

Ljetni kamp mladih matematičara 2014.

Petar Bakić¹

U Pazinu je od 10. do 17. kolovoza održan 5. Ljetni kamp mladih matematičara u organizaciji udruge *Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"*. Na kampu je sudjelovalo 45 učenika iz cijele Hrvatske, svih uzrasta od 7. razreda osnovne do 4. srednje škole.

U tjedan dana smo se stigli izvrsno zabaviti, ali i štošta naučiti. Svaki dan na kampu započinjao je četverosatnim predavanjima iz odabranih matematičkih tema. Učenici su se mogli odlučiti za jedno od četiri ponuđena predavanja, koja su se razlikovala po zahtjevnosti i potrebnom predznanju. Tako su najmlađi imali priliku upoznati osnove geometrije, kombinatorike i teorije brojeva, dok su oni iskusniji na predavanjima obrađivali ponekad vrlo zahtjevne teme te pomoću nestandardnih metoda rješavali i najteže zadatke s međunarodnih natjecanja.

Poslijepodnevni sati bili su rezervirani za rad na projektima. Učenici su u manjim grupama, pod vodstvom jednog ili dva mentora, sudjelovali na jednom od nekoliko ponuđenih projekata. Projektni zadatak svake grupe bio je upoznati se s određenim dijelom matematike i primijeniti naučeno na matematičku formulaciju i rješavanje nekog konkretnog problema. Radni naslovi projekata bili su sljedeći: Diskretno modeliranje populacije, Evolucijski algoritmi, Grijanje pingvina, IMO predictor, Iz šupljeg u prazno, Kriptografija, Regularni poliedri, Statistika i Zombi apokalipsa.



Zadatak učenika na projektu "Diskretno modeliranje populacije" bio je što preciznije opisati i predvidjeti kretanje ukupne populacije neke zemlje. Podaci koji su pritom korišteni bili su izvještaji o populaciji iz redovnih popisa stanovništva, a glavni zadatak bio je predvidjeti ukupni broj stanovnika na sljedećem službenom popisu stanovništva u Hrvatskoj. Pridjev "diskretno" u naslovu projekta odnosi se, ne samo na pravilne vremenske razmake u kojima smo dobili precizne podatke, već i na metode kojima smo pristupali problemu: naglasak nije bio na kontinuiranoj regresiji, već na modelima kojima u pozadini stoji linearna algebra.

¹ Asistent je na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: pbakic@student.math.hr

“Evolucijski algoritmi” bili su informatički projekt namijenjen nešto starijim učenicima s većim iskustvom u programiranju. Često u praksi susrećemo probleme za koje su poznata (ponekad i vrlo jednostavna) algoritamska rješenja jednostavno prespora da bismo ih doista primijenili – izvršavanje odgovarajućeg algoritma čak i na vrlo jakom računalu uzima previše vremena. Za takve probleme najčešće koristimo *nedeterministička* rješenja – algoritme koji se zasnivaju na slučajnom odabiru i metodama vjerojatnosti. Iako ne postoji garancija da će takvi algoritmi uvijek dati rješenje, pogodno dizajniran algoritam će u pravilu imati veliku vjerojatnost pronalaska rješenja i znatno kraće vrijeme izvršavanja od determinističkih metoda. Jedna klasa nedeterminističkih algoritama koje smo proučavali na ovom projektu su tzv. *evolucijski algoritmi*. Naziv dolazi iz činjenice da je osnovna ideja prilikom dizajna ovakvih algoritama imitirati biološku, Darwinovu evoluciju: krenuvši od početne, nasumično odabrane “populacije” približnih rješenja, nove generacije rješenja dobivamo postupcima koji direktno imitiraju mutaciju, križanje i prirodnu selekciju. Konkretno problem čije smo rješenje tražili pomoću evolucijskih algoritama bio je poznati “Problem n kraljica”, u kojem je zadatak postaviti n kraljica na $n \times n$ šahovsku ploču tako da se nikoje dvije međusobno ne napadaju. Za ovaj problem razvili smo vlastitu verziju evolucijskog algoritma i usporedili ju s klasičnim determinističkim algoritmima. Rezultati usporedbe jasno su upućivali na prednost evolucijskih algoritama u ovakvim zadacima.

