Međunarodno matematičko natjecanje "Klokan bez granica" 2014. g., 1. dio

Zahvaljujemo vam se što ste sudjelovali na Međunarodnom matematičkom natjecanju "Klokan bez granica". Pod pokroviteljstvom Ministarstva prosvjete i športa i Hrvatskog matematičkog društva. Ove godine je natjecanje održano po *šesnaesti put u Hrvatskoj* 27. ožujka s početkom u 12 sati i 30 minuta. U proteklih šesnaest godina u Hrvatskoj se ukupno natjecalo preko 315 000 učenika (neki i po nekoliko puta) i okupilo je preko 750 osnovnih i srednjih škola iz svih krajeva Lijepe naše. S približno istim zadacima u isto vrijeme ove godine natjecalo se više od 7 000 000 učenika u 60 zemalja svijeta, što ovo natjecanje čini najvećim školskim natjecanjem u svijetu. Iste zadatke rješavali su učenici Armenije, Austrije, Argentine, Belgije, Bjelorusije, Brazila, Bugarske, Cipra, Češke, Čilea, Ekvadora, Estonije, Finske, Francuske, Gane, Grčke, Gruzije, Hrvatske, Indonezije, Irana, Irske, Italije, Izraela, Južnoafričke Republike, Kanade, Kazahstana, Kirgistana, Kolumbije, Kosta Rike, Latvije, Litve, Mađarske, Makedonije, Malezije, Meksika, Moldavije, Mongolije, Nizozemske, Njemačke, Norveške, Obale Bjelokosti, Pakistana, Paragvaja, Poljske, Portorika, Portugala, Rumunjske, Rusije, Sjedinjenih Američkih Država, Slovačke, Slovenije, Srbije, Španjolske, pokrajine Katalonije, Švedske, Švicarske, Tunisa, Ukrajine, Velike Britanije i Venezuele.

Prema odjecima koji su stigli do nas, vjerujemo da je natjecanje postiglo svoju svrhu i zainteresiralo učenike za rješavanje zadataka iz matematike. U Hrvatskoj je natjecanje održano u 417 osnovnih i 82 srednje škole u svim županijama, a učenici su se natjecali podijeljeni u sedam kategorija:

PČELICE	– II. razred osnovne škole – (6336 učenika) – **P**
LEPTIRIĆI	– III. razred osnovne škole – (5955 učenika) – **L**
ECOLIERS	– IV. i V. razred osnovne škole – (8521 učenika) – **E**
BENJAMINS	– VI. i VII. razred osnovne škole – (6264 učenika) – **B**
CADETS	– VIII. razred osnovne i I. razred srednje škole – (3263 učenika) – **C**
JUNIORS	– II. i III. razred srednje škole – (1561 učenika) – **J**
STUDENTS	– IV. razred srednjih škola – (469 učenika) – **S**

Ukupno se natjecalo 32 369 učenika.

Prilikom dolaska na natjecanje svaki je učenik dobio "poklon za svakoga", a 10% najbolje plasiranih učenika dobilo je i nagrade. Podijeljene su 3082 nagrade i oko 750 utješnih nagrada.

Učenici ovo natjecanje plaćaju 15 kn, tom svotom se podmiruju svi troškovi nagrada i materijalni troškovi. Učenici slabijeg materijalnog stanja oslobođeni su plaćanja (ove godine plaćanja je oslobođeno 95 učenika).

U ime povjerenstva najtoplije se zahvaljujem na sudjelovanju

Koordinator natjecanja, Neda Lukač, prof.

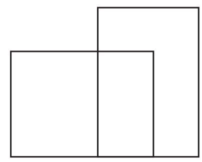
Zadaci za učenike 8. razreda osnovne i 1. razreda srednje škole (Cadet)

Pitanja za 3 boda:

1. Svake se godine natjecanje "Klokan bez granica" održava treći četvrtak u ožujku. Kojeg datuma najkasnije može biti natjecanje?

A. 14-og ožujka **B.** 15-og ožujka **C.** 20-og ožujka **D.** 21-og ožujka **E.** 22-og ožujka

Rješenje: D.



