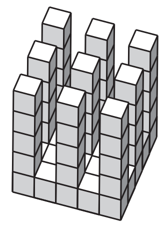
Međunarodno matematičko natjecanje "Klokan bez granica" 2014. g., 2. dio

Zadaci za učenike 4. razreda srednje škole (Students)

Pitanja za 3 boda:



1. Ako izvadimo određeni broj $1 \times 1 \times 1$ kockica iz $5 \times 5 \times 5$ kocke dobit ćemo tijelo koje se sastoji od stupova iste visine koji leže na istom podnožju, kao na slici. Koliko je kockica izvađeno?

A. 56 **B.** 60 **C.** 64 **D.** 68 **E.** 80

Rješenje: C.

2. Danas je Karlin, Emilijin i Ljiljin rođendan. Zbroj njihovih godina sada je 44. Kolika će suma njihovih godina biti sljedeći put kada to bude dvoznamenkast broj s jednakim znamenkama?

A. 55 **B.** 66 **C.** 77 **D.** 88 **E.** 99

Rješenje: C. Svake godine zbroj njihovih godina poveća se za 3. Za k godina povećat će se za $3k$. Taj broj sastojat će se od jednakih znamenki za $k = 11$ pa je rješenje $44 + 33 = 77$.

3. Ako je $a^b = \frac{1}{2}$ koliko iznosi a^{-3b}?

A. $\frac{1}{8}$ **B.** 8 **C.** -8 **D.** 6 **E.** $\frac{1}{6}$

Rješenje: B. $a^{-3b} = (a^b)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$.

4. U tri košare različitih veličina razmješteno je 48 loptica. Najmanja i najveća košara zajedno sadrže dvostruko više loptica nego srednja košara. Najmanja košara sadrži dva puta manje loptica nego srednja košara. Koliko loptica se nalazi u najvećoj košari?

A. 16 **B.** 20 **C.** 24 **D.** 30 **E.** 32

Rješenje: C. Označimo li s x broj loptica u najmanjoj, s y u srednjoj i sa z u najvećoj košari imamo jednakosti: $x + y + z = 48$, $x + z = 2y$, $2x = y$ iz kojih lako slijedi $x = 8$, tj. $z = 24$.

5. Koliko znamenki ima broj $\left(2^{22}\right)^5 \cdot \left(5^{55}\right)^2$?

A. 22 **B.** 55 **C.** 77 **D.** 110 **E.** 111

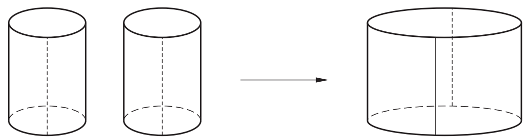
Rješenje: E. $\left(2^{22}\right)^5 \cdot \left(5^{55}\right)^2 = 2^{110} \cdot 5^{110} = 10^{110}$, a to je broj koji se sastoji od jedinice i 110 nula.

6. Zgodni Zdravko ima tajni e-mail račun za koji zna samo četvero njegovih prijatelja. Danas je na taj račun primio 8 poruka. Što je od navedenog sigurno istina?

A. Zdravko je primio dvije poruke od svakog prijatelja.
B. Zdravko nije mogao primiti 8 poruka od jednog svog prijatelja.
C. Zdravko je primio barem jednu poruku od svakog prijatelja.
D. Zdravko je primio barem dvije poruke od jednog svog prijatelja.
E. Zdravko je primio barem dvije poruke od dva različita prijatelja.

Rješenje: D.

7. Plaštevi dva identična valjka prerezani su po iscrtkanoj liniji i zalijepljeni tako da tvore jedan veliki valjak, kao na slici. Što možemo reći o volumenu velikog valjka u usporedbi s volumenom jednog manjeg valjka?



A. Ima 2 puta veći volumen. **B.** Ima 3 puta veći volumen. **C.** Ima π puta veći volumen. **D.** Ima 4 puta veći volumen. **E.** Ima 8 puta veći volumen.

Rješenje: D. Ako je radijus baze manjeg valjka r, onda je opseg baze $2r\pi$. Slijedi da je opseg baze velikog valjka $2 \cdot 2r\pi$, tj. radijus baze velikog valjka je $2r$. Volumen manjeg valjka je $r^2\pi h$, dok je volumen velikog valjka $(2r)^2\,\pi h = 4r^2\pi h$. Vidimo da je volumen velikog valjka 4 puta veći od volumena manjeg valjka.

