ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2014. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/259.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

A) Zadaci iz matematike

3427. Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost

$$\underbrace{11\ldots1}_{2n} = \underbrace{22\ldots2}_{n} + \underbrace{33\ldots3}_{n}^{\,2}\,.$$

3428. Nađi sva cjelobrojna rješenja sistema linearnih diofantskih jednadžbi

$$x + y + z = 100$$

$$x + 8y + 50z = 156\,.$$

3429. Nađi sva rješenja diofantske jednadžbe

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}\,.$$

3430. Vrijedi: $\lfloor\sqrt{44}\rfloor = 6$ i $\lfloor\sqrt{4444}\rfloor = 66$. Dokaži da vrijedi i općenito

$$\left\lfloor\sqrt{\underbrace{44\ldots44}_{2n}}\right\rfloor = \underbrace{6\ldots6}_{n}\,.$$

3431. Dokaži da za sve realne brojeve x, y, z vrijedi nejednakost

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \frac{3}{4}(x - y)^2.$$

Kada se postiže jednakost?

3432. Neka su $x, y \in (0, 1)$ takvi da postoji pozitivan broj $a \neq 1$ takav da je

$$\log_x a + \log_y a = \log_{xy} a\,.$$

Dokaži da je $x = y$.

3433. U paralelogramu $ABCD$ je $|AD| = |BC| = 12$ cm. Na pravcu BC je dana točka M takva da pravac AM odsijeca od paralelograma trokut AKD kojemu je površina jednaka trećini površine paralelograma. Kolika je duljina dužine $\overline{CM}$?

3434. Ako su dvije tetive kružnice međusobno okomite, pokaži da se zbroj kvadrata duljina njihovih četiriju segmenata jednak kvadratu promjera kružnice.

3435. Dana je piramida $PABCD$ s bazom $ABCD$, koja je romb s kutom $\sphericalangle DAB = 60^\circ$. Ako je $|PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$, dokaži $|PA| = |PB|$.

3436. Dužina $\overline{AB}$ je polumjer kružnice. Njezina tetiva $\overline{CD}$ je paralelna s $\overline{AB}$ i površina trapeza $ABCD$ je najveća moguća. Odredi kut pod kojim se iz središta A vidi tetiva $\overline{CD}$.

3437. Dokaži jednakost

$$\operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ = 3\,.$$

3438. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} + \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} = \frac{5}{2}\,.$$

3439. Dokaži da za svaki $n \geq 1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2\,.$$

3440. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi koji zadovoljavaju sistem jednadžbi

$$x + y + xy = 8$$

$$y + z + yz = 15$$

$$z + x + zx = 35\,.$$

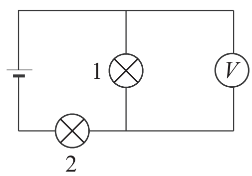
Odredi vrijednost izraza $x + y + z + xyz$.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 378. Staklena vaza ima dno u obliku kvadrata. Vanjski brid dna iznosi 8 centimetara. Bočne strane vaze debele su 3 milimetra. U vazi je voda do visine 20 centimetara od dna. Kad se u vazu stavi 10 cvjetova gerbera razina vode se povisi za 4 centimetra. Sve stabljike su došle do dna vaze. Koliki je promjer jedne stabljike gerbera?

OŠ – 379. Saturnov satelit Japet je već dugo zanimljiv astronomima jer mu je jedna strana 10 puta sjajnija od druge. Neki smatraju da je on jednom okrznuo prsten pri čemu je ta strana zatamnjena, drugi da je to povezano s prašinom koju iza sebe ostavlja satelit Feba. Promjer Japeta je 1470 kilometara, a masa $1.8 \cdot 10^{21}$ kg. Kolika je njegova gustoća?

OŠ – 380. Otpor trošila 1 na shemi iznosi 20 oma, voltmetar pokazuje napon od 4 volta. Napon izvora je 10 volti. Kolika će struja teći krugom ako se ta dva trošila spoje paralelno na isti izvor?



OŠ – 381. Tijela A i B vise na različitima stranama poluge koja ima oslonac u sredini. Tijelo A je od kroma, obujam mu je pet puta manji od obujma tijela B, a objesište je 30 centimetara od oslonca poluge. Tijelo B je od aluminija. Koliko je njegovo objesište udaljeno od oslonca? Gustoća kroma je $7200\ \mathrm{kg/m^3}$, a gustoća aluminija $2700\ \mathrm{kg/m^3}$.

1567. Pri zagrijavanju crnog tijela za 10 K ukupna snaga zračenja poraste za 7.5%. Odredi početnu temperaturu crnog tijela. Na kojoj valnoj duljini tijelo najviše zrači?

1568. Tijelo male mase giba se u gravitacijskom polju većeg tijela (zvijezde ili planeta) po elipsi. Ako s a označimo veliku poluos elipse, a s r trenutni radijus-vektor tijela, dokaži da za iznos trenutne brzine v vrijedi:

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

gdje je $G = 6.672 \cdot 10^{-11}$ opća gravitacijska konstanta u SI jedinicama, a M masa većeg tijela. Koristi zakon očuvanja energije i činjenicu da je ukupna energija tijela jednaka energiji kruženja po kružnici radijusa a.

1569. Satelit se giba oko Zemlje tako da je najmanja brzina $7500\ \mathrm{m/s}$, a najveća $7800\ \mathrm{m/s}$. Koristeći izraz iz prethodnog zadatka, odredi duljinu velike poluosi putanje, ekscentricitet, najveću i najmanju visinu iznad površine Zemlje i ophodno vrijeme satelita. Uzeti da je Zemlja kugla radijusa 6371 km i mase $6 \cdot 10^{24}$ kg.

1570. Period njihanja kuglice na jednom kraju štapa (koji slobodno njiše oko drugog kraja) manji je 4% u odnosu na matematičko njihalo iste duljine (uz zanemarivu masu štapa). Iz navedenog omjera odredi masu štapa, ako je masa kuglice 2.39 kg.

1571. Vozač automobila počne kočiti na 21 m udaljenosti od nepomične prepreke. Ako je u prepreku udario brzinom $1.2\ \mathrm{m/s}$ nakon 2.8 s, te se gibao jednoliko usporeno, odredi brzinu prije kočenja i usporavanje (akceleraciju) pri kočenju.

1572. Odredi ukupnu masu atmosfere Marsa. Neka je tlak na površini Marsa $p_0 = 600$ Pa, ubrzanje sile teže na površini $g = 3.71\ \mathrm{m/s^2}$, a radijus Marsa $R = 3390$ km.

