O kamatnim računima

Josip Matejaš[1], *Tena Maruševec*[2]

U radu objašnjavamo osnovne kamatne račune: jednostavni, složeni i neprekidni. Na općenitoj razini i kroz primjere provodimo usporedbu ova tri računa i dobivenih rezultata (kamata).

Uvod

U svakodnevnom životu često se nađemo u situaciji da trebamo nešto što trenutno nemamo. Potrebno nam je neko materijalno dobro, roba, usluga ili novac koji nemamo ili nismo u mogućnosti to pribaviti. Jedan od izlaza iz ovakve situacije je posudba od druge osobe ili institucije koja time postaje *vjerovnik*, a mi njezin *dužnik*. Posuđena dobra trebamo tijekom vremena vratiti u skladu s dogovorenim pravilima ili sklopljenim ugovorom. Zahtjev da u bilo kojem pogledu vratimo više nego što smo posudili čini temelj *kamatnog računa*. Susrećemo ga već u davnoj prošlosti, daleko prije pojave novca kao sredstva plaćanja i trgovanja. Razliku između iznosa kojeg treba vratiti i posuđenog iznosa nazivamo *kamatama*, a način određivanja kamata *ukamaćivanje*. Kako se danas vrijednost dobara, roba i usluga gotovo uvijek izražava u novčanim jedinicama, kamatni račun je jedan od najvažnijih elemenata novčanog poslovanja. U radu dajemo pregled osnovnih kamatnih računa: jednostavnog, složenog i neprekidnog.

Osnovni pojmovi i relacije

Osnovni pojmovi (veličine) u kamatnom računu su: *glavnica, kamate, obračunsko razdoblje* i *kamatna stopa*. Kamate su naknada koju plaća dužnik za posuđeni novčani iznos (glavnicu) na određeno vrijeme. Obračunsko razdoblje (obračunski termin ili razdoblje kapitalizacije) je zadani ili ugovoreni vremenski interval u kojem se obračunavaju kamate i pripisuju glavnici. To može biti bilo koji vremenski interval, a najčešće je vezan uz kalendar (godina, polugodište, kvartal, mjesec i sl.). Iznos kamata na 100 (ili na 1) novčanih jedinica za jedno obračunsko razdoblje nazivamo kamatna stopa ili kamatnjak. Tako imamo postotni zapis kamatne stope (na 100 jedinica) ili decimalni zapis (na 1 jedinicu). Vidimo da kamatna stopa objedinjuje dva podatka: brojčanu vrijednost i obračunsko razdoblje, a utvrđuje se zakonom ili ugovorom između dužnika i vjerovnika. Kamate možemo obračunavati *dekurzivno* (na kraju obračunskog razdoblja u odnosu na vrijednost glavnice s početka razdoblja), a što je i najčešći slučaj u praksi ili *anticipativno* (na početku razdoblja u odnosu na glavnicu s kraja razdoblja). Mi ćemo ovdje promatrati dekurzivni obračun kamata.

Početnu vrijednost glavnice označavamo s C_0 dok je C_k konačna vrijednost glavnice zajedno s kamatama, a I_k vrijednost kamata nakon k obračunskih razdoblja, $k = 1, 2, \ldots, n$. Pri tome je n ukupan broj obračunskih razdoblja. U skladu s navedenim

[1] Izv. prof. na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.

[2] Studentica i demonstratorica na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.

očito je $I_k = C_k - C_0$. Decimalni zapis kamatne stope označavamo s p. Uz ovaj zapis izrazi (formule) su jednostavniji nego uz postotni jer se u njima pojavljuje p umjesto $p/100$, npr. 4% je u postotnom zapisu $p = 4$, a u decimalnom $p = 0.04$.

