Yakov G. Sinai – dobitnik Abelove nagrade za 2014.

Braslav Rabar[1], *Siniša Slijepčević*[2]

Slika 1. Yakov G. Sinai

Da li su matematičari i fizičari poput pasa i mačaka? Yakov G. Sinai, dobitnik za 2014. vjerojatno najuglednije međunarodne nagrade za matematiku – Abelove (vidi okvir) – je ispričao svoju znanstvenu filozofiju u esejčiću s upravo tim imenom [1]. Ukratko prepričano: sve do šezdesetih godina prošlog stoljeća, fizičari i matematičari su se uglavnom ignorirali. Vodeći ruski fizičar tog vremena, L. Landau, je smatrao da je najsloženija matematika potrebna za teorijsku fiziku kvadratna jednadžba (uz tu i tamo poneku diferencijalnu jednadžbu), a slični stavovi se pripisuju i R. Feynmanu. Matematičari bi odgovorili da se "fizičari odnose prema matematici kao kriminalci prema kaznenom zakonu" (I. M. Gelfand), tj. ili je ignoriraju ili čine sve sasvim suprotno. No danas su granice fizike i matematike vrlo porozne uz plodnu razmjenu ideja i ponekad znanstvenika, za što je Yakov G. Sinai jedan od najzaslužnijih.

Na mladog Yakova, rođenog 21. rujna 1935. u Moskvi, najveći je utjecaj imao djed, Benjamin Fedorovich Kagan, značajan ruski matematičar. Sinai je uz to kao mentora za svoj doktorat imao jednog od matematičkih velikana 20. stoljeća, Andreja Kolmogorova. Kolmogorovljevi ključni rezultati su u velikoj mjeri usmjerili i budući rad Yakova Sinaija. Kolmogorov je poznat kao jedan od utemeljitelja moderne teorije vjerojatnosti – danas širom prihvaćeni aksiomi teorije vjerojatnosti se uglavnom smatraju Kolmogorovljevim. Uz to, Kolmogorov je ponudio matematička objašnjenja nekih bitnih fizikalnih fenomena, poput fenomena turbulencije u fluidima (tekućinama, plinovima).

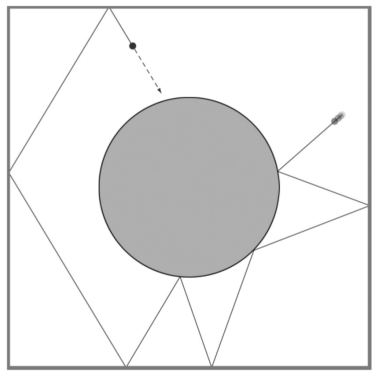
"Obično ne vjerujem fizičarima dok sam ne nađem dokaz ili bar vlastito objašnjenje njihovih rezultata" – piše Sinai o svojem pristupu teorijskoj fizici. Vjerojatno najvažnija njegova otkrića su upravo takva "objašnjenja", koja su pojasnila neka bitna dotad prilično mutna područja teorijske fizike. Dva takva ključna pojma koja je Sinai u velikoj mjeri pojasnio su *ergodičnost* i *entropija*. I danas, ako pitate dva fizičara za objašnjenje tih pojmova, dobit ćete vjerojatno prilično različite interpretacije. Sinai je dao, barem matematičarima bitne, precizne definicije.

Sinai je ergodičnost objasnio pomoću biljara. Zamislimo biljarski stol koji nije nužno pravokutan, već bilo kakvog oblika. Uklonimo mu rupe, i zamislimo savršenu biljarsku loptu koja se giba bez trenja, odnosno zauvijek konstantnom brzinom. Biljarska lopta se odbija od rubova stola (ne nužno ravnih) pod istim kutem obzirom na tangentu na rub stola. Danas se taj model zove Sinaijev biljar. Zanima nas kakvu putanju će imati naša biljarska lopta.