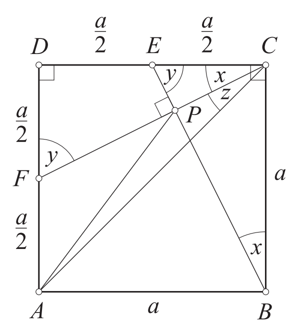
1573. Na zavoju polumjera 1000 m brzina vlaka se jednoliko smanjuje. Brzina na početku zavoja iznosi $54\ \mathrm{km/h}$, a nakon 500 metara puta po zavoju, brzina je $36\ \mathrm{km/h}$. Koliko je ubrzanje vlaka na početku zavoja, a koliko nakon 500 metara?

C) Rješenja iz matematike

Još o zadatku 3381.

U MFL-u br. 3/255, str. 196–197, dana su dva rješenje sljedećeg zadatka[1]:

3381. *Točke E i F su polovišta stranica CD i AD kvadrata $ABCD$. Pravci BE i CF sijeku se u točki P. Dokaži da je $|AP| = |AB|$.*



[1] U prvom rješenju je korištena koordinatna metoda, a drugo se bazira na primjeni sličnosti trokuta i Ptolemejevog poučka.

Prikazat ćemo još tri njegova rješenja.

Prvo rješenje. S obzirom da su pravokutni trokuti BCE i CDF sukladni i da su šiljasti kutovi u svakom pravokutnom trokutu kompletementarni (tj. zbroj im je 90°), imamo:

$$\sphericalangle EBC = \sphericalangle FCD = x, \quad \sphericalangle CEB = \sphericalangle DFC = y$$

i

$$\sphericalangle PCE + \sphericalangle CEP = x + y = 90^\circ.$$

Radi toga je u ΔCEP, $\sphericalangle CPE = 90^\circ$, tj. dužina $\overline{CP}$ je visina pravokutnog trokuta BCE. Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutne trokute ABC i BCE dobivamo

$$|AC| = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

i

$$|BE| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Ako $\sphericalangle ACF$ obilježimo sa z, imamo: $\sphericalangle ACD = x + z = 45^\circ$. Izrazimo površinu trokuta BCE na dva načina: $P_{\Delta BCE} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |CE|$ i $P_{\Delta BCE} = \frac{1}{2}|BE| \cdot |CP|$. Odavde je $|BC| \cdot |CE| = |BE| \cdot |CP|$, ili

$$|CP| = \frac{|BC| \cdot |CE|}{|BE|} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Kako je $\operatorname{tg} x = \frac{|CE|}{|BC|} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(x + z) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ i $\operatorname{tg}(x+z) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z}$, imamo $1 = \frac{\frac{1}{2} + \operatorname{tg} z}{1 - \frac{1}{2}\operatorname{tg} z}$, pa je $\operatorname{tg} z = \frac{1}{3}$. Radi

$$\cos^2 z - \sin^2 z = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 z}{1 + \operatorname{tg}^2 z} \quad \text{i}$$

$$\begin{aligned}\cos^2 z - \sin^2 z &= \cos^2 z - (1 - \cos^2 z)\\ &= 2\cos^2 z - 1,\end{aligned}$$

dobivamo

$$2\cos^2 z - 1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 z}{1 + \operatorname{tg}^2 z} \qquad \text{ili}$$

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 z}{1 + \operatorname{tg}^2 z}\right) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 z}.$$

Odavde, zbog $\operatorname{tg} z = \frac{1}{3}$, slijedi $\cos^2 z = \frac{9}{10}$, odnosno $\cos z = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (jer je kut z šiljast).

Najzad, prema teoremu o kosinusima, iz ΔACP je:

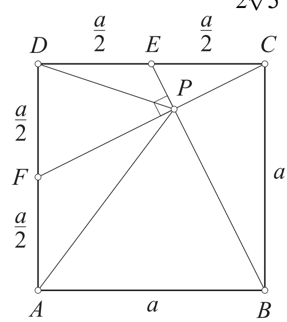
$$|AP|^2 = |AC|^2 + |CP|^2 - 2|AC| \cdot |CP| \cdot \cos z$$

ili

$$|AP|^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}},$$

odnosno $|AP|^2 = a^2$, tj. $|AP| = a = |AB|$.

Drugo rješenje. Utvrđujemo da je $\sphericalangle CPE = 90^\circ$, $|BE| = |CF| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ i $|CP| = \frac{a}{\sqrt{5}}$ (kao u prvom rješenju). Sada je $|PF| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{\sqrt{5}}$. Iz ΔCPE imamo: $|PE| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2}$ (Pitagorin poučak!), tj. $|PE| = \frac{a}{2\sqrt{5}}$.



Na osnovu Stewartovog teorema primjenjenog na trokut CDP je

$$\begin{aligned}&|CD| \cdot (|DE| \cdot |EC| + |PE|^2)\\ &= |DP|^2 \cdot |CE| + |CP|^2 \cdot |DE|\end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned}&a\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2\sqrt{5}}\right)^2\right)\\ &= |DP|^2 \cdot \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

Odavde je $|DP|^2 = \frac{2a^2}{5}$.

Sada primjenom Stewartovog teorema na ΔAPD imamo:

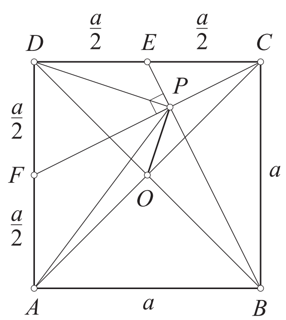
$$|AD| \cdot (|AF| \cdot |FD| + |PF|^2)$$
$$= |DP|^2 \cdot |AF| + |AP|^2 \cdot |DF|$$

ili

$$a\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2\right)$$
$$= \frac{2a^2}{5} \cdot \frac{a}{2} + |AP|^2 \cdot \frac{a}{2},$$

odakle je $|AP|^2 = a^2$, tj. $|AP| = a = |AB|$.

Treće rješenje. Ustanovimo da je $\sphericalangle CPE = 90^\circ$, $|CP| = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$, $|BE| = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $|PE| = \dfrac{a}{2\sqrt{5}}$ i $|DP|^2 = \dfrac{2a^2}{5}$ (kao u prethodnim rješenjima).



U MFL-u br. 3/255, na str. 169, dana je formula za određivanje duljine težišnice t_a trokuta ABC koja glasi

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

Primjenom ove formule na određivanje duljine zajedničke težišnice $\overline{OP}$ (O – točka presjeka dijagonala kvadrata), za trokute APC i BDP dobivamo:

$$|OP|^2 = \frac{|AP|^2 + |CP|^2}{2} - \frac{|AC|^2}{4} \quad \text{i}$$
$$|OP|^2 = \frac{|BP|^2 + |DP|^2}{2} - \frac{|BD|^2}{4}.$$

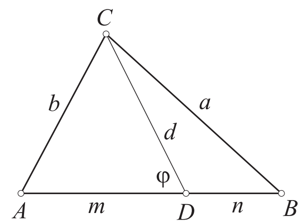
Odavde, radi $|AC| = |BD|$, slijedi $|AP|^2 + |CP|^2 = |BP|^2 + |DP|^2$, pa je

$$|AP|^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{2a^2}{5}.$$

Otuda je $|AP|^2 = a^2$, tj. $|AP| = a = |AB|$.

