Arhimedovo podizanje i vaganje Zemlje pomoću poluge

Petar Svirčević[1]

Na internetu se mogu pročitati različite teze o Arhimedovom podizanju Zemlje pomoću poluge, tako se tvrdi da on nije svjestan koliku je grešku napravio. Svakako da je taj pokus samo virtualni, a suvišno je napominjati da je toga bio svjestan i sam Arhimed. Jedna od često citiranih njegovih izjava je: *"Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu, pa ću vam podići Zemlju"*. Dakle, on se izrazio pjesnički.

Arhimed (287.–212. p.n.e.) iz Sirakuze je najveći fizičar starog vijeka i jedan od najvećih (najgenijalnih) matematičara svih vremena, koji je dao (između ostalog) strogu matematičku formulaciju *zakona poluge*, iako je ovaj bio već daleko prije poznat i primjenjivan u praksi. Na osnovu tog zakona, koji je uzet kao aksiom, egzaktno je izgrađena statika. No, treba napomenuti, *zakon poluge* može se matematički dokazati. Pretpostavka je da je težište ravnog homogenog štapa u njegovom polovištu, što je i iskustvena činjenica. Jasno je, da se pokus za potvrdu navedenog aksioma izvodi u homogenom gravitacijskom polju (više u [5]).

Koje veličine je morao imati Arhimed, da bi mogao izvesti virtualno podizanje Zemlje? Kao prvo trebao je imati masu iste. Postoji više načina za utvrđivanje te vrijednosti. U to vrijeme bi najjedostavnije bilo imati volumen i prosječnu gustoću Zemlje, pa bi njezina masa bila

$$m_z = V_z \rho_z. \tag{1}$$

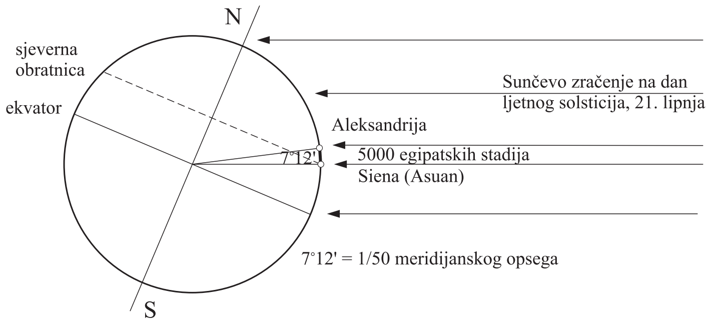
Sada ćemo se najprije pozabaviti nalaženjem veličine V_z. Naime, do prvog iznenađujuće točnog rezultata je došao grčki matematičar Eratosten (284.–192. p.n.e.) iz Cirene, grčke kolonije na afričkoj obali Sredozemlja. Vidimo, da su Arhimed i Eratosten bili suvremenici. No, štoviše oni su, kao dobri prijatelji, surađivali dajući svoja naučna dostignuća jedan drugome na uvid, iako je Eratosten živio i radio u Aleksandriji, gdje je bio ravnatelj čuvene knjižnice *Museion*, dok je Arhimed živio u Sirakuzi (Magna Graecia) na Siciliji. Treba napomenuti, da je i Arhimed bio na školovanju u Aleksandriji, koja je tada bila glavni centar obrazovanja za prirodne znanosti.

Kako je Eratosten izmjerio dimenzije Zemlje? Naime, on se našao u Sieni (današnji Asuan i južni Egipat) na dan 21. lipnja, gdje je primijetio da u bunaru u podne nema sjene, a to znači da Sunce kulminira, dakle zrake Sunca tu padaju okomito (ljetni solsticij). Treba napomenuti, da se Siena ne nalazi točno na sjevernoj obratnici (nalazi se na $24°05'$ N, a geografska širina sjeverne obratnice je $23°27'$). Tada je Eratostenu sinula velika ideja, da bi mogao izračunati dimenzije Zemlje, pa se za godinu dana (oko 240. p.n.e.) 21. lipnja nalazio u Aleksandriji, gdje je u 12 h izmjerio, da zrake padaju pod kutom od $82°48'$, dakle razlika između izmjerenih kutova je $7°12'$.

