8. Srednjoeuropska matematička olimpijada 2014. g.

Srednjoeuropska matematička olimpijada (MEMO) održana je 18. – 24. rujna 2014. u Dresdenu, na istoku Njemačke. Osim Hrvatske, nastupalo je još devet zemalja Srednje Europe: Austrija, Češka, Litva, Mađarska, Poljska Slovačka, Slovenija, Švicarska, i domaćin Njemačka. Članovi hrvatske olimpijske ekipe su bili:

Domagoj Bradač, 2. r., XV. gimnazija, Zagreb
Kristian Vedran Budrovčan, 3. r., XV. gimnazija, Zagreb
Ivan Lazarić, 3. r., Gimnazija Pula, Pula
Lukas Novak, 1. r., Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec
Josip Pupić, 3. r., XV. gimnazija, Zagreb
Kristijan Štefanec, 3. r., XV. gimnazija, Zagreb

Voditelji naše ekipe bili su *Matija Bašić* i *Stipe Vidak* s Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Nakon dva leta u trajanju od po sat vremena, između kojih smo se okrijepili aerodromskim izborom toplih napitaka, bili smo smješteni u hostel blizu samog centra Dresdena. Dan prije natjecanja proveli smo psihički se pripremajući na obližnjem sajmu i razgledavanju znamenitosti Dresdena.

Zadaci na individualnom natjecanju su djelovali nešto lakšim nego prethodnih godina, no natjecatelji su svejedno bili vrlo dobro distribuirani kod podjele medalja. Samo su dva od njih imala sve bodove, među kojima je i naš *Ivan Lazarić*. Treba istaknuti da je svaki član naše ekipe osvojio medalju. Tako su se, osim *Ivana Lazarića* koji je osvojio prvo mjesto i zlatnu medalju, *Domagoj Bradač* i *Kristian Vedran Budrovčan* okitili srebrnom, a *Lukas Novak*, *Josip Pupić* i *Kristijan Štefanec* brončanom medaljom. Ovakav rezultat nam je donio i najveći zbroj bodova među svim državama na individualnom natjecanju.

Ekipno natjecanje je sadržavalo vrlo složene zadatke s kojima se nije bilo baš lako nositi. Nakon što smo brzo riješili četiri zadatka, naš tempo je pao i sve do kraja smo riješili još samo zadatak i pol u posljednjih pola sata natjecanja. Kriterij bodovanja zadataka bio je vrlo strog, no naši voditelji su odradili lavovski dio posla u borbi za naše bodove. Ipak, na ekipnom natjecanju su nas pobijedili uvijek jaki Poljaci i Mađari čime smo mi osvojili vrlo dobro treće mjesto i brončanu medalju.

Njemačka organizacija natjecanja je bila besprijekorna te smo uz nekoliko izleta imali i dovoljno vremena za razgled grada te sportske okršaje s ostalim natjecateljima.

Povratak u Zagreb uljepšali su nam naši bivši olimpijci koji su nas srdačno dočekali na aerodromu Pleso u Zagrebu.

Kristijan Štefanec, Domagoj Bradač

Zadaci s pojedinačnog natjecanja, 20. rujna 2014.

I-1. Odredi sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da
$$xf(y) + f\big(xf(y)\big) - xf\big(f(y)\big) - f(xy) = 2x + f(y) - f(x+y)$$
vrijedi za sve $x, y \in \mathbf{R}$.

I-2. Promatramo podjele pravilnih n-terokuta na $n-2$ trokuta dobivene koristeći $n-3$ dijagonale koje se ne sijeku unutar n-terokuta. *Dvobojna triangulacija* je takva podjela pravilnog n-terokuta u kojoj je svaki trokut obojen crno ili bijelo i svaka dva trokuta koja imaju zajedničku stranicu su različitih boja. Kažemo da je prirodni broj $n \geqslant 4$ *trokutast* ako svaki pravilni n-terokut ima dvobojnu triangulaciju takvu da je za svaki vrh A tog n-terokuta broj crnih trokuta kojima je A vrh veći od broja bijelih trokuta kojima je A vrh.

Odredi sve trokutaste brojeve.

I-3. Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $|AB| < |AC|$, a I je središte upisane kružnice. Neka je E točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $|AE| = |AB|$. Neka je točka G na pravcu EI takva da je $\sphericalangle IBG = \sphericalangle CBA$, te da E i G leže na suprotnim stranama točke I.

Dokaži da pravac AI, okomica na pravac AE kroz E i simetrala kuta $\sphericalangle BGI$ prolaze istom točkom.