Sada dokažimo *Stewartov teorem* koji je korišten u drugom rješenju:

Ako je D točka na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC, $|CD| = d$, $|AD| = m$ i $|BD| = n$, tada vrijedi jednakost $c \cdot (mn + d^2) = a^2m + b^2n$.



Neka je $\phi = \sphericalangle ADC < 90^\circ$. Upotrijebit ćemo teorem o kosinusima. Iz trokuta ADC i BCD imamo:

$$b^2 = m^2 + d^2 - 2md \cdot \cos\phi$$

i

$$a^2 = n^2 + d^2 - 2nd \cdot \cos(180^\circ - \phi).$$

Množenjem prve jednakosti s n, druge s m i zbrajanjem novodobivenih jednakosti, radi $\cos(180^\circ - \phi) = -\cos\phi$, dobijemo traženu jednakost, čime je dokazan Stewartov teorem.

Dragoljub Milošević

3401. *Dokaži da je za svaki prirodan broj n i svaki prirodan broj $a > 1$ broj*

$$n(2n+1)(3n+1)\ldots(an+1)$$

djeljiv sa svakim prostim brojem manjim od a.

Prvo rješenje. Dokaz provodimo indukcijom po a, $a > 1$.

Baza indukcije. Za $a = 2$ tvrdnja vrijedi trivijalno. Za $a = 3$

$$n(2n+1)(3n+1)$$

je djeljivo s 2 za svaki $n \in \mathbf{N}$: ako je n paran tvrdnja vrijedi, a ako je n neparan onda je $3n + 1$ paran broj pa tvrdnja opet vrijedi.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da je za neki $a \in \mathbf{N}$, $a > 2$, i za svaki $n \in \mathbf{N}$ izraz

$$n(2n+1)(3n+1)\cdots(an+1)$$

je djeljiv sa svakim prostim brojem manjim od a.

Korak indukcije. Potrebno je dokazati da je izraz

$$n(2n+1)(3n+1)\cdots(an+1)((a+1)n+1)$$

djeljiv sa svakim prostim brojem manjim od $a+1$.

Ako a nije prost onda tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije jer je $n(2n+1)(3n+1)\cdots(an+1)$ djeljiv sa svakim prostim brojem manjim od a.

Neka je sada a prost. Ako je $n \in \mathbf{N}$ takav da a dijeli n onda tvrdnja vrijedi. Prepostavimo da je $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n \equiv n_0 \pmod{a}$, $1 \leq n_0 \leq a-1$. Pretpostavimo da niti jedan od brojeva $2n+1$, $3n+1, \ldots, an+1$, $(a+1)n+1$ nije djeljiv s a. Kako sada imamo a brojeva i $a-1$ ostataka pri dijeljenju njih s a, barem dva broja, recimo $mn+1$ i $kn+1$, imaju isti ostatak pri dijeljenju s a, pri čemu je $2 \leq m < k \leq a+1$. Dakle,

$$kn+1-(mn+1) = (k-m)n \equiv 0 \pmod{a},$$

što je kontradikcija jer a je prost broj i $1 \leq k-m < a$ i a ne dijeli n. Dakle, barem jedan od brojeva $2n+1$, $3n+1, \ldots, an+1$, $(a+1)n+1$ je djeljiv s a.

Po principu matematičke indukcije tvrdnja je dokazana.

Zlatko Petolas (1),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

Drugo rješenje. Neka je $p < a$ prost broj.

1° Ako je broj n djeljiv s p onda je i izraz

$$n(2n+1)(3n+1)\ldots(an+1)$$

djeljiv s p.

2° Ako n nije djeljiv s p onda brojevi

$$2n+1,\ 3n+1, \ldots pn+1,\ (p+1)n+1 \quad (*)$$

daju različite ostatke pri dijeljenju s p.

Naime, ako je

$$kn+1 \equiv ln+1 \pmod{p},$$

tada je $kn+1-(ln+1)$ djeljivo s p, tj. za neke $k, l \in \{2, 3, \ldots, p, p+1\}$ $p|(k-l)n$ tj.

$$(k-l)n \equiv 0 \pmod{p},$$

a to nije moguće jer je $k-l < p$ i m nije djeljiv s p. Dakle, između p brojeva $(*)$ postoji jedan koji je djeljiv s p, pa je tvrdnja dokazana.

Sara Džebo (2),
Peta gimnazija, Sarajevo, BiH

3402. *a) Dokaži da za svake realne brojeve a, b i svake pozitivne brojeve x, y vrijedi nejednakost*

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

b) Dokaži da za svake realne brojeve $a_1, a_2 \ldots, a_n$ i svake pozitivne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geq 2$, vrijedi nejednakost

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{x_1 + \ldots + x_n}.$$

Rješenje. a) Iz

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} - \frac{(a+b)^2}{x+y}\\ &= \frac{a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2}{xy(x+y)}\\ &= \frac{(ay-bx)^2}{xy(x+y)} \geq 0,\end{aligned}$$

dobivamo

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

b) Dokaz nejednakosti provodimo matematičkom indukcijom po $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

Baza. Za $n = 2$ nejednakost vrijedi po a) dijelu.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za neki $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$; za svake realne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i svake pozitivne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Korak indukcije. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ realni i $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ pozitivni brojevi.

Tada je

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\cdots\frac{a_n^2}{x_n}+\frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}}$$
$$\geq\frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{x_1+\cdots+x_n}+\frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}}$$
$$\geq\frac{(a_1+\cdots+a_n+a_{n+1})^2}{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}},$$

pri čemu smo u zadnjoj nejednakosti koristili a) dio, a u predzadnjoj pretpostavku indukcije.

Zlatko Petolas (1), Zagreb

3403. *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=3$ i $abc=1$. Dokaži nejednakost*

$$\frac{ab}{(a^2+b)(a+b^2)}+\frac{bc}{(b^2+c)(b+c^2)}+\frac{ca}{(c^2+a)(c+a^2)}\leq\frac{3}{4}\,.$$

Uputa. Pokaži najprije da vrijedi nejednakost

$$(a^2+b)(a+b^2)\geq(a^2+a)(b^2+b)\,.$$

Rješenje. Pokažimo prvo da za pozitivne brojeve x,y vrijedi

$$(x^2+y)(x+y^2)\geq(x^2+x)(y^2+y).\qquad(*)$$

Zaista, $(*)$ je ekvivalentno s

$$x^3+y^3-xy^2-x^2y\geq 0\iff(x+y)(x-y)^2\geq 0.$$

Trostrukom primjenom nejednakosti $(*)$ na nazivnike svakog od razlomaka dobivamo:

$$\frac{ab}{(a^2+b)(a+b^2)}+\frac{bc}{(b^2+c)(b+c^2)}+\frac{ca}{(c^2+a)(c+a^2)}$$
$$\leq\frac{ab}{(a^2+a)(b^2+b)}+\frac{bc}{(b^2+b)(c^2+1)}+\frac{ca}{(c^2+c)(a^2+a)}$$
$$=\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(b+1)(c+1)}+\frac{1}{(c+1)(a+1)}$$
$$=\frac{(c+1)+(a+1)+(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$
$$=\frac{6}{(a+1)(b+1)(c+1)}\leq\frac{6}{8\sqrt{abc}}=\frac{3}{4},$$

pri čemu smo u zadnjoj nejednakosti koristili $x+1\geq 2\sqrt{x}$ za $x=a,b,c$.