Za projekt “Grijanje pingvina” smo također iskoristili ideju iz prirode, no ovaj put u obliku motivacije. Poznato je da neke vrste pingvina provode duge periode vremena u velikim skupinama u kojima svojim tijelima štite nedavno izlegla jaja od hladnoće. Zanimalo nas je kako je moguće da grupa pingvina izdrži dane, tjedne, pa čak i mjesece antarktičke hladnoće bez imalo hrane. Naravno, pingvinima u sredini skupine je lakše jer ih griju okolni članovi skupine, no što je s onima na rubu? Cilj projekta bio je pojednostavnjenim matematičkim metodama opisati kako se toplina prenosi s pojedinog pingvina na njegove susjede te kako se pingvini premještaju unutar skupine u ovisnosti o vlastitoj temperaturi. Problem premještanja pingvina uspjeli smo svesti na sustav linearnih jednadžbi, te smo napravili prikladnu računalnu vizualizaciju kako bismo mogli promatrati kako bi se pingvini u jatu ponašali kada bi slijedili naša predviđanja.

Cilj projekta “IMO predictor” bilo je, kao što i ime najavljuje, predviđanje rezultata sljedeće Međunarodne matematičke olimpijade (IMO je kratica za “International Mathematical Olympiad”) koja će se održati u srpnju 2015. u Tajlandu. Pomoću raznih (često i vrlo složenih) statističkih modela, ekipa na ovom projektu je pokušavala iz svih dostupnih podataka o rezultatima prijašnjih natjecanja zaključiti kakvi će biti ekipni rezultati sljedeće godine. Njihove metode predviđanja za sada su testirane samo na prošlogodišnjim rezultatima, te su se u više slučajeva pokazale iznenađujuće preciznim. Predvidjeli su i rezultat hrvatske ekipe na sljedećoj Olimpijadi, no ovdje ga nećemo otkriti: nadamo se da će šestorka koja će predstavljati Hrvatsku u Tajlandu biti uspješnija od prognoza!

Projekt “Iz šupljeg u prazno” bio je namijenjen najmlađim polaznicima kampa. Cilj projekta bio je pronaći opće rješenje zadataka koji se često pojavljuju u raznim zbirkama zadataka i zagonetki, a u kojima se traži da određeni volumen tekućine dobijemo samo pomoću prelijevanja, koristeći pritom dva (ili više) vrča poznatog volumena. Prije nalaženja krajnjeg rješenja, trebali smo se upoznati s osnovama teorije brojeva, preciznije, s pojmom najvećeg zajedničkog djelitelja i usko vezanog Euklidovog algoritma. U konačnici smo uspjeli naći sveobuhvatne odgovore na pitanja vezana uz ovakve zadatke, ali smo se usput i dobro zabavili (i nekoliko puta smočili!) isprobavajući sa stvarnim vrčevima vlastita rješenja.



Na projektu “Kriptografija” smo pokušali odgovoriti na pitanje koje se vrlo često pojavljuje u praksi: kako poslati poruku primatelju tako da je ne može pročitati nitko osim samog primatelja. Naravno, ideja je šifrirati tekst tako da ga pročitati može samo onaj tko ima neke dodatne informacije o šifri. Čim izmislimo neku šifru, jasno je da se moramo zapitati koliko je ona sigurna: je li ipak moguće, i bez poznavanja ključnih informacija o šifri, dešifrirati dobivenu poruku? Na projektu smo naučili nešto o matematici koja leži u pozadini ovakvih pitanja. Analizirali smo prednosti i mane nekih klasičnih metoda šifriranja. Osnovna ideja u razbijanju mnogih tipova šifri bila je frekvencijska analiza – statistička metoda koja se bazira na bilježenju učestalosti pojedinih slova ili slogova u šifriranom tekstu. Osim klasičnih metoda kriptiranja, upoznali smo se i s metodom javnog ključa (koja se često zasniva na jednostavnim opservacijama iz teorije brojeva – primjerice na činjenici da je “teško” faktorizirati vrlo velike brojeve) i komentirali njezine sveprisutne primjene u informatičkoj tehnologiji.