2. Koliko različitih četverokuta vidite na slici?

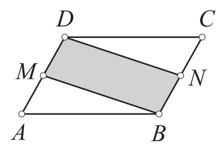
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4 **E.** 5

Rješenje: D.

3. Koliko je: $2014 \cdot 2014 : 2014 - 2014$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2013 **D.** 2014 **E.** 4028

Rješenje: A.



4. Površina paralelograma je 10. Točke M i N su polovišta stranica $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$. Kolika je površina četverokuta $MBND$?

A. 0.5 **B.** 5 **C.** 2.5 **D.** 7.5 **E.** 10

Rješenje: B. Dužina $\overline{MN}$ dijeli paralelogram na 4 sukladna trokuta. Površina četverokuta $MBND$ je 5.

5. Umnožak dva prirodna broja je 36, a njihov zbroj 37. Kolika je njihova razlika?

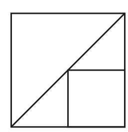
A. 1 **B.** 4 **C.** 10 **D.** 26 **E.** 35

Rješenje: E. To su brojevi 1 i 36.

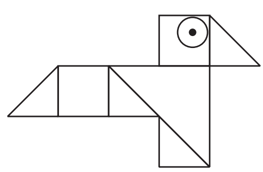
6. Vjedro (vidi sliku) je do pola puno. Ako dodamo još 2 litre bit će tri četvrtine puno. Koliko ukupno litara može stati u to vjedro?

A. 10 litara **B.** 8 litara **C.** 6 litara **D.** 4 litre **E.** 2 litre

Rješenje: B. 2 litre su četvrtina vjedra. Cijelo vjedro sadrži 8 litara.



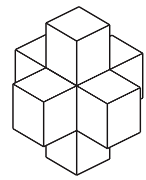
7. Vesna ima nekoliko komada papira u obliku kvadrata površine 4. Ona ih je razrezala u kvadrate i pravokutne trokute (vidi sliku lijevo). Uzela je nekoliko komada i od njih složila pticu kao što vidimo na donjoj slici. Kolika je površina ptice? (Oko ptice se ne računa.)



A. 3 **B.** 4 **C.** $\frac{9}{2}$ **D.** 5 **E.** 6

Rješenje: E. Veći trokut ima površinu 2, manji $\frac{1}{2}$, a kvadratić ima površinu 1. Površina ptice je 6.

8. Od sedam jediničnih kocki (kocka kojoj je brid jednak jedinici) Karlo je sastavio tijelo kao na slici. Koliko takvih jediničnih kocaka treba dodati da bi dobio kocku brida 3?



A. 12 **B.** 14 **C.** 16 **D.** 18 **E.** 20

Rješenje: E. U prvom redu 8, u drugom 4 i u trećem 8, ukupno 20

Pitanja za 4 boda:

9. Koji od ovih izračuna daje najveći broj?

A. 44×777 **B.** 55×666 **C.** 77×444 **D.** 88×333 **E.** 99×222

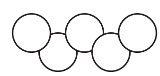
Rješenje: B. Svaki od zadanih brojeva možemo redom pisati u obliku produkta $4 \times 7 \times 11 \times 111$ ili $5 \times 6 \times 11 \times 111$ ili $7 \times 4 \times 11 \times 111$ ili $8 \times 3 \times 11 \times 111$ ili $9 \times 2 \times 11 \times 111$. Najveći je $5 \times 6 \times 11 \times 111$.

10. Ivan ima satove gitare dva puta tjedno, a Hrvoje svaki drugi tjedan jedan sat. U kojem tjednu će Ivan imati 15 sati gitare više nego Hrvoje?

A. 30 **B.** 25 **C.** 20 **D.** 15 **E.** 10

Rješenje: E. Nakon I. tjedna Ivan je imao 2 sata gitare, a Hrvoje niti jedan. Nakon II. tjedna Ivan je imao 4 sata gitare, a Hrvoje 1 sat. Nakon IV. tjedna Ivan je imao 8 sata gitare, a Hrvoje 2 sata. Nakon VI. tjedna Ivan je imao 12 sati gitare, a Hrvoje 3 sata... Nakon X. tjedna Ivan je imao 20 sata gitare, a Hrvoje 5 sati.