Zlatko Petolas (1), Zagreb

3404. *Neka je $a>b>1$, $A=\log_a(a-b)$ i $B=\log_b(a-b)$. Ako je $a^2+b^2=3ab$ dokaži $A+B=2AB$.*

Rješenje. Iz $a^2+b^2=3ab$ dobivamo $(a-b)^2=ab$ tj. $a-b=\sqrt{ab}$. Sada redom imamo

$$A+B=\log_a(\sqrt{ab})+\log_b(\sqrt{ab})$$
$$=\frac{1+\log_a b}{2}+\frac{\log_b a+1}{2}$$
$$=1+\frac{1}{2}(\log_a b+\log_b a).$$
$$2AB=2\log_a(\sqrt{ab})\log_b(\sqrt{ab})$$
$$=2\cdot\frac{1+\log_a b}{2}\cdot\frac{\log_b a+1}{2}$$
$$=\frac{1+\log_a b+\log_b a+\log_a b\log_b a}{2}$$
$$=1+\frac{1}{2}(\log_a b+\log_b a),$$

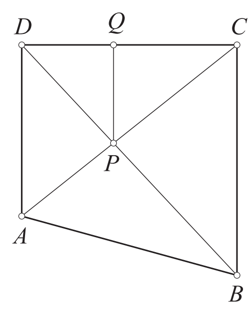
jer je $\log_a b\log_b a=1$. Dakle $A+B=2AB$.

Zlatko Petolas (1), Zagreb

3405. *U četverokutu $ABCD$, AD je paralelno s BC, AD i BC su okomiti na CD, dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točki P i Q je nožište okomice iz P na CD. Dokaži jednakost*

$$\frac{1}{|AD|}+\frac{1}{|BC|}=\frac{1}{|PQ|}\,.$$

Prvo rješenje.



Iz Talesovog teorema za trokute ACD, PCQ, te BCD, PQD dobivamo

$$\frac{|AD|}{|PQ|}=\frac{|DC|}{|QC|}$$

$$\frac{1}{|AD|}=\frac{|QC|}{|DC|\cdot|PQ|}, \qquad (1)$$

$$\frac{|BC|}{|PQ|}=\frac{|CD|}{|DQ|}$$

$$\frac{1}{|BC|}=\frac{|DQ|}{|CD|\cdot|PQ|}. \qquad (2)$$

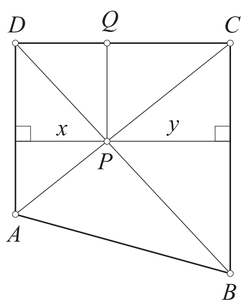
Zbrajanjem (1) i (2) dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|AD|}+\frac{1}{|BD|}&=\frac{|QC|}{|DC|\cdot|PQ|}+\frac{|DQ|}{|CD|\cdot|PQ|}\\&=\frac{|QC|+|DQ|}{|DC|\cdot|PQ|}\\&=\frac{1}{|PQ|}.\end{aligned}$$

Amina Helać (4),
Peta gimnazija, Sarajevo, BiH

Drugo rješenje. Uz oznake kao na slici imamo

$$\frac{P(\triangle PCD)}{|PQ|}=\frac{|DC|}{2}=\frac{x+y}{2}.$$



S druge strane,

$$\begin{aligned}\frac{P(\triangle PCD)}{|AD|}&=\frac{P(\triangle ADC)-P(\triangle APD)}{|AD|}\\&=\frac{|DC|}{2}-\frac{x}{2}=\frac{y}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{P(\triangle PCD)}{|BC|}&=\frac{P(\triangle BCD)-P(\triangle BCP)}{|BC|}\\&=\frac{|DC|}{2}-\frac{y}{2}=\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{P(\triangle PCD)}{|AD|}+\frac{P(\triangle PCD)}{|BC|}=\frac{P(\triangle PCD)}{|PQ|}$$

tj.

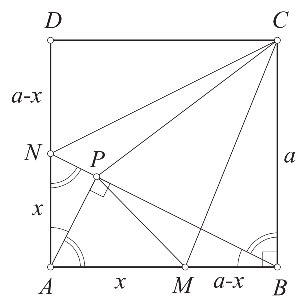
$$\frac{1}{|AD|}+\frac{1}{|BC|}=\frac{1}{|PQ|}.$$

Zlatko Petolas (1), Zagreb

3406. *U kvadratu $ABCD$ dane su točke $M\in\overline{AB}$ i $N\in\overline{AD}$ tako da je $|AM|=|AN|$. Na dužini $\overline{BN}$ nalazi se točka P takva da je $AP\perp BN$. Dokaži da je $MP\perp CP$.*

Prvo rješenje. Uz oznake na slici imamo

$$|BN|=\sqrt{a^2+x^2}.$$



Iz sličnosti trokuta ABN i PAN dobivamo

$$\frac{|AP|}{|AN|}=\frac{|AB|}{|BN|},$$

$$|AP|=\frac{|AN|\cdot|AB|}{|BN|}=\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$|BP|^2=|AB|^2-|AP|^2=\frac{a^4}{a^2+x^2}$$

tj.

$$|BP|=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Nadalje, kako je $\sphericalangle PBC=\sphericalangle PAB$ (kutovi s okomitim kracima) i

$$\begin{aligned}\frac{|AM|}{|AP|}=\frac{|AN|}{|AP|}&=\frac{|AB|}{|BP|}\\&=\frac{|BC|}{|BP|}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a},\end{aligned}$$

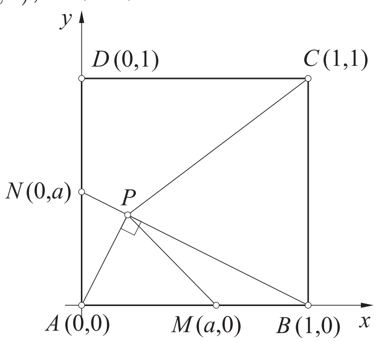
slijedi $\triangle AMP \sim \triangle BCP$ po SKS, tj.

$$\sphericalangle AMP = \sphericalangle BCP = 180^\circ - \sphericalangle PMB.$$

Dakle, $PMBC$ je tetivni četverokut i $\sphericalangle MPC = 90^\circ$, tj. $MP \perp PC$.