Projekt “Simetrični poliedri” je također bio namijenjen mladim polaznicima. Cilj je bio upoznati sudionike projekta s osnovnim simetrijama u prostoru te trodimenzionalnim tijelima koja poštuju takve simetrije. Među ostalim, upoznali smo se s Arhimedovim tijelima (tijelima čije su stranice pravilni mnogokuti) i Platonovim tijelima (tijela čije su stranice sukladni pravilni mnogokuti) te smo dokazali da ih postoji samo pet različitih: tetraedar, kocka, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar. Za potrebe projekta izradili smo i mnoge papirnate modele koji su nam pomogli u vizualizaciji novih pojmova.

Učenici koji su sudjelovali na projektu “Statistika” upoznali su se s osnovnim metodama statistike i s pojmom statističkog testa. Zadatak na projektu je bio osmisliti vlastito istraživanje kojem bi se moglo pristupiti statističkim metodama te testirati hipoteze nekim od statističkih testova. Izbor je pao na istraživanje nekih pojava poznatih u psihologiji, ponajviše iz dva razloga: mnoge statističke metode razvijene su i korištene upravo za potrebe psihologije, stoga su se dobiveni rezultati mogli usporediti s prijašnjim istraživanjima u tom području; osim toga, nadohvat ruke bila je dostupna dovoljno velika populacija ispitanika – naravno, radilo se o polaznicima kampa. Testirano je nekoliko hipoteza vezanih za uspješnost rješavanja zadataka i dobiveni su neki vrlo zanimljivi rezultati.

Konačno, projekt “Zombi apokalipsa” nije bio tako strašan kao što mu ime zvuči. Cilj projekta bio je upoznati se s nekim matematičkim metodama koje se koriste u modeliranju širenja bolesti (zaraze) u određenoj populaciji. Napravili smo matematičke

modele za nekoliko različitih situacija i promatrali kako različiti parametri (kao što su uvođenje karantene, period inkubacije, vjerojatnost ozdravljenja i slično) utječu na brzinu širenja zaraze u populaciji.

Rezultati svih projekata bili su predstavljeni na završnoj, zajedničkoj prezentaciji na kojoj smo imali priliku predstaviti vlastite radove i upoznati se s temama drugih projekata.

Iako smo imali puno matematičkog posla, našli smo dovoljno slobodnog vremena i za razne zabavne aktivnosti, među kojima su najpopularniji bili sportovi (nogomet, košarka, frizbi) i kvizovi. Naravno, ljetni kamp ne bi bio "ljetni" bez kupanja, radi čega smo organizirali i kupanje i šetnju u obližnjem Rovinju. Večernji sati su ostajali slobodni za druženje i zabavu, no dvije smo večeri rezervirali za popularno-znanstvena predavanja. Ugostili smo profesora Antonia Šibera s Instituta za fiziku u Zagrebu, koji je održao vrlo zanimljivo predavanje pod nazivom "Virusi: matematički ubojiti". Drugi gost bio je naš stari prijatelj Marko Košiček (s Instituta Ruđera Boškovića) koji je održao predavanje "(Ovo nije) još jedno popularno-znanstveno predavanje". Time smo održali lijepu tradiciju popularno-znanstvenih predavanja na kojima svake godine ugošćujemo znanstvenike s predavanjima o popularnim znanstvenim temama i primjenama matematike u različitim znanstvenim disciplinama.

Tjedan dana proveden na ljetnom kampu doista je proletio u trenutku, no stigli smo sačuvati uspomene i nova prijateljstva koja će trajati mnogo dulje nego zima koja dolazi. U svakom slučaju, nadamo se da ćemo se skupiti u još većem broju idućeg kolovoza. Ipak, da dugi period do sljedećeg Ljetnog kampa ne bi ostao lišen matematičkih druženja, pobrinut će se *Zimska škola matematike* koju možete očekivati u siječnju 2015!