Pretpostavio je, da se Siena i Aleksandrija nalaze na istom merdijanu, što nije potpuno točno (Aleksandrija se nalazi na $29°55'$ E, a Siena na $32°56'$ E od Greenwicha). Ako pogledamo sliku 1, onda slijedi da je $7°12'/360° = 1/50$, a to znači da je duljina luka između Siene i Aleksandrije $1/50$ duljine kružnice (to je u stvari elipsa malog

[1] Autor je profesor u mirovini u Tehničkoj školi u Zagrebu, e-pošta: `petar.svircevic@zg.t-com.hr`

ekscentriciteta) preko sjevernog i južnog pola, dakle i tu se pojavljuje opet mala greška zbog spljoštenosti Zemlje. Iz toga slijedi, da duljina te merdijanske kružnice nije točno jednaka duljini ekvatora.



Slika 1.

I sada je Eratostenu trebala još udaljenost između Siene i Aleksandrije (to je u stvari duljina luka), a taj podatak je 5000 *stadija*, kojega je vjerojatno uzeo iz katastarskih knjiga. (Naime, po naredbi faraona Ramzesa II. u 13. stoljeću p.n.e. izvršeno je mjerenje Egipta, i uredile su se "knjige" vezane za tu izmjeru, a tokom sljedećih stoljeća točnost tih podataka se popravljala.) Ako se radilo o *egipatskom stadiju*, koji iznosi 157.5 m, tada Eratosten dobiva da je meridijanski opseg Zemlje 250 000 stadija, a to je 39 375 km (u stručnoj literaturi se često operira s 39 400 km), što je jako dobra vrijednost. Meridijanski opseg Zemlje je nešto manji od ekvatorskog. Na osnovu iznesenog zaključujemo, da je Arhimed mogao izračunati volumen Zemlje, jer su mu bila dostupna Eratostenova mjerenja. No, u ono vrijeme nije se znala prosječna gustoća Zemlje, koja iznosi

$$\rho_z = 5515.3 \text{ kg m}^{-3}, \tag{2}$$

tako da se pomoću (1) nije moglo doći do preciznije vrijednosti za masu. Vrijednost (2) se danas može dobiti koristeći zakon opće gravitacije. Ne treba posebno napominjati, da su se tada upotrebljavale druge jedinice za masu i duljinu.

Sada ćemo nastaviti pripreme za "podizanje" Zemlje *Arhimedovom metodom*, ali ćemo koristiti fizikalne konstante današnje velike preciznosti. Dakle imamo:

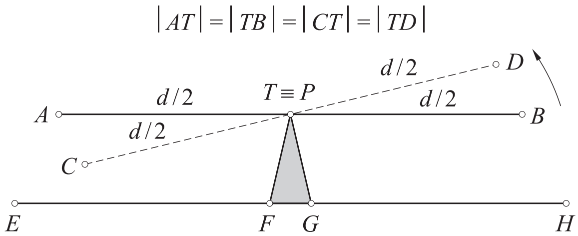
$$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} \approx 300\,000 \text{ kms}^{-1} \quad \text{(brzina svjetlosti u vakuumu)} \tag{3}$$

$$m_z = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad \text{(masa Zemlje)} \tag{4}$$

$$R_z = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m} = 6370 \text{ km} \quad \text{(polumjer Zemlje)} \tag{5}$$

$$d_{SG} = 9.461 \cdot 10^{15} \text{ m} = 9.461 \cdot 10^{12} \text{ km} = 1 \text{ sg} \quad \text{(svjetlosna godina).} \tag{6}$$

Prije nego počnemo rješavati glavni dio našeg virtualnog pokusa, moramo pojasniti neke nedorečenosti u vezi: poluge, njezinog uporišta i homogenog gravitacijskog polja. Dakle, pod polugom ćemo podrazumijevati homogeni ravni štap, kojega ćemo u polovištu, a to je i njegovo težište, postaviti na vrh uporišta kao na slici 2, i pretpostavit ćemo, da ako taj štap ljuljamo, odnosmo klackamo, neće doći do proklizavanja, dakle on je stabilno "prikopčan" za uporište.



Slika 2.