Petar Orlić (2), XV. gimnazija, Zagreb

Drugo rješenje. Zadatak ćemo riješiti pomoću analitičke geometrije. Neka je ishodište pravokutnog koordinatnog sustava u točki $A(0,0)$ i $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$, $M(a,0)$, $N(0,a)$, $0 < a < 1$.



Jednadžba pravca BN je

$$x + \frac{y}{a} = 1 \quad \text{tj.} \quad y = -ax + a.$$

Kako je $AP \perp BN$, jednadžba pravca AP je

$$y = \frac{x}{a}.$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobivamo koordinate točke $P\left(\frac{a^2}{a^2+1}, \frac{a}{a^2+1}\right)$.

Koeficijent smjera pravca MP je

$$k_1 = \frac{\frac{a}{a^2+1}}{\frac{a^2}{a^2+1} - a} = \frac{a}{-a^3 + a^2 - a} = \frac{-1}{a^2 - a + 1}.$$

Koeficijent smjera pravca CP je

$$k_2 = \frac{\frac{a}{a^2+1} - 1}{\frac{a^2}{a^2+1} - 1} = a^2 - a + 1.$$

Kako je $k_1 k_2 = -1$, pravci MP i CP su okomiti.

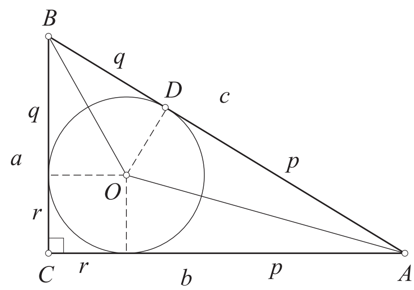
Ur.

3407. *Neka je $k(O,r)$ upisana kružnica pravokutnom trokutu ABC s pravim kutom u vrhu C. Dokaži jednakost*

$$|AO| \cdot |BO| = \sqrt{2}r|AB|\,.$$

Prvo rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} p + q &= c \\ r + p &= b \\ q + r &= a \\ \hline p + q + r &= \frac{a+b+c}{2} \\ p &= \frac{-a+b+c}{2}, \\ q &= \frac{a-b+c}{2}, \\ r &= \frac{a+b-c}{2}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} |AO|^2 &= p^2 + r^2 \\ &= \left(\frac{-a+b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - ac = c^2 - ac \\ &= c(c-a), \\ |BO|^2 &= q^2 + r^2 \\ &= \left(\frac{a-b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - bc = c^2 - bc \\ &= c(c-b). \end{aligned}$$

Tada je

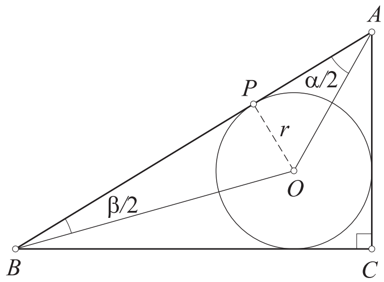
$$|AD|\cdot|BD| = \sqrt{c(c-a)\cdot c(c-b)} = c\sqrt{c^2-ac-bc+ab}$$

$$\sqrt{2}|AB|\cdot r = \sqrt{2}\cdot c\sqrt{\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2} = c\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2-2ac-2bc+2ab}{2}} = c\sqrt{c^2-ac-bc+ab}.$$

Petar Orlić (2), Zagreb

Drugo rješenje. Neka je P projekcija od O na stranicu $\overline{AB}$, dakle $|OP|=r$.

$$|AB| = |AP|+|PB| = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = r\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{r\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$



Zbog $\alpha+\beta=90^\circ$,

$$|AB| = \frac{r\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}. \qquad (*)$$

S druge strane $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{|AO|}$, $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{r}{|BO|}$ što zajedno sa $(*)$ daje

$$|AO|\cdot|BO| = \sqrt{2}r|AB|.$$

Zlatko Petolas (1), Zagreb

3408. *Pravac kroz vrh A jednakostraničnog trokuta ABC siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki F, a opisanu mu kružnicu u M. Dokaži jednakost*

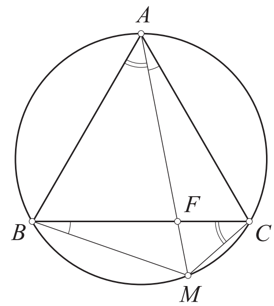
$$\frac{1}{|MF|} = \frac{1}{|MB|}+\frac{1}{|MC|}.$$

Rješenje. Iz sličnih trokuta BFM i AFC po KK imamo

$$\frac{|FM|}{|BM|} = \frac{|FC|}{|AC|}, \qquad (1)$$

a iz $\triangle CFM \sim \triangle AFB$ po KK imamo

$$\frac{|FM|}{|CM|} = \frac{|BF|}{|AB|}. \qquad (2)$$



Zbrajanjem (1) i (2) dobivamo

$$\frac{|FM|}{|BM|}+\frac{|FM|}{|CM|} = \frac{|FC|}{|AC|}+\frac{|BF|}{|AC|} = 1,$$

tj. vrijedi dana jednakost.

Petar Orlić (2), Zagreb

3409. *Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i α, β, γ nasuprotni im kutovi takvi da vrijedi*

$$a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta = c^2\cos^2\gamma,$$

koje vrijednosti mogu poprimiti kutovi tog trokuta?

Rješenje. Iz sinusovog poučka: $a=c\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$, $b=c\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$, uvrštavanjem u zadani uvjet dobivamo

$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\beta\cos^2\beta = \sin^2\gamma\cos^2\gamma$$

tj.

$$\sin^2(2\alpha)+\sin^2(2\beta) = \sin^2(2\gamma). \qquad (*)$$

Zbog

$$\sin^2(2\gamma) = \sin^2(2\alpha + 2\beta)$$
$$= \sin^2(2\alpha)\cos^2(2\beta) + \cos^2(2\alpha)\sin^2(2\beta)$$
$$+ 2\sin(2\alpha)\cos(2\beta)\cos(2\alpha)\sin(2\beta)$$

$(*)$ je ekvivalentno

$$\sin^2(2\alpha)\sin^2(2\beta)$$
$$= \sin(2\alpha)\cos(2\beta)\cos(2\alpha)\sin(2\beta)$$

tj. $\sin(2\alpha)\sin(2\beta)\cos(2\gamma) = 0$.

1° Ako je $\sin(2\alpha) = 0 \implies \alpha = 90^\circ$, $\beta + \gamma = 90^\circ$.

2° Ako je $\sin(2\beta) = 0 \implies \beta = 90^\circ$, $\alpha + \gamma = 90^\circ$.

3° Ako je $\cos(2\gamma) = 0 \implies \gamma = 45^\circ$, $\alpha + \beta = 135^\circ$ ili $\gamma = 135^\circ$, $\alpha + \beta = 45^\circ$.