Osnovni kamatni računi

Jednostavni kamatni račun (JKR)

Ako kamate za svako obračunsko razdoblje računamo na istu, početnu vrijednost glavnice C_0 imamo *jednostavne kamate*. Osnovne relacije dobivamo iz postotnog računa. Tako su, uz konstantnu dekurzivnu kamatnu stopu p, kamate za jedno razdoblje C_0p, za dva razdoblja $2C_0p$, za tri $3C_0p$, itd., pa imamo

$$I_n = C_0np, \quad C_n = C_0 + I_n = C_0(1 + np). \tag{1}$$

Slično, uz promjenjivu kamatnu stopu dobivamo

$$I_n = C_0(n_1p_1 + n_2p_2 + \ldots + n_kp_k), \quad C_n = C_0(1 + n_1p_1 + n_2p_2 + \ldots + n_kp_k), \tag{2}$$

pri čemu je p_i kamatna stopa za n_i obračunskih razdoblja, $i = 1, 2, \ldots, k$, te $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. JKR se koristi u praksi za obračun kamata na štednju po viđenju, neke vrijednosne papire te izračun zakonskih zateznih kamata.

Primjer 1. Ako na štednju uložimo 10 000 EUR koliko možemo podići za dvije godine uz jednostavno ukamaćivanje ako je godišnja dekurzivna kamatna stopa: a) 4%, b) 4% prva 3 mjeseca, 6% sljedećih 9 mjeseci te zatim 8%?

a) Koristeći (1) imamo $C_2 = 10\,000(1 + 2 \cdot 0.04) = 10\,800$ EUR.

b) Kako su 3 mjeseca $= \dfrac{3}{12} = 0.25$ godina te 9 mjeseci $= \dfrac{9}{12} = 0.75$ godina, iz (2) slijedi $C_2 = 10\,000(1 + 0.25 \cdot 0.04 + 0.75 \cdot 0.06 + 1 \cdot 0.08) = 11\,350$ EUR.

Složeni kamatni račun (SKR)

Ako kamate za svako obračunsko razdoblje računamo u odnosu na vrijednost glavnice s početka tog (tekućeg) razdoblja, imamo *složene kamate*. Uz konstantnu dekurzivnu kamatnu stopu p, sada je

$$C_1 = C_0(1 + p), \quad C_2 = C_1(1 + p) = C_0(1 + p)^2, \quad C_3 = C_2(1 + p) = C_0(1 + p)^3,$$

itd. Dakle

$$C_n = C_0(1 + p)^n = C_0r^n, \quad I_n = C_n - C_0 = C_0(r^n - 1), \tag{3}$$

gdje je $r = 1 + p$ *dekurzivni kamatni faktor* koji predstavlja vrijednost jedne novčane jedinice zajedno s kamatama nakon jednog obračunskog razdoblja. Slično, uz promjenjivu kamatnu stopu imamo

$$C_n = C_0 r_1^{n_1} r_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot r_k^{n_k}, \quad I_n = C_0(r_1^{n_1} r_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot r_k^{n_k} - 1), \tag{4}$$

gdje je $r_i = 1 + p_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, a p_i, n_i su iste oznake kao kod JKR. Primijetimo da se ovdje kamate u svakom (osim u prvom) obračunskom razdoblju računaju na vrijednost glavnice koja je već uvećana za kamate iz prethodnog razdoblja. Na taj način uz kamate na glavnicu imamo i kamate na kamate što nije slučaj kod JKR. SKR se primjenjuje u praksi kod obračuna kamata na oročenu štednju, periodične uplate i isplate te investicijske zajmove.

Primjer 2. Riješimo primjer 1 ako je ukamaćivanje složeno. Koristeći (3) imamo:

a) $C_2 = 10\,000(1+0.04)^2 = 10\,816$ EUR, dok iz (4) slijedi:

b) $C_2 = 10\,000 \cdot 1.04^{0.25} \cdot 1.06^{0.75} \cdot 1.08^1 = 11\,393.61$ EUR.

