanja zadataka. Predavanja su volonterski držali uglavnom bivši natjecatelji.

Na samo natjecanje putovali smo preko Istanbula, gdje se ekipa turistički zadržavala čekajući let u odlasku i na povratku. Sletjevši u zimu Cape Towna, zbog povoljnijeg leta jedan dan prije početka Olimpijade, ekipa je noć provela u hotelu u centru grada da bi se sutradan prebacili na mjesto održavanja natjecanja, University of Cape Town. Smještaj bi bio solidan da je bilo centralnog grijanja, a ovako je prvih noći bilo jako hladno. Dan nakon dolaska se održala ceremonija otvaranja, koja je izgledala izvanredno i na organizaciju koje se mnoge hrvatske ceremonije otvaranja mogu ugledati. Jutro nakon toga uslijedio je prvi dan natjecanja.

Prvi zadatak je bila nestandardna algebra koju smo svi riješili bez većih problema. Upravo na toj činjenici se ogleda golemi napredak hrvatske olimpijske matematike u posljednjih nekoliko godina i veliki trud koji je uložen od strane predavača na pripremama, kako bi se pomaknuli iz kruga zemalja koje se muče s prvim i četvrtim zadatkom i vinuli se u Top 20. Drugi zadatak je bila lijepa kombinatorika koju smo riješili s mješovitim uspjehom: Erik, Mislav i Vlatka su ga riješili u potpunosti, a ja sam imao rješenje s nekim nedostacima. Nitko nije očekivao da će dobiti koji bod na trećem zadatku, jako teškoj geometriji. Nakon natjecanja nas je čekalo ugodno iznenađenje: otkrili smo da je autor drugog zadatka naš vođa puta Tonći Kokan, čime je postao prvi hrvatski autor zadatka koji je bio na samom natjecanju na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi.

Poslijepodne nakon prvog dana smo proveli igrajući nogomet. Kao jedna od nogometno najjačih ekipa na natjecanju, pokazali smo iznimnu taktičku disciplinu u okršajima s tehnički i fizički nadmoćnijim lokalcima. Njihova tika-taka nas nije smela i ostavši vjerni igri, po uzoru na Chelsea, uništili smo sve njihove nade. U početnom sastavu Orlić – Kokan, Paleka – Beker, Balunović, Banek – Vazdar, Benjamin[1] smo se vratili nakon ekspresnog prvog gola protivnika i poveli s $3:1$, a na kraju pobijedili sa $6:3$. Golove za našu ekipu su postigli Balunović (3), Kokan, Beker i Paleka. Mislav Balunović, poznat i kao "Il Messi della Croazia", heroj je naše pobjede. Na poziciji ofenzivnog veznog postigao je hat-trick, a od njegovih golova se najviše ističe udarac glavom na sjajan Tonćijev balun. Portal WhoScored je najbolje ocjene dao njemu i Tonćiju, dok je na protivničkoj strani najbolji bio Charlie.

Za drugi dan smo očekivali teže zadatke nego prvog, vjerojatno u kombinaciji geometrija – teorija brojeva – kombinatorika, gdje su zadnja dva zadatka puno teža. Četvrti zadatak je bila lagana geometrija koju smo svi riješili, iako je nekima uzela previše vremena da bi mogli napraviti išta na preostala dva zadatka. Peti zadatak je

[1] Ronaldo Benjamin, vodič naše ekipe

bila kombinatorika (predstavljena kao teorija brojeva da bi se zadovoljili propisi) koju je riješio samo Mislav, a na najtežem šestom zadatku (opet kombinatorika) nitko nije dobio ni bod. Nakon drugog dana, očekivanja su bila jedno zlato/ srebro i četiri do pet bronci.

Nakon drugog dana natjecanja, red je došao na Meu i Tonćija koji su se u iduća dva dana morali izboriti za naše bodove. Nakon rješavanja zadataka smo imali izlet i slobodno vrijeme. Posjetili smo Rt Dobre nade i rezervat afričkih pingvina. Mislav, najbolji član naše ekipe, nakon drugog dana otišao je na Tajvan kako bi se natjecao na Međunarodnoj olimpijadi iz informatike, gdje je osvojio srebro. Održana su i tri popularno-znanstvena predavanja, koja su održali John Barrow, Günter Ziegler i Peter Sarnak. Družili smo se uglavnom s jezično nam bliskim narodima s ovih prostora, sklopivši mnoga vrijedna poznanstva.