Uporište je "trokut" FGP. Iskustvena je činjenica, da ako ovaj štap postavimo u položaj $\overline{AB}$, on će tako trajno i ostati, ako se sve to nalazi u homogenom gravitacijskom polju. No, ako taj štap malo pomaknemo u neki položaj $\overline{CD}$ i ostavimo (bez impulsa), i tada će on ostati trajno u tom položaju. Svakako, sve ovo bi se isto zbivalo, da i ne postoji gravitacijsko polje. *Sada, i u svim sljedećim pokusima pretpostavit ćemo da je gravitacijsko polje homogeno, bez obzira koliko je dugačka poluga. Nadalje ćemo pretpostaviti, da su gravitacijske silnice okomite na dužinu* $\overline{EH}$. *Idealizirana poluga ne mijenja oblik (ne deformira se niti puca) ma kolikim silama djelovali na nju. Također, sila se po poluzi po pretpostavci širi trenutno.*

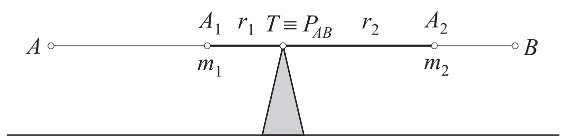
Idemo sada na općenitiji slučaj. Ako imamo polugu $\overline{A_1A_2}$, i ona je u ravnoteži (slika 3), tada *Arhimedov zakon* za nju glasi

$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \tag{7}$$

gdje je duljina poluge

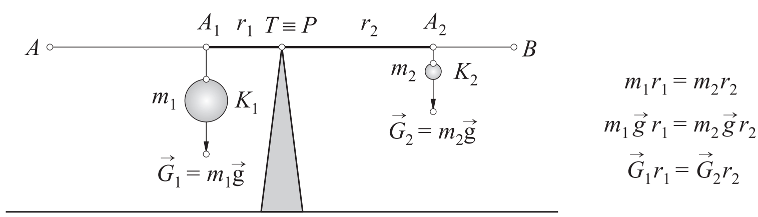
$$|A_1A_2| = r_1 + r_2. \tag{8}$$

Svakako, da se ovdje podrazumijeva da je masa m_1 koncentrirana u točki A_1, a masa m_2 u točki A_2, dok je točka T težište, i konačno r_1 i r_2 su duljine pripadnih krakova. Jasno je, da u praksi ne možemo realizirati model poluge kao na slici 3 da bi vrijedilo (7), i to zbog razloga što krakovi imaju masu.



Slika 3.

Kako ćemo onda realizirati pokus u praksi, pa da vrijedi (7)? To ćemo realizirati tako, da uzmemo ravni homogeni štap (polugu) $\overline{AB}$ i postavimo na uporište kao na slici 2, a onda na njemu stavimo masu m_1 u točki A_1 i masu m_2 u točki A_2, i to tako da vrijedi (7), pa je time poluga $\overline{A_1A_2}$ "izgubila" masu. Svakako, da vrijedi $T \equiv P_{AB}$, gdje je T težište poluge $\overline{A_1A_2}$, a P_{AB} je polovište i težište poluge $\overline{AB}$ (prije opterećenja masama). Ovdje možemo imati prigovor, što smo mase "komprimirali" u točke.



Slika 4.

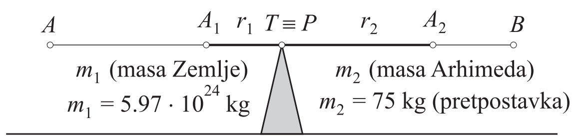
Konačno eliminiramo sada “komprimirane” točke, pa ćemo u potpunosti imati mogućnost praktične realizacije. Naime, na slici 4 vidimo da smo u točki A_1 učvrstili kuglu K_1 čija je masa m_1, a na drugom kraju poluge u točki A_2 učvrstili kuglu K_2 čija je masa m_2. Konačno recimo i to, da ako skalarni oblik Arhimedovog zakona u obliku (7) “pomnožimo” s vektorom gravitacije $\overrightarrow{g}$, tada je

$$m_1 r_1 \overrightarrow{g} = m_2 r_2 \overrightarrow{g} \quad \text{ili} \quad \overrightarrow{G_1} r_1 = \overrightarrow{G_2} r_2, \tag{9}$$

a to je Arhimedov zakon u vektorskom obliku.

Arhimedovo podizanje Zemlje pomoću poluge

I na kraju idemo na Arhimedovo virtualno podizanje Zemlje pomoću poluge, kao što je prikazano na slici 5. I ovdje ćemo pokus pojednostaviti, tako da se mase Zemlje i Arhimeda nalaze u točkama na krajevima poluge.