8. U broju 2014 znamenke su različite i posljednja je veća od zbroja preostale tri. Prije koliko godina se ovo zadnji put dogodilo?

A. 5 **B.** 215 **C.** 305 **D.** 395 **E.** 485

Rješenje: C. To se zadnji put dogodilo 1709.

Pitanja za 4 boda:

9. Dimenzije kutije u obliku kvadra su $a \times b \times c$, uz $a < b < c$. Povećamo li a ili b ili c za neki broj, volumen kutije će se također povećati. U kojem slučaju će se volumen kutije najviše povećati?

A. Ako povećamo a. **B.** Ako povećamo b. **C.** Ako povećamo c.
D. Povećanje volumena isto je u A., B. i C. **E.** Ovisi o vrijednostima a, b i c.

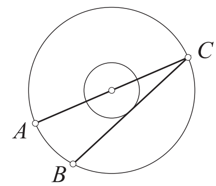
Rješenje: A. Volumen kutije s bridovima x, y i z je xyz. Povećamo li jednu stranicu za p novi volumen će biti $(x+p)yz = xyz + pyz$. Uočimo da se volumen povećao za pyz. Ta će promjena biti veća što su y i z veći pa ćemo najveću promjenu dobiti ako povećamo najkraći brid.

10. U nogometnoj utakmici pobjednik dobije 3 boda, gubitnik 0 bodova, a ukoliko se radi o izjednačenom rezultatu svaki tim dobije po 1 bod. Četiri tima A, B, C i D sudjeluju u nogometnom turniru. Svaki tim igra tri utakmice – po jednu protiv svakog od ostalih timova. Na kraju turnira tim A ima 7 bodova, a timovi B i C imaju po 4 boda. Koliko je bodova imao tim D?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3 **E.** 4

Rješenje: B. $7 = 3 + 3 + 1$, $4 = 3 + 1 + 0$ – tim A ima dvije pobjede i neriješen rezultat, timovi B i C imaju po jednu pobjedu, jedan poraz i jedan nerješen rezultat. Iz toga slijedi da tim D ima dva poraza i jedan nerješen rezultat, tj. 1 bod.

11. Radijusi dvije koncentrične kružnice odnose se u omjeru $1 : 3$. $\overline{AC}$ dijametar je velike kružnice, $\overline{BC}$ tetiva je velike kružnice koja je ujedno tangenta male kružnice, duljina dužine $\overline{AB}$ je 12. Tada je radijus velike kružnice



A. 13 **B.** 18 **C.** 21 **D.** 24 **E.** 26

Rješenje: B. Označimo dirałište tangente i male kružnice s D, a središte obiju kružnica sa S. Trokut SDC pravokutan je s pravim kutom kod vrha D (zbog tangente). Trokut ABC pravokutan je s pravim kutom kod vrha B (Talesov poučak). Ova dva trokuta imaju i jedan zajednički kut (kod vrha C) pa su slični. Postavimo omjer: $|AB| : |SD| = |AC| : |SC|$, tj. $12 : r = 2R : R$ iz čega imamo $r = 6$ pa je $R = 18$.

12. Koliko trojki (a, b, c) cijelih brojeva za koje vrijedi $a > b > c > 1$ zadovoljava nejednakost $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$?

A. nijedna **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3 **E.** beskonačno mnogo

Rješenje: C. Iz $a > b > c > 1$ slijedi $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < 1$ pa imamo $\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$, tj. $\frac{3}{c} > 1 \implies c < 3$. Kako treba biti $c > 1$ zaključujemo $c = 2$. Sada iz $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$ slijedi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}$, a iz toga opet imamo $\frac{1}{b} + \frac{1}{b} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}$, tj. $\frac{2}{b} > \frac{1}{2} \implies b < 4$. Kako treba biti $b > c = 2$ zaključujemo $b = 3$. Na kraju za a imamo $\frac{1}{a} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} > 1$, tj. $a < 6$. Kako treba biti $a > b = 3$ zaključujemo $a = 4$ ili $a = 5$. Dakle, samo dvije trojke, $(4, 3, 2)$ i $(5, 3, 2)$ zadovoljavaju zadanu nejednakost.