[1] Znanstveni je novak na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, e-pošta: `brabar@math.hr`

[2] Izvanredni je profesor na MO PMF-a Sveučilišta u Zagrebu, e-pošta: `slijepce@math.hr`

Recimo da je naš biljarski stol krug. Nakon kratkog mozganja, vidimo da se biljarska lopta giba ili periodično, po stranicama pravilnog poligona ili sličnog lika; ili skoro periodično ("kvaziperiodično"). (Nacrtajte razne putanje sami i to provjerite!) Sinai se pitao – postoji li oblik biljarskog stola koji ima sljedeće svojstvo: svaka putanja biljarske lopte će "proći" cijeli biljarski stol tog oblika? Drugim riječima, postavimo na biljarski stol proizvoljno mali "čunjić". Sinai je želio konstruirati biljarski stol tako da bi bilo kako "puknuta" biljarska lopta (također proizvoljno mala) prije ili kasnije srušila bilo gdje postavljeni čunjić. To jasno ne vrijedi za savršeno okrugli biljarski stol – na primjer biljarska kugla koja se giba po stranicama jednakostraničnog trokuta neće nikad proći blizu središta kružnice.



Slika 2. Sinaijev biljar (izvor: Georg Stamatiou, Wikipedia)

Sinai je na biljarskom stolu izbušio rupu (vidi sliku 2). Točnije, spojio je biljar i fliper, i promatrao kvadratni biljarski stol s velikim okruglim rubom s unutarnje strane. Za takav biljar je onda dokazao da će *svaka putanja biljarske kugle* proći prije ili kasnije cijelom površinom biljarskog stola. Drugim riječima, dokazao je da je taj model *ergodičan* [2].

Ergodičnost je u statističkoj fizici bila pretpostavka koju fizičari često uzimaju kao aksiom. Zamislimo puno čestica plina u zatvorenoj kutiji. One se gibaju slično (u pojednostavljenom modelu) kao Sinaijeva biljarska lopta – pravocrtno i konstantnom brzinom, dok ne se odbiju od druge čestice, ili ruba kutije. Fizičari bi pretpostavili da se – ako čestica ima dovoljno mnogo – ponašanje našeg plina može objasniti statistički. To znači da je dovoljno odrediti *vjerojatnost* svakog stanja našeg plina, te da će se, bez obzira na početne položaje i brzine čestica plina ("početne uvjete"), položaji i brzine čestica s vremenom ponašati u skladu s vjerojatnostima tih stanja. Drugim riječima, naš model plina u kutiji je ergodičan. No da li je zaista takav?

Dokazujući da je model biljara ergodičan, Sinai je sebi i drugima pojasnio zašto je pretpostavka ergodičnosti u statitističkoj fizici opravdana. No njegov doprinos je tu i veći.

Prvo, pokazao je da čestica plina ne mora biti jako puno da bi ergodičnost vrijedila. Ergodičnost je do tad uglavnom bila vezivana uz modele s beskonačno (ili skoro beskonačno) mnogo "stupnjeva slobode". Sinai je pokazao da je ponekad i samo jedna čestica dovoljna.

Drugo, Sinai je dao doprinos razumijevanju koji su fizikalni modeli ergodični, a koji nisu. Jasno je da nisu svi fizikalni modeli ergodični. Kad bi, primjerice, solarni sustav bio ergodičan, zemlja bi prije ili kasnije prošla proizvoljno blizu suncu što sigurno ne bi bilo previše ugodno iskustvo. Usput, rigorozno objašnjenje zašto solarni sustav i slični sustavi *nisu ergodični*, već često imaju stabilno periodično gibanje, dolazi iz iste škole, i poznato je kao Kolmogorov-Arnold-Moser ("KAM") teorem. Danas je za puno modela poznato da li i kada su ergodični, a to svojstvo se i zove (dijelom) u čast Sinaiju: ergodični sustavi imaju takozvanu Sinai-Ruelle-Bowen, ili SRB mjeru.