I-4. Za cijele brojeve $n \geqslant k \geqslant 0$, definiramo *bibinomni koeficijent* $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ formulom
$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \frac{n!!}{k!!(n-k)!!}.$$
Odredi sve parove (n, k) cijelih brojeva $n \geqslant k \geqslant 0$ takvih da je pripadni bibinomni koeficijent cijeli broj.

Napomena. Dvostruki faktorijel $n!!$ je umnožak svih parnih prirodnih brojeva do n ako je n paran, a umnožak svih neparnih prirodnih brojeva do n ako je n neparan. Na primjer, $0!! = 1$, $4!! = 2 \cdot 4 = 8$, $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Zadaci s ekipnog natjecanja, 21. rujna 2014.

T-1. Odredite najmanju moguću vrijednost izraza
$$\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+y} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{b+y},$$
gdje su a, b, x i y pozitivni realni brojevi koji zadovoljavaju nejednakosti
$$\frac{1}{a+x} \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{a+y} \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{b+x} \geq \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{1}{b+y} \geq 1.$$

T-2. Odredite sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da
$$xf(xy) + xyf(x) \geqslant f(x^2)f(y) + x^2y$$
vrijedi za sve $x, y \in \mathbf{R}$.

T-3. Neka su K i L prirodni brojevi. Na ploči koja se sastoji od $2K \times 2L$ jediničnih kvadratića mrav kreće s donjeg lijevog kvadratića i hoda prema gornjem desnom kvadratiću. U svakom koraku pomiče se vodoravno ili okomito na susjedni kvadratić. Nikad ne posjećuje isti kvadratić dvaput. Na kraju neki kvadratići mogu ostati neposjećeni. U nekim slučajevima svi neposjećeni kvadratići zajedno tvore točno jedan pravokutnik. U takvim slučajevima, taj pravokutnik zovemo MEMO*rabilnim*.

Odredite broj različitih MEMOrabilnih pravokutnika.

Napomena. Pravokutnici su različiti osim ako se sastoje od točno istih kvadratića.

T-4. U Sretnogradu živi 2014 građana $A_1, A_2, \ldots, A_{2014}$. U bilo kojem trenutku, svaki od njih može biti *sretan* ili *nesretan*. Raspoloženje bilo kojeg građanina promijeni se (iz nesretnog u sretnog ili obratno) ako i samo ako mu se neki sretni građanin nasmiješi. U ponedjeljak ujutro bilo je točno N sretnih građana u gradu.

U ponedjeljak tijekom dana dogodilo se sljedeće: građanin A_1 nasmiješio se građaninu A_2, zatim se građanin A_2 nasmiješio građaninu A_3, itd., te se na kraju građanin A_{2013} nasmiješio građaninu A_{2014}. Osim toga više se nitko nikome nije nasmiješio. Točno isto se ponovilo u utorak, srijedu i četvrtak. U četvrtak navečer bilo je točno 2000 sretnih građana.

Odredite najveću moguću vrijednost broja N.

T-5. Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $|AB| < |AC|$. Središte upisane kružnice I tog trokuta dira stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ u točkama D, E i F, redom. Simetrala AI siječe pravce DE i DF u točkama X i Y, redom. Neka je Z nožište visine iz točke A na stranicu $\overline{BC}$.

Dokažite da je D središte kružnice upisane trokutu XYZ.

T-6. Neka upisana kružnica k trokuta ABC dira stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Neka pravac AD siječe k u $L \neq D$ i neka je K središte pripisane kružnice trokuta ABC nasuprot točki A. Neka su M i N polovišta dužina $\overline{BC}$ i $\overline{KM}$, redom.

Dokažite da su točke B, C, N i L konciklične.

T-7. Konačan skup A prirodnih brojeva je *usrednjen* ako je aritmetička sredina elemenata svakog nepraznog podskupa skupa A također prirodni broj. Drugim riječima, A je usrednjen ako je $\frac{1}{k}(a_1 + \ldots + a_k)$ cijeli broj kad god je $k \geqslant 1$ i $a_1, \ldots, a_k \in A$ su različiti.

Za prirodni broj n, odredite najmanji mogući zbroj elemenata usrednjenog n-članog skupa.

T-8. Odredite sve uređene četvorke (x, y, z, t) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$20^x + 14^{2y} = (x + 2y + z)^{zt}.$$

Vrijeme rješavanja svakog dana: 5 sati

Vrijeme za postavljanje pitanja: 60 minuta

Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.