13. Realni brojevi a, b i c različiti su od nule, a n je prirodan broj. Poznato je da brojevi $(-2)^{2n+3}a^{2n+2}b^{2n-1}c^{3n+2}$ i $(-3)^{2n+2}a^{4n+1}b^{2n+5}c^{3n-4}$ imaju isti predznak. Što je od navedenog sigurno istinito?

A. $a > 0$ **B.** $b > 0$ **C.** $c > 0$ **D.** $a < 0$ **E.** $b < 0$

Rješenje: D.

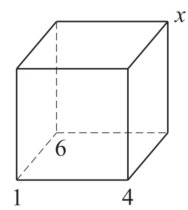
14. Šest tjedana je $n!$ sekunda. $n = ?$

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 10 **E.** 12

Rješenje: D. 6 tjedana $= 6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ sekundi $= (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (4 \cdot 6) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$.

15. Vrhovi kocke numerirani su od 1 do 8 tako da je zbroj brojeva na svakoj strani kocke isti. Brojevi 1, 4 i 6 već su postavljeni, kao na slici. Koji broj predstavlja x?

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 7 **E.** 8



Rješenje: A. *Uputa.* Zbroj brojeva na svakoj strani treba biti $\dfrac{1+2+\cdots+8}{2\cdot 2}=18$.

16. Funkcija $f(x)=ax+b$ zadovoljava jednakosti $f(f(f(1)))=29$ i $f(f(f(0)))=2$. Kolika je vrijednost parametra a?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

Rješenje: C. $f(f(f(1)))=a^3+a^2b+ab+b=29$, $f(f(f(0)))=a^2b+ab+b=2$. Iz ove dvije jednakosti vidimo da je $a^3+2=29$, tj. $a=3$.

Pitanja za 5 bodova:

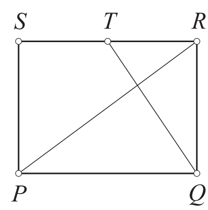
17. Među 10 različitih prirodnih brojeva točno ih je 5 djeljivo s 5 i točno 7 je djeljivo sa 7. Neka je M najveći od ovih 10 brojeva. Koji je najmanji mogući M?

A. 105 **B.** 77 **C.** 75 **D.** 63 **E.** ništa od navedenog

Rješenje: E. Među tih 10 brojeva barem 2 moraju biti djeljiva i s 5 i sa 7. Najmanji takvi brojevi su 35 i 70. Ostali brojevi mogu, primjerice, biti: 5, 7, 10, 14, 15, 21, 28, 42. Vidimo da je najmanji mogući M jednak 70.

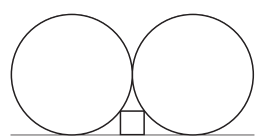
18. Dan je pravokutnik $PQRS$. T je polovište stranice $\overline{RS}$. $\overline{QT}$ je okomito na dijagonalu $\overline{PR}$. Koliki je omjer $|PQ|:|QR|$?

A. $2:1$ **B.** $\sqrt{3}:1$ **C.** $3:2$ **D.** $\sqrt{2}:1$ **E.** $5:4$



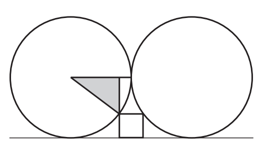
Rješenje: D. Trokuti PQR i QRT su slični pa imamo omjer $|TR|:|QR|=|QR|:|PQ|$, tj. $\frac{1}{2}|PQ|:|QR|=|QR|:|PQ|$, odnosno $|QR|^2=\frac{1}{2}|PQ|^2$ iz čega slijedi $\dfrac{|PQ|}{|QR|}=\sqrt{2}$.

19. Kvadrat je smješten između horizontalnog pravca i dvije kružnice radijusa 1 koje se međusobno dodiruju i koje diraju pravac, kao na slici. Kolika je duljine stranice ovog kvadrata?