Zlatko Petolas (1), Zagreb

3410. *Nađi sva pozitivna cjelobrojna rješenja x, y, z sustava jednadžbi*

$$x + y - z = 12$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 12\,.$$

Rješenje. Iz prve jednadžbe imamo $y = -x + z + 12$, uvrštavanjem u drugu jednadžbu slijedi

$$2x^2 - 2(z+12)x + (z+12)^2 - z^2 - 12 = 0$$
$$x^2 - (z+12)x + 12z + 66 = 0$$
$$(x - z)(x - 12) = -66.$$

Odavde, zbog $x \in \mathbf{N}$ imamo $x - 12 \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm11, 22, 33, 66\}$ odakle slijedi

$x \in \{1, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 23, 34, 45, 78\}$.

Zbog uvjeta $z \in \mathbf{N}$ iz $x - z = \dfrac{-66}{x - 12}$ mora biti

$$(x, z) \in \{(13, 79), (14, 47), (15, 37), (18, 29),$$
$$(23, 29), (34, 37), (45, 47), (78, 79)\}.$$

Zbog $y \in \mathbf{N}$ i $y = -x + z + 12$ sva rješenja zadanog sustava su:

$$(x, y, z) \in \{(13, 78, 79), (14, 45, 47),$$
$$(15, 34, 37), (18, 23, 29), (23, 18, 29),$$
$$(34, 15, 37), (45, 14, 47), (78, 13, 79)\}.$$

Zlatko Petolas (1), Zagreb

3411. *Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe*

$$12x + 10y + 15z = 1\,.$$

Rješenje. Označimo $u = 2y + 3z$. Zadana jednadžba tada postaje

$$12x + 5u = 1,$$

što je diofantska jednadžba kojoj je $x = -2$, $u = 5$ jedno partikularno rješenje, pa su sva njezina rješenja

$$x = -2 + 5k, \quad u = 5 - 12k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Sada je

$$2y + 3z = 5 - 12k$$

diofantska jednadžba kojoj je $y = 1 - 3k$, $z = 1 - 2k$ jedno partikularno rješenje, pa su sva njezina rješenja

$$y = 1 - 3k + 3m, \quad z = 1 - 2k - 2m, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Dakle sva rješenja su

$$x = -2 + 5k,\ y = 1 - 3k + 3m,$$
$$z = 1 - 2k - 2m; \quad k, m \in \mathbf{Z}.$$

Zlatko Petolas (1), Zagreb

3412. *Odredi beskonačni produkt*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right).$$

Rješenje. Označimo

$$x_k = \prod_{n=1}^{k}\left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right).$$

Slijedi $x_1 = -3 = -\dfrac{2\cdot1+1}{2\cdot1-1}$, $x_2 = -\dfrac{5}{3} = -\dfrac{2\cdot2+1}{2\cdot2-1}$. Sada se indukcijom pokaže:

$$x_k = -\frac{2k+1}{2k-1}.$$

Zaista, iz prepostavke $x_k = -\dfrac{2k+1}{2k-1}$ slijedi

$$x_{k+1} = x_k\cdot\left(1 - \frac{4}{(2k+1)^2}\right)$$
$$= -\frac{2k+1}{2k-1}\cdot\frac{(2k-1)(2k+3)}{(2k+1)^2}$$
$$= -\frac{2k+3}{2k+1} = -\frac{2(k+1)+1}{2(k+1)-1}.$$

Računamo:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty} x_k=\lim_{k\to\infty} -\frac{2k+1}{2k-1}$$

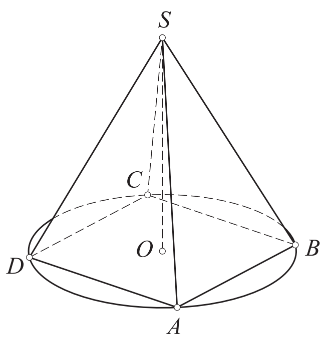
$$=-\lim_{k\to\infty}\frac{2+\frac{1}{k}}{2-\frac{1}{k}}=-1.$$

Zlatko Petolas (1), Zagreb

3413. *Volumen pravilne četverostrane piramide je V, a r je polumjer kružnice opisane oko njezine baze. Odredi udaljenost između središta te kružnice i središta sfere opisane oko piramide.*

Rješenje. Kvadrat $ABCD$ ima stranicu a koju izrazimo preko polumjera r:

$$2r=\sqrt{a^2+a^2} \implies a=r\sqrt{2}.$$



Za visinu piramide $v=|SO|$ vrijedi

$$V=\frac{a^2v}{3}=\frac{2r^2v}{3} \implies v=\frac{3V}{2r^2}.$$

Za bridove nad kvadratom $ABCD$ vrijedi $|SA|=|SB|=|SC|=|SD|=b$ gdje je

$$b^2=r^2+v^2=r^2+\frac{9V^2}{4r^4}$$

$$\implies b=\sqrt{r^2+\frac{9V^2}{4r^4}}.$$

Polumjer sfere R opisane oko piramide je jednak polumjeru kružnice opisane trokutu $\triangle DBS$ jer se središte sfere opisane piramide nalazi na visini piramide $\overline{SO}$:

$$R=\frac{|DB||SD||SB|}{4P(\triangle DBS)}=\frac{2r\cdot b\cdot b}{4\cdot\frac{2rv}{2}}$$

$$=\frac{r^2+\frac{9V^2}{4r^4}}{2\cdot\frac{3V}{2r^2}}=\frac{r^4}{3V}+\frac{3V}{4r^2}.$$

Tražena udaljenost d je jednaka:

$$d=v-R=\frac{3V}{2r^2}-\frac{r^4}{3V}-\frac{3V}{4r^2}=\frac{3V}{4r^2}-\frac{r^4}{3V}.$$

Zlatko Petolas (1), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 370. *Hrvoje i Maja se pripremaju za natjecanje u atletici trčeći nekoliko krugova oko nogometnog igrališta koje je dugačko 80 metara i široko 55 metara. Krenuli su istovremeno u istom smjeru iz jednog kuta igrališta. Hrvoje trči prosječnom brzinom 5 m/s, a Maja brzinom 4 m/s. Dogovorili su se da će se odmoriti kad se nađu na istom mjestu. Gdje će to biti? Koliko dugo će trčati i koliki će put prijeći svaki od njih?*

Rješenje.

$a=80$ m

$b=55$ m

$v_H=5$ m/s

$v_M=4$ m/s

mjesto susreta =?

$t=?$

$s_H,\ s_M=?$

Hrvoje će dostići Maju kad načini jedan krug oko igrališta više od nje.