Nakon dva dana i zadnjeg sastanka žirija, određeni su bodovi za sve natjecatelje i dodijeljene medalje. Rezultati hrvatske ekipe su abecedno bili sljedeći:

Mislav Balunović, Gimnazija Matije Mesića, Slavonski Brod, 4. r., zlatna medalja
Erik Banek, V. gimnazija, Zagreb, 4. r., brončana medalja
Adrian Beker, XV. gimnazija, Zagreb, 1. r., brončana medalja
Petar Orlić, XV. gimnazija, Zagreb, 2. r., pohvala
Daniel Paleka, Gimnazija Franje Petrića, Zadar, 2. r., srebrna medalja
Vlatka Vazdar, XV. gimnazija, Zagreb, 4. r., srebrna medalja

U tablici to izgleda ovako:

natjecatelj	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ukupno	apsolutni rang	relativni rang	osvojeno
Mislav Balunović	7	7	1	7	7	0	29	40	93.02%	zlatna medalja
Vlatka Vazdar	7	7	0	7	1	0	22	124	78.00%	srebrna medalja
Daniel Paleka	7	6	0	7	2	0	22	124	78.00%	srebrna medalja
Erik Banek	7	7	0	7	0	0	21	163	71.02%	brončana medalja
Adrian Beker	7	2	0	7	1	0	17	256	54.38%	brončana medalja
Petar Orlić	7	1	0	7	0	0	15	296	47.23%	pohvala
ekipni rezultat	42	30	1	42	11	0	126	29	72.00%	G, S, S, B, B, HM

Hrvatska ekipa završila je na solidnom 29. mjestu sa 126 bodova. Ovo je rekordni broj bodova hrvatske ekipe. Kina je ponovno prva s 201 bodom, Sjedinjene Američke Države druge sa 193, dok je Tajvan, najveće iznenađenje, na 3. mjestu sa 192 boda. Od susjednih nam zemalja, Srbija je 23. sa 129 bodova, Bosna i Hercegovina je 51. s 86 bodova, a Slovenija 58. sa 78 bodova.

Mislav je osvojio zlato i time nastavio sjajan zlatni niz hrvatske ekipe u posljednje tri godine. Vlatka i ja smo sretno pokupili srebro na donjoj granici te medalje, dok su Erik i Petar nesretno ostali bez srebra i bronce za bod. Adrian je osvojio broncu, i od njega u njegova sljedeća tri IMO-a mnogo očekujemo.

Tri dana nakon natjecanja je uslijedila ceremonija dodjele medalja s mnogim poznatim južnoafričkim izvođačima, a zatim i svečana večera. Sljedeći dan je bio dan za odlazak, i uz usputnu posjetu Istanbulu, vratili smo se u Hrvatsku.

Daniel Paleka

Zadaci

Prvi dan, Cape Town, Južnoafrička Republika, utorak 8. srpnja 2014.

Zadatak 1. Neka je $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ beskonačan niz prirodnih brojeva. Dokaži da postoji točno jedan prirodni broj n takav da je

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Zadatak 2. Neka je $n \geqslant 2$ prirodni broj. Dana je šahovska ploča $n \times n$ koja se sastoji od n^2 polja. Raspored n topova na toj ploči je *miroljubiv* ako se u svakom retku i u svakom stupcu nalazi točno jedan top. Odredi najveći prirodni broj k sa svojstvom da, za svaki miroljubivi raspored n topova, postoji kvadrat $k \times k$ na čijih se k^2 polja ne nalazi niti jedan top.

Zadatak 3. U konveksnom četverokutu $ABCD$ vrijedi $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA = 90^\circ$. Točka H je nožište okomice iz točke A na pravac BD. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ odabrane su redom točke S i T tako da točka H bude unutar trokuta SCT i da vrijedi

$$\sphericalangle CHS - \sphericalangle CSB = 90^\circ \quad \text{i} \quad \sphericalangle THC - \sphericalangle DTC = 90^\circ.$$

Dokaži da pravac BD dodiruje opisanu kružnicu trokuta TSH.

Drugi dan, Cape Town, Južnoafrička Republika, srijeda 9. srpnja 2014.

Zadatak 4. Točke P i Q leže na stranici $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta ABC tako da je $\sphericalangle PAB = \sphericalangle BCA$ i $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABC$. Točke M i N nalaze se na pravcima AP i AQ redom, tako da je P polovište dužine $\overline{AM}$, a Q polovište dužine $\overline{AN}$. Dokaži da se pravci BM i CN sijeku na opisanoj kružnici trokuta ABC.