A. $\dfrac{2}{5}$ **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **D.** $\dfrac{1}{5}$ **E.** $\dfrac{1}{2}$

Rješenje: A. Označimo s x duljinu stranice kvadrata. Trokut istaknut na slici pravokutan je s katetama duljina $1-\frac{x}{2}$ i $1-x$ i s hipotenuzom duljine 1. Pitagorin poučak nam daje jednadžbu $1^2=\left(1-\frac{x}{2}\right)^2+(1-x)^2$, tj. $\frac{5}{4}x^2-3x+1=0$ čija su rješenja 2 i $\frac{2}{5}$. Rješenje 2 nema smisla.



20. Tin je zapisao nekoliko različitih prirodnih brojeva, ne većih od 100. Njihov umnožak nije bio djeljiv s 54. Koliko je najviše brojeva mogao zapisati?

A. 8 **B.** 17 **C.** 68 **D.** 69 **E.** 90

Rješenje: D. $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Među zapisanim brojevima ne smiju se naći tri broja djeljiva s 3. Izbacimo li sve brojeve djeljive s 3, osim dva, između 1 i 100 ostane 69 brojeva.

21. Dva pravilna mnogokuta duljine stranice 1 leže sa suprotnih strana njihove zajedničke stranice $\overline{AB}$. Jedan od njih je 15-terokut $ABCD\ldots$, a drugi je n-terokut $ABZY\ldots$ Za koji n će udaljenost $|CZ|$ biti jednaka 1?

A. 10 **B.** 12 **C.** 15 **D.** 16 **E.** 18

Rješenje: A. Trokut BCZ jednakostraničan je (skiciraj sliku) pa su njegovi kutovi 60°. Unutarnji kut pravilnog 15-terokuta iznosi 156°. Zbroj kutova oko vrha B treba biti 360° pa imamo $156^\circ + 60^\circ + \alpha = 360^\circ$ iz čega vidimo da je unutarnji kut n-terokuta $\alpha = 144^\circ$. Sada iz $144 = \dfrac{(n-2)\cdot 180}{n}$ imamo $n = 10$.

22. Jednakosti $k = (2014+m)^{\frac{1}{n}} = 1024^{\frac{1}{n}} + 1$ dane su za prirodne brojeve k, m, n. Koliko različitih vrijednosti može poprimiti parametar m?

A. nijednu **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3 **E.** beskonačno mnogo

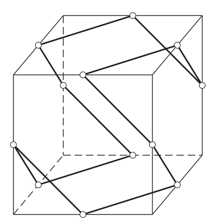
Rješenje: C. Kako je $1024 = 2^{10}$ i broj k treba biti prirodan, za broj n u obzir dolaze vrijednosti 1, 2, 5 i 10. Uvrštavanjem redom ovih vrijednosti vidimo da za $n = 1$ i $n = 2$, m neće biti prirodan broj. Dakle, m može poprimiti dvije različite vrijednosti.

23. Funkcija $f : Z \to Z$ zadovoljava uvjete $f(4) = 6$ i $xf(x) = (x-3)f(x+1)$. Kolika je vrijednost izraza $f(4)f(7)f(10)\cdot\ldots\cdot f(2011)f(2014)$?

A. 2013 **B.** 2014 **C.** $2013 \cdot 2014$ **D.** 2013! **E.** 2014!

Rješenje: D. Uputa: $f(x+1) = f(x)\cdot\dfrac{x}{x-3}$. Raspisivanjem se vidi da je $f(2014) = 2013\cdot 2012\cdot 2011$, $f(2011) = 2010\cdot 2009\cdot 2008$, itd. Zato je $f(4)f(7)f(10)\cdot\ldots\cdot f(2011)f(2014) = 2013!$.

24. Dijagram prikazuje poligon čiji su vrhovi polovišta bridova kocke. Unutarnji kut poligona definiran je kao manji kut između dvije stranice sa zajedničkim vrhom. Koliki je zbroj svih unutarnjih kutova ovog poligona?



A. 720° **B.** 1080° **C.** 1200° **D.** 1440° **E.** 1800°

Rješenje: B. Imamo 6 kutova od 60° (vrhovi tvore jednakostraničan trokut duljine stranice $\frac{a\sqrt{2}}{2}$) i 6 kutova od 120° (vrhovi tvore jednakokračan trokut duljina stranica $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ i $\frac{a\sqrt{6}}{2}$). Dakle, zbroj je 1080°.