Opseg nogometnog igrališta iznosi:

$$O=2\cdot a+2\cdot b=2\cdot 80\text{ m}+2\cdot 55\text{ m}$$

$$=270\text{ m};$$

$$s_H=s_M+270\text{ m}$$

$$v_H\cdot t=v_M\cdot t+270\text{ m}$$

$$t\cdot 5\text{ m/s}=t\cdot 4\text{ m/s}+270\text{ m}$$

$$t=270\text{ s};$$

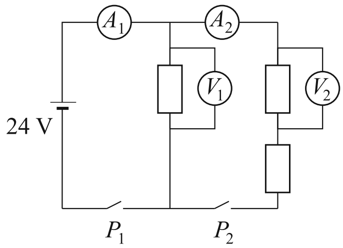
$$s_H = 5 \text{ m/s} \cdot 270 \text{ s} = 1350 \text{ m};$$

$$s_M = 4 \text{ m/s} \cdot 270 \text{ s} = 1080 \text{ m}.$$

Hrvoje će dostići Maju za 270 sekundi u istom kutu igrališta iz kojeg su počeli trčati, pri čemu će on napraviti 5 krugova oko igrališta, a Maja 4.

Klara Dorešić (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 371. *Svi otpornici na shemi su jednaki. Kad se zatvori prekidač P_1 ampermetar A_1 pokazuje 3 ampera. Koliko će pokazivati svi instrumenti kad se zatvori i prekidač P_2?*



Rješenje. Ako je zatvoren samo prekidač P_1 struja prolazi samo kroz jedan otpornik.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{24 \text{ V}}{3 \text{ A}} = 8 \ \Omega.$$

Kad se zatvori i drugi prekidač ukupan će otpor iznositi:

$$\frac{1}{R_{uk}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{1}{8} \ \Omega + \frac{1}{16} \ \Omega = \frac{3}{16} \ \Omega$$

$$R_{uk} = \frac{16}{3} \ \Omega.$$

Struja koju pokazuje ampermetar A_1 će biti:

$$I = \frac{U}{R_{uk}} = 4.5 \text{ A}.$$

Napon koji će pokazivati voltmetar V_1 bit će jednak naponu izvora.

$$U_1 = 24 \text{ V}.$$

Napon koji mjeri voltmetar V_2 iznosit će polovicu napona izvora jer su u toj grani serijski spojena dva jednaka otpornika:

$$U_2 = 12 \text{ V}.$$

Struja koju mjeri ampermetar A_2 bit će:

$$I_2 = \frac{U_2}{R} = \frac{12 \text{ V}}{8 \ \Omega} = \frac{3}{2} \text{ A}.$$

Klara Dorešić (8), Zagreb

OŠ – 372. *Najnovija otkrića o veličini protona pokazuju da je njegov promjer 4 posto manji nego što se donedavno smatralo. Po tim otkrićima je promjer protona $8.418 \cdot 10^{-16}$ m. Atom vodika čini samo jedan proton oko kojeg kruži jedan elektron. Koliko je puta gustoća protona veća od gustoće atoma vodika ako elektron kruži na udaljenosti $5.3 \cdot 10^{-11}$ m od jezgre? Masa protona iznosi $1.6726 \cdot 10^{-27}$ kg, a elektrona $9.109 \cdot 10^{-31}$ kg. Za proton i atom pretpostavite da su u obliku kugle.*

Rješenje.

$$d_p = 8.418 \cdot 10^{-16} \text{ m}$$

$$m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$r_H = 5.3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

$$m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\frac{\rho_p}{\rho_H} = ?$$

$$V_p = \frac{4 r_p^3 \pi}{3} = \frac{4}{3} \cdot (4.209 \cdot 10^{-16} \text{ m})^3 \cdot \pi = 3.123 \cdot 10^{-46} \text{ m}^3$$

$$\rho_p = \frac{m_p}{V_p} = \frac{1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{3.123 \cdot 10^{-46} \text{ m}^3} = 5.356 \cdot 10^{18} \text{ kg/m}^3$$

$$V_H = \frac{4 r_H^3 \pi}{3} = \frac{4}{3} \cdot (5.3 \cdot 10^{-11} \text{ m})^3 \cdot \pi = 6.236 \cdot 10^{-31} \text{ m}^3$$

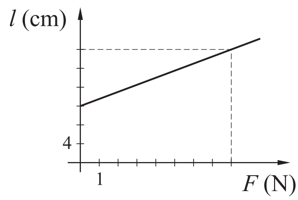
$$\rho_H = \frac{m_p + m_e}{V_p} = \frac{1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg} + 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{6.236 \cdot 10^{-31} \text{ m}^3} = 2.684 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{\rho_p}{\rho_H} = \frac{5.356 \cdot 10^{18} \text{ kg/ m}^3}{2.684 \cdot 10^3 \text{ kg/ m}^3} = 1.9955 \cdot 10^{15}.$$

Lucija Matić (8) i Luka Ilić (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 373. *Dijagram prikazuje promjenu duljine opruge u ovisnosti o sili koja djeluje na nju. Kada se na nju objesi uteg X njena duljina iznosi 18 cm, a kad se objesi uteg Y duljina je 21 cm. Utezima X i Y se želi uravnotežiti poluga zanemarive mase dugačka*

30 cm. Ako utege postavimo na krajeve poluge na koju udaljenost od utega X treba postaviti oslonac?



Rješenje. Iz grafa se vidi da je duljina neopterećene opruge 12 cm, a njena konstanta elastičnosti iznosi:

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{8 \text{ N}}{12 \text{ cm}} = \frac{2}{3}\ \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

$$\Delta l_x = 6 \text{ cm}$$

$$G_x = k \cdot \Delta l_x = \frac{2}{3}\ \frac{\text{N}}{\text{cm}} \cdot 6 \text{ cm} = 4 \text{ N}$$

$$\Delta l_y = 9 \text{ cm}$$

$$G_y = k \cdot \Delta l_y = \frac{2}{3}\ \frac{\text{N}}{\text{cm}} \cdot 9 \text{ cm} = 6 \text{ N}$$

$$G_x \cdot X = G_y(30 \text{ cm} - X)$$

$$4 \text{ N} \cdot X = 6 \text{ N} \cdot 30 \text{ cm} - 6 \text{ N} \cdot X$$

$$10 \text{ N} \cdot X = 180 \text{ Ncm}$$

$$X = 18 \text{ cm}.$$

Oslonac poluge treba postaviti na udaljenost 18 cm od utega X.

Klara Dorešić (8), Zagreb

1553. *Tijelo A nalazi se na visini 15 m iznad tijela B. Tijelo A pustimo da slobodno pada. Nakon 0.5 s pustimo i tijelo B da slobodno pada. Tijela istovremeno padnu na tlo. Odredi vrijeme padanja tijela A i visine pada obaju tijela. Otpor zraka je zanemariv.*

Rješenje. Za oba tijela, odnos visine i vremena padanja dan je jednadžbom gibanja:

$$h_A = \frac{g}{2}t_A^2, \qquad h_B = \frac{g}{2}t_B^2.$$

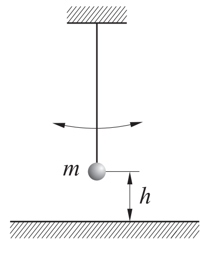
Iz uvjeta zadatka zaključujemo $t_A = t_B + 0.5$ s, $h_A = h_B + 15$ m. U drugu relaciju uvrstimo obje jednadžbe gibanja. Dobivamo

$$t_A = \frac{1}{4} + \frac{30}{g} = 3.3081 \text{ s}.$$

To za visine daje $h_A = 53.68$ m i $h_B = 38.68$ m.