Neprekidni kamatni račun (NKR)

Neprekidno (kontinuirano) ukamaćivanje dobijemo ako u SKR neograničeno smanjujemo veličinu obračunskog razdoblja. To dovodi do situacije u kojoj se kamate pripisuju glavnici svakog trenutka (neprekidno ili kontinuirano). Ako obračunsko razdoblje podijelimo na m dijelova i promatramo $m \to \infty$ tada, uz konstantnu kamatnu stopu p, iz (3) slijedi

$$C_n = \lim_{m\to\infty} C_0 \left(1 + \frac{1}{m}p\right)^{nm} = C_0 \left[\lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{p}{m}\right)^m\right]^n = C_0 e^{np}.$$

Tako smo iz osnovne formule SKR, $C_n = C_0 r^n$, dobili osnovne formule NKR,

$$C_n = C_0 e^{np}, \quad I_n = C_n - C_0 = C_0(e^{np} - 1). \tag{5}$$

Ako je kamatna stopa promjenjiva, tada uz prijašnje oznake imamo

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 e^{n_1p_1} e^{n_2p_2} \cdot \ldots \cdot e^{n_kp_k} = C_0 e^{n_1p_1+n_2p_2+\ldots+n_kp_k}, \\ I_n &= C_0(e^{n_1p_1+n_2p_2+\ldots+n_kp_k} - 1). \end{aligned} \tag{6}$$

Napomenimo da se NKR u pravilu ne primjenjuje u financijskom poslovanju (osim ako bi eventualno ugovorom bio dogovoren obračun kamata baš na taj način). Međutim, formulama (5) i (6) opisan je prirodni proces rasta živih bića bilo kao jedinke ili čitave populacije. Pri tome p više nije kamatna stopa već *stopa trenutnog prirasta na razini polaznog razdoblja* za koje je definirana. Detaljnije objašnjenje dano je u sljedećem odjeljku.

Primjer 3. Riješimo primjer 1 ako je ukamaćivanje neprekidno. Koristeći (5) imamo:

a) $C_2 = 10\,000 \cdot e^{2\cdot 0.04} = 10\,832.87$ EUR, dok iz (6) slijedi:

b) $C_2 = 10\,000 \cdot e^{0.25\cdot 0.04 + 0.75\cdot 0.06 + 1\cdot 0.08} = 11\,445.37$ EUR.

Usporedba kamatnih računa

Ako dobivene rezultate iz primjera 1, 2 i 3 poredamo po veličini u rastućem redosljedu, imamo: JKR, SKR, NKR. Je li to uvijek tako za iste vrijednosti C_0, n i p? Napravimo općenitu usporedbu formula (1), (3) i (5). Vidimo da treba usporediti izraze $1+np$, $(1+p)^n$ i e^{np}. Kako po Taylorovoj formuli za $p > 0$ i $n > 0$ vrijedi

$$(1+p)^n = 1 + np + \frac{n(n-1)p^2}{2}(1+\xi)^{n-2}, \quad 0 < \xi < p,$$

vidimo da su složene kamate veće od jednostavnih za svaki $n > 1$, a manje za $0 < n < 1$. Dobiveni zaključak očituje se kod preračunavanja kamatne stope po JKR (relativna kamatna stopa) i po SKR (konformna kamatna stopa). Ako se preračunavanje vrši s duljeg obračunskog razdoblja na kraće ($n < 1$) tada je konformna stopa manja od relativne dok je kod preračunavanja s kraćeg razdoblja na dulje ($n > 1$) obrnuto. Napomenimo da se, u skladu sa sklopljenim ugovorom, relativna kamatna stopa može primjenjivati i kod SKR, a konformna i kod JKR. Nadalje, za $p > 0$ i $n > 0$ imamo

$$e^p = 1 + p + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \ldots > 1 + p \implies e^{np} > (1+p)^n,$$

i slično

$$e^{np} = 1 + np + \frac{n^2p^2}{2!} + \frac{n^3p^3}{3!} + \ldots > 1 + np, \tag{7}$$

iz čega je vidljivo da su neprekidne kamate uvijek veće i od složenih i od jednostavnih. Koristeći sada (5) i (7), za ukupne kamate (prirast) kod NKR vrijedi

$$I_n = C_0\left(np + \frac{n^2p^2}{2!} + \frac{n^3p^3}{3!} + \ldots\right) = C_0np + O(n^2p^2),$$

gdje je $O(x)$ Landauov simbol (za $x > 0$, $x \to 0$ simbol $O(x)$ označava ostatak sa svojstvom da postoje konstante $x_0, K > 0$ takve da vrijedi $|O(x)| < Kx$ za $x < x_0$). Vidimo dakle, da se neprekidne kamate mogu aproksimirati jednostavnima to bolje što je n manji. To opravdava naziv "stopa trenutnog prirasta na razini polaznog razdoblja" koji koristimo za varijablu p u NKR. Naime, u malim vremenskim intervalima (trenucima) NKR se ponaša kao JKR uz stopu p.