A entropija? Ako čitatelja, recimo srednjoškolca koji je za entropiju već čuo, značenje te riječi zbunjuje, to je u redu. Malo je izraza u znanosti podnijelo toliko interpretacija i ponekad zloupotreba kao ta riječ. Na stranici Wikipedije [3] ima preko 30 različitih značenja i definicija.

Sinaijev doprinos je precizna, matematička definicija entropije, koja se i danas zove Sinai-Kolmogorovljeva entropija. Zamislimo da nam je u modelu biljara poznata pozicija i vektor brzine naše biljarske kugle, ali ne sasvim precizno: recimo na 4 decimale, ili općenito s preciznošću δ. Pitanje je: koliko dobro možemo predvidjeti poziciju naše biljarske kugle nakon proteklog vremena T? Preciznije, želimo odrediti tu poziciju unutar kruga s određenim radijusom $r(T)$. Koliki je najmanji radijus tog kruga? Za biljarski stol koji je sam savršen krug, može se pokazati da se biljarska kugla nakon vremena T nalazi unutar kruga radijusa $c\delta T$, gdje je c neka konstanta, a δ preciznost poznavanja početne pozicije. To i nije tako loše – poziciju naše biljarske kugle možemo odrediti prilično precizno, ako je dobro izmjerimo na početku. A što s biljar-fliper stolom sa slike 2? Sinai je pokazao da za taj biljarski stol radijus najmanjeg kruga unutar kojeg naša kugla nakon vremena T raste eksponencijalno s vremenom, to jest

$$r(T) = c\delta e^{\varepsilon T}, \tag{1}$$

gdje su c, ε neke konstante. Eksponencijalna funkcija raste iznimno brzo, što znači da će, bez obzira na preciznost δ kojim izmjerimo početne uvjete, vrlo brzo taj krug biti veći od veličine samog biljarskog stola. To u praksi znači da uopće ne možemo predvidjeti poziciju naše biljarske kugle nakon relativno kratkog vremena. Taj fenomen je danas poznat kao *leptirov efekt*: mahanje leptirovih krila danas u Tokiju može uzrokovati promjenu vremena za nekoliko tjedana u Zagrebu. Fizikalni modeli kao Sinaijev biljar-fliper, i vjerojatno meteorološki model iz priče o leptiru, su iznimno osjetljivi o početnim uvjetima. Leptir će tako vrlo malom promjenom brzine gibanja zraka svojim krilima (što odgovara vrijednosti δ u gornjem dijelu priče) uzrokovati značajne promjene vremenskih uvjeta nakon relativno malog vremena T. Malog vremena, jer razlika δ u početnim uvjetima raste eksponencijalno s vremenom T (kao u formuli (1)), dakle iznimno brzo.

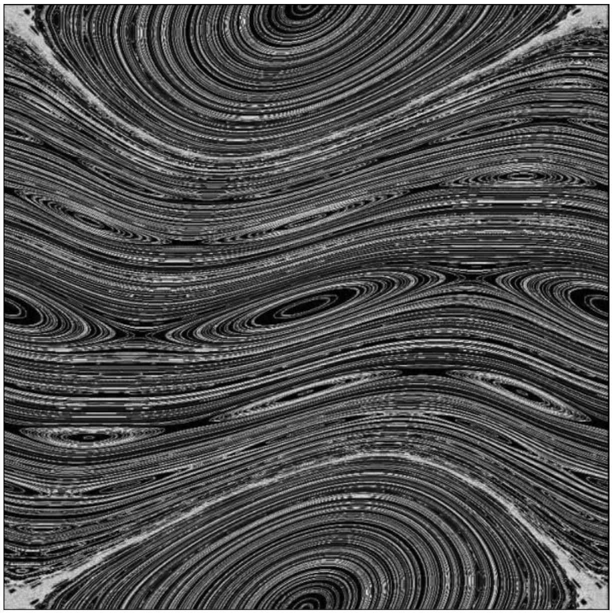
Sinai je (uz suradnju svog mentora Kolmogorova), precizno definirao taj efekt eksponencijalno brzog "gubljena informacije o početnim uvjetima". Ta vrijednost – za naš fliper-biljar broj ε iz formule (1) (najmanji takav da (1) vrijedi, preciznije infimum svih vrijednosti da (1) vrijedi), danas se zove Sinai-Kolmogorovljeva entropija. Entropija može biti $\varepsilon = 0$ ili strogo pozitivna. Ako je $\varepsilon > 0$, kažemo da je naš model osjetljiv o početnim uvjetima, ili – popularnije – *kaotičan*. Sinaijev doprinos je nekoliko ekvivalentnih, novih definicija te entropije (nešto drugačijih nego u ovom tekstu), te prvi dokaz da neki vrlo jednostavni sustavi, poput fliper-biljara, imaju entropiju koja je veća od nule.