Ur.

1554. *Malena kuglica mase 20 grama visi na niti (električnom izolatoru) na visini 5 cm iznad velike horizontalne metalne ravnine i oscilira malim oscilacijama perioda 0.6 s. Ako kuglicu nabijemo nabojem iznosa 200 nC (predznak nije bitan), koliki će biti novi period malih oscilacija?*



Rješenje. Period oscilacija njihala određen je silom (ubrzanjem) prema dolje. Dok nema naboja na kuglici, to je ubrzanje sile teže g, u izrazu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

iz čega slijedi da je duljina niti $l = 0.089456$ m. Kad je kuglica nabijena, djeluje dodatna električna sila između kuglice i metalne plohe. Ona je (metodom zrcaljenja naboja) jednaka

$$F = \frac{kq^2}{(2h)^2} = 0.036 \text{ N}.$$

Tada akceleraciji g u izrazu za period treba dodati $a = \dfrac{F}{m} = 1.8 \text{ m/s}^2$, te dobivamo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}} = 0.552 \text{ s}.$$

Ur.

1555. *Na dnu cisterne za vodu nalazi se otvor presjeka* 2 cm^2. *Presječna površina cisterne je* 0.8 m^2, *a visina vode je 0.5 m.*

a) Kojom brzinom istječe voda? Koliko litara istekne u minuti?

b) Ako cisternu neprekidno punimo brzinom 1.2 litre u sekundi, do koje će se maksimalne visine voda podići?

Rješenje. Brzina istjecanja određena je tlakom zbog visine stupca vode, i jednaka je krajnjoj brzini slobodnog pada s te visine. Tako imamo

a) $v^2 = 2gh,\ v = 3.13 \text{ m/s}$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = S \cdot v = 2 \text{ cm}^2 \cdot 3.13 \text{ m/s}$$

$$= 0.626 \text{ l/s} = 37.56 \text{ l/min}.$$

b) Ako cisternu neprekidno punimo, visina vode će rasti dokle god se istjecanje ne izjednači s dotokom. Znači

$$v' = \frac{\Delta V}{\Delta t} : S = 1.2 \text{ l/s} : 2 \text{ cm}^2 = 6 \text{ m/s},$$

što odgovara visini

$$h' = \frac{v'^2}{2g} = 1.835 \text{ m}.$$

Ur.

1556. *Da bismo naboj $q = 30$ nC približili dugačkoj žici jednolike linijske gustoće naboja, s 15 cm na 5 cm, potreban je rad $3 \cdot 10^{-4}$ J. Kolika je linijska gustoća naboja žice?*

Rješenje. Elekrično polje jednoliko nabijene žice dobije se Gaussovim zakonom i iznosi

$$E(r) = \frac{2k\lambda}{r},$$

gdje je $k = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2 Coulombova konstanta. Rad dobijemo iz izraza za potencijal tog polja,

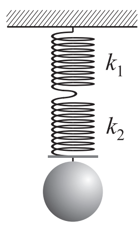
$$U(r) = 2k\lambda \ln r, \qquad W = 2kq\lambda \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Odatle je

$$\lambda = \frac{W}{2kq \ln 3} = 505.7 \text{ nC/m}.$$

Ur.

1557. *Dvije opruge konstanta elastičnosti $k_1 = 480$ N/m i $k_2 = 120$ N/m spojene su jedna ispod druge, a ispod njih je uteg mase 0.25 kg. Odredi period malih oscilacija utega (gore-dolje).*



Rješenje. Konstanta elastičnosti opruge omjer je sile i pomaka iz položaja ravnoteže, to jest $k = \frac{F}{x}$. Dvije opruge spojene jedna na drugu rastegnute su istom silom (inače njihov spoj nije u ravnoteži), a ukupni pomak jednak je zbroju pomaka svake opruge: $F = F_1 = F_2$, $x = x_1 + x_2$. Tada vrijedi:

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{x_1}{F_1} + \frac{x_2}{F_2} = \frac{x}{F} = \frac{1}{k},$$

to jest dvije se opruge ponašaju kao jedna opruga konstante elastičnosti

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{57\,600}{600} = 96 \text{ N/m}.$$

Period oscilacija tada jednostavno odredimo jednadžbom opruge:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.25}{96}} = 0.3206 \text{ s}.$$

Ur.

1558. *Gustoća obične vode je 1000, a leda 920 kg/m^3. Odredi gustoću "teške" vode i "teškog" leda (u teškoj vodi su atomi vodika zamijenjeni "teškim" izotopom vodika, deuterijem, atomske mase 2 g/mol).*

Rješenje. Masa obične molekule vode zbroj je masa dva atoma vodika i jednog atoma kisika ($M = 2 \cdot 1 + 16 = 18$ g/mol). U teškoj vodi oba vodika zamijenimo deuterijem, pa je masa ($M = 2 \cdot 2 + 16 = 20$ g/mol). Uz pretpostavku da se prostorni raspored tvari ne mijenja promjenom izotopa (vrlo dobra aproksimacija), odgovarajuće gustoće veće su za faktor $\frac{20}{18}$, omjer masa molekula. Tako je gustoća teške vode 1111 kg/m^3, a teškog leda 1022 kg/m^3.

Ur.

1559. *Brzina valova na vodi (valne duljine veće od 1 m) ovisi o valnoj duljini na sljedeći način:*

$$v(\lambda) = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}},$$

gdje je $g = 9.81$ m/s^2 ubrzanje sile teže. Odredi kojom se brzinom gibaju valovi duljine 3 m i kolika je valna duljina valova koji se kreću brzinom 1.8 m/s.

Rješenje. Za valove valne duljine 3 metra uvrstimo $\lambda = 3$ m u izraz za brzinu:

$$v(3) = \sqrt{\frac{9.81 \cdot 3}{2\pi}} = 2.164 \text{ m/s}.$$

Valnu duljinu valova brzine 1.8 m/s dobije se uvrštavanjem brzine na lijevu stranu izraza i rješavanjem po λ:

$$1.8 = \sqrt{\frac{9.81\lambda}{2\pi}},$$

$$\lambda = \frac{1.8^2 \cdot 2\pi}{9.81} = 2.075 \text{ m}.$$

Općenito, ovisnost brzine valova o valnoj duljini (ili frekvenciji) naziva se disperzija.

Ur.