Zadatak 5. Banka Cape Towna izdaje kovanice vrijednosti $\frac{1}{n}$, za svaki prirodni broj n. Ako je dano konačno mnogo takvih kovanica (ne nužno različitih vrijednosti) čija je ukupna vrijednost najviše $99 + \frac{1}{2}$, dokaži da je te kovanice moguće podijeliti na najviše 100 grupa, tako da ukupna vrijednost kovanica u svakoj grupi bude najviše 1.

Zadatak 6. Za skup pravaca u ravnini kažemo da je u *općem položaju* ako nikoja dva pravca nisu paralelna i nikoja tri ne prolaze istom točkom. Svaki skup pravaca u općem položaju dijeli ravninu na područja od kojih neka imaju konačnu površinu. Takva područja zovemo *ograničenim područjima* promatranog skupa pravaca. Dokaži da je, za sve dovoljno velike n, u svakom skupu od n pravaca u općem položaju moguće obojati barem $\sqrt{n}$ pravaca plavom bojom, tako da nijedno od ograničenih područja tog skupa pravaca nema potpuno plavi rub.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

Rang-lista

	nagrade				broj
	I	II	III	poh.	bod.
Kina	5	1			201
SAD	5	1			193
Tajvan	4		2		192
Rusija	3	3			191
Japan	4	1	1		177
Ukrajina	2	3	1		175
Južna Koreja	2	4			172
Singapur	3	2	1		161
Kanada	2	1	3		159
Vijetnam	3	2	1		157
Australija	1	3	2		156
Rumunjsla	1	5			156
Nizozemsla	3	2	1		155
Sjeverna Koreja	1	4		1	154
Mađarska	1	4	1		153
Njemačka		6			152
Turska	1	3	2		147
Hong Kong		4	2		143
Izrael		5	1		143
Velika Britanija		4	2		142
Iran		4	2		131
Tajland		4	2		131
Kazahstan	1	1	4		129
Malezija	2	1	1	2	129
Srbija	1	3	2		129
Italija	1	2	1	1	128
Meksiko		4	1	1	128
Poljska	1		4	1	128
Hrvatska	1	2	2	1	126
Indonezija		2	3	1	126
Peru		1	5		126
Češka		1	5		124
Portugal		2	3	1	123
Bjelorusija	1	1	3	1	122
Brazil		3	2	1	122
Slovačka		1	5		122
Bugarska		3	1	2	120
Švicarska		2	4		114
Armenija		2	1	3	110
Indija		1	3	2	110
Grčka		2	2	2	109
Litva		1	3	2	104
Saudijska Arabija			4	2	103
Mongolija			5	1	102
Filipini		1	3	2	96
Francuska		1	4		96
Gruzija		1	2	2	92
Moldavija			2	3	90
Španjolska			3	2	90
Tadžikistan			2	4	89
Austrija		1	1	3	86
Bosna i Hercegovina		1		4	86
Bangladeš		1	1	4	84
Kolumbija		1	1	3	82
Šri Lanka			2	4	82
Argentina			2	4	81
Švedska			2	4	80
Slovenija			2	3	78
Belgija		1		5	77
Novi Zeland		1	1	3	76
Azerbejdžan			1	5	75
Makau			2	4	74
Kostarika			1	4	72
Irska				6	67
Južnoafrička Republika			1	4	67
Latvija		1	1	1	64
Danska			2	1	62
Makedonija			1	3	62
Norveška		1		2	61
Finska			1	2	59
Paragvaj			1	2	56
Cipar				3	53
Sirija				4	53
Estonija				3	52
Pakistan			1	1	50
Island			1	1	47
Albanija (5)				3	46
Maroko				4	43
Luksemburg (3)			1	2	41
Tunis				3	37
Čile (4)			1	1	33
Nigerija			1	1	32
Trindad i Tobago (5)			1		32
Urugvaj				3	31
Kirgistan				3	29
Venecuela (2)				2	24
Lihtenštajn (1)		1			22
Crna Gora (3)				2	21
Burkina Faso				1	19
Ekvador				2	19
Portoriko (2)				1	12
Kuba (1)				1	10
Panama (1)				1	7
Bolivija					5
Uganda (4)					5
Zimbabve					5
Obala Bjelokosti					3
Benin (3)					2
Tanzanija (3)					2
Gambija					1
Gana (1)					0