U sljedećem primjeru pokazujemo da razlike između JKR, SKR i NKR mogu postati enormno velike što je vrijeme dulje (n veći).

Primjer 4. Da je neki stari Rimljanin bio u mogućnosti na početku nove ere (01.01.0001.) uložiti jednu kunu uz jedan posto godišnjih dekurzivnih kamata, koliko bi njegov daleki potomak mogao podići na kraju drugog milenija (31.12.2000.) ako su kamate: a) jednostavne, b) složene, c) neprekidne?

Imamo $C_0 = 1$, $p = 0.01$ i $n = 2000$.

a) Koristimo (1): $C_{2000} = 1 \cdot (1 + 2000 \cdot 0.01) = 21$ kuna.

b) Koristimo (3): $C_{2000} = 1 \cdot (1 + 0.01)^{2000} = 1.01^{2000} = 439\,286\,205.05$ kuna.

c) Koristimo (5): $C_{2000} = 1 \cdot e^{2000 \cdot 0.01} = e^{20} = 485\,165\,195.41$ kuna.

Kao što vidimo efekt akumuliranja kamata na kamate tijekom dugog vremenskog razdoblja može imati impozantan učinak usprkos malim vrijednostima početne glavnice i kamatne stope.

Zadaci

1. Ako glavnicu C_0 uložimo na štednju uz godišnju dekurzivnu kamatnu stopu p na dvije godine, za koliko su složene kamate veće od jednostavnih?
2. Za godišnju dekurzivnu kamatnu stopu p odredite pripadnu relativnu i konformnu mjesečnu kamatnu stopu.
3. Za koje se vrijeme početna vrijednost glavnice udvostruči po JKR, SKR i NKR? Konkretizirajte za 5% godišnjih dekurzivnih kamata.
4. Ako uložimo 100 000 kuna na 10 godina uz 4% godišnjih dekurzivnih kamata, kolike su ukupne kamate po JKR, SKR i NKR?

5. Stopa trenutnog prirasta drvne mase u jednom bjelogoričnom šumskom kompleksu na godišnjoj razini je: 7% u proljeće, 10% ljeti, 5% na jesen i -2% zimi. Koliki je prirast drvne mase u toj šumi kroz godinu dana?

Rješenja

1. $C_0(1+p)^2 - C_0(1+2p) = C_0p^2$.
2. Relativna: $C_0(1+12p') = C_0(1+p) \implies p' = \dfrac{1}{12}p$.
   Konformna: $C_0(1+p')^{12} = C_0(1+p) \implies p' = \sqrt[12]{1+p} - 1$.
3. JKR: $C_0(1+np) = 2C_0 \implies n = \dfrac{1}{p}$, $n = \dfrac{1}{0.05} = 20$ godina.
   SKR: $C_0r^n = 2C_0 \implies n = \dfrac{\log 2}{\log r} = \dfrac{\log 2}{\log(1+p)}$, $n = \dfrac{\log 2}{\log 1.05} = 14.2$ godine.
   NKR: $C_0e^{np} = 2C_0 \implies n = \dfrac{\ln 2}{p}$, $n = \dfrac{\ln 2}{0.05} = 13.86$ godina.
4. JKR: $I_{10} = 100\,000 \cdot 10 \cdot 0.04 = 40\,000$ kuna.
   SKR: $I_{10} = 100\,000 \cdot (1.04^{10} - 1) = 48\,024.43$ kune.
   NKR: $I_{10} = 100\,000 \cdot (e^{10 \cdot 0.04} - 1) = 49\,182.47$ kuna.
5. $I_1 = C_0 \cdot (e^{\frac{1}{4}\cdot 0.07 + \frac{1}{4}\cdot 0.1 + \frac{1}{4}\cdot 0.05 - \frac{1}{4}\cdot 0.02} - 1) = 0.051C_0$. Prirast je 5.1%.