Slika 5.

Uzmimo da je udaljenost mase Zemlje od težišta $r_1 = 1$ m, a masa Arhimeda je $m_2 = 75$ kg, i nalazi se u točki A_2. No, ako ove vrijednosti i (4) uvrstimo u (7), uz uvažavanje (6), dobivamo da je duljina Arhimedovog kraka začuđujeće velika i iznosi

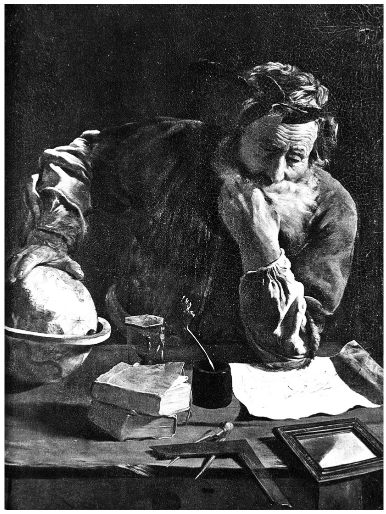
$$r_2 \approx 7.96 \cdot 10^{22} \text{ m} \approx 8\,400\,000 \text{ svjetlosnih godina (sg)}. \tag{10}$$

Koliko je ovo velika udaljenost vidi se, ako bi nju usporedili s promjerom naše galaksije (Mliječnog puta ili Kumove slame ili Rimske ceste) koja je u obliku diska, kojega promjer iznosi oko 100 000 sg (poprečni presjek je puno manji). Prema tome, krak na Arhimedovoj strani poluge je oko 84 puta veći od promjera naše galaksije.

Napomenimo i to, da mi možemo otići i u drugu virtuelnu krajnost i podizati Zemlju pomoću poluge čija je duljina $r_1 + r_2 = (9.4 \cdot 10^{-22} + 1)$ m, dakle masa Zemlja je u točki koja je od uporišta udaljena $r_1 = 9.4 \cdot 10^{-22}$ m, a masa Arhimeda je u točki, koja je udaljena od uporišta $r_2 = 1$ m. Ljepota Arhimedove tvrdnje očito nije u izvedivosti njegove ideje, već u generalizaciji principa proizašlog iz svakodnevne upotrebe i opažanja u prirodi.

Arhimedovo vaganje Zemlje pomoću poluge

Kako bi izvagali Zemlju Arhimedovom vagom? To je vrlo “jednostavno”. U točku A_1 se postavi koncentrirana masa Zemlje, koja je udaljena od uporišta $r_1 = 1$ m, i onda bi se poluga nagnula na lijevu stranu. No, tada bi Arhimed počeo hodati od uporišta po desnom kraku, i kada bi prešao put od $r_2 \approx 8\,400\,000$ sg, tada bi poluga došla u položaj ravnoteže. Uvrštavanjem ovih vrijednosti u (7) dobili bi masu Zemlje, koja je dana s (4).



Izvor: Wikipedija

Zaključak o Arhimedovim virtualnim astronomskim pokusima

I na kraju recimo, da Arhimed nije mogao doći do ovih veličina, jer ključne fizikalne i astronomske veličine za ovaj problem nisu bile poznate, budući da znanstvena i tehnološka baza za njihovo nalaženje nije bila "zrela". Dakle Arhimed, niti je bio naivan niti je napravio "veliku grešku", kako se tvrdi u nekim prilozima na internetu. Njegova ideja da se iskustvo i opažanje *generalizira,* te poslije primijeni na dotad neistraženim slučajevima će tek nakon dvije tisuće godina u svom punom sjaju iz korijena promijeniti fiziku kroz rad Galileja i Newtona, a ubrzo i ostale prirodne znanosti.

Literatura

[1] *Ahrens Global Earth Physics*, A Handbook of Physical Conatants, pp. 8.

[2] G. E. R. Lloyd, *Greek Science After Aristotle*, W. W. Norton, New York, 1973.

[3] P. James, i N. Thorpe, *Drevni izumi*, Mozaik knjiga, Zagreb, 2007.

[4] Velimir Kruz, *Tehnička fizika za tehničke škole*, Školska knjiga, Zagreb, 1969.

[5] Petar Svirčević, *Matematički dokaz Arhimedovog zakona poluge*, Matematičko-fizički list, br. 4, Zagreb 2005./2006.