Danas je Sinai-Kolmogorovljeva entropija jedan od centralnih pojmova matematičke fizike. Postoji niz otvorenih pitanja kako se taj matematički pojam entropije odnosi s drugim značenjima entropije, te kolika je zaista entropija mnogih fizikalnih modela. Spomenimo za kraj samo jedan, iznimno bitan otvoreni problem.

Promotrimo preslikavanje u ravnini dano s $f(x,p) = (x', p')$, definirano formulama

$$x' = x + p + k\sin(2k\pi x),$$
$$p' = p + k\sin(2k\pi x),$$

gdje je k parametar. To preslikavanje, poznato kao Chirikovljevo (ili standardno), možemo ilustrirati kao na slici 3. Na njoj smo nacrtali *fazni portret* tog preslikavanja. Preciznije, odaberemo neku točku (x,p) u ravnini, te nacrtamo točke (x,p), $f(x,p)$, $f(f(x,p))$, $f(f(f(x,p)))$ itd. istom bojom. Numerički algoritmi pokazuju (za vrijednost parametra k različitu od nule) da Chirikovljevo preslikavanje ima pozitivnu Sinai-Kolmogorov entropiju. No da li je to točno? Dokaz da je Sinai-Kolmogorovljeva entropija za Chirikovljevo preslikavanje veća od nule bi bio izniman matematički podvig. Mnogima bi precizna numerička simulacija bila dovoljan argument za tu tvrdnju. No postoji niz razloga zašto bi numerika mogla davati pogrešan zaključak. A i sam Yakov G. Sinai bi želio vidjeti precizniji razlog ili dokaz.



Slika 3. Chirikovljevo preslikavanje

Literatura

[1] YA. G. SINAI, *Mathematicians and Physicists = Cats and Dogs?*, Bulletin of the American Mathematical Society **43** (2006), 563–565.

[2] YA. G. SINAI, *On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics*, Doklady Akademii Nauk SSSR **153** (1963), 1261–1264.

[3] `http://en.wikipedia.org/wiki/Entropy_%28disambiguation%29`

Abelova nagrada

Abelova nagrada, koju smatraju "Nobelovom nagradom" za matematiku, je vjerojatno najprestižnija međunarodna nagrada za matematiku. Kako se Nobelova nagrada za matematiku ne dodjeljuje, najpoznatija nagrada za matematiku je dugo bila Fieldsova medalja. No iako ima veliki ugled, Fieldsova medalja je bitno različita od Nobelove: dodjeljuje se isključivo relativno mladim matematičarima (koji nisu stariji od 40 godina). Uz to, novčana nagrada za Fieldsovu medalju (oko deset tisuća Eura) je otprilike sto puta manja od one za Nobelovu nagradu (oko milijun Eura), što joj među neupućenima smanjuje vrijednost. Iako se Abelova nagrada dodjeljuje tek od 2003., već je stekla ogromni ugled, što zbog dosadašnjih nagrađenih – vrhunskih živućih matematičara, a što zbog toga što je dodjeljuje Norveška akademija znanosti, ista ona koja uz Švedsku akademiju dodjeljuje i Nobela. Uz to, Abelova nagrada donosi i oko 750 tisuća Eura, gotovo kao Nobelova.