11. Površina svakog kruga na slici je 1 cm^2. Dio u kojem se dva kruga međusobno preklapaju ima površinu $\frac{1}{8}$ cm^2. Koliku površinu pokrivaju ovih pet krugova?



A. 4 cm^2 **B.** $\frac{9}{2}$ cm^2 **C.** $\frac{35}{8}$ cm^2 **D.** $\frac{39}{8}$ cm^2 **E.** $\frac{19}{4}$ cm^2

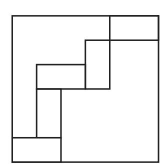
Rješenje: B. Prvi i zadnji krug su cijeli $P = 2$ cm^2, trećem i četvrtom nedostaje jedno preklapanje $P = 2 \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{4}$ cm^2, a drugi krug ima površinu $P = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ cm^2. Ukupna površina je $P = \frac{8}{4} + \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$ cm^2.

12. Ove godine je zbroj godina života bake, kćerke i unuke 100. Pritom su ustanovile da je životna dob svake od njih potencija broja 2. Koliko je stara unuka?

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 8 **E.** 16

Rješenje: C. Potencije broja 2 su: 2, 4, 8, 16, 32, 64,... $4 + 32 + 64 = 100$. Unuka ima 4 godine.

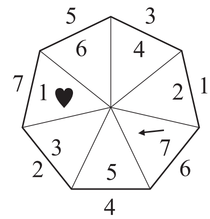
13. Pet jednakih pravokutnika smješteni su unutar kvadarata (vidi sliku). Stranica kvadrata je 24 cm. Kolika je površina jednog pravokutnika?



A. 12 cm^2 **B.** 16 cm^2 **C.** 18 cm^2 **D.** 24 cm^2 **E.** 32 cm^2

Rješenje: E. Označimo li kraću stranicu pravokutnika s x, a dulju s y vidimo da je $2x+2y=24$ i $3y=24 \implies y=8$ i $x=4$, a površina pravokutnika $P=32\ \text{cm}^2$.

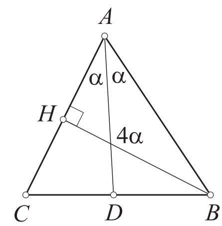
14. Srce i strelica smješteni su u polja kao na slici. Počinju se kretati u isto vrijeme. Strelica se pomakne za 3 polja u smjeru kazaljke na satu, a srce se pomakne za 4 polja obrnuto kazaljke na satu i tada stanu. Takvo pomicanje se nastavlja. Nakon koliko takvih pomicanja će strelica i srce biti u početnom položaju?



A. 7 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10 **E.** To se nikad neće dogoditi.

Rješenje: A. Brojevi unutar lika označavaju kretanje strelice, a izvan lika kretanje srca.

15. Zadan je trokut ABC kojemu je $\overline{BH}$ visina, a AD simetrala kuta CAB. Tupi kut između BH i AD četiri je puta veći od kuta DAB (vidi sliku). Koliki je kut CAB?



A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 75° **E.** 90°

Rješenje: C. Sjecište visine i simetrale označimo s M. U trokutu BMA kut pri vrhu B označimo s β_1. Tada je $5\alpha+\beta_1=180^\circ \implies \beta_1=180^\circ-5\alpha$. U trokutu BHA $\beta_1+2\alpha=90^\circ \implies \beta_1=90^\circ-2\alpha \implies \alpha=30^\circ$, $2\alpha=60^\circ$.

16. Šestero momaka iznajmili su stan s dvije kupaone koje koriste svako jutro s početkom u 7:00 sati. Uvijek je samo jedna osoba u svakoj kupaoni u svako doba. Oni su u kupaoni 8, 10, 12, 17, 21 i 22 minute i koriste je jedan za drugim. Kada najranije mogu napustiti obje kupaone?

A. 7:45 **B.** 7:46 **C.** 7:47 **D.** 7:48 **E.** 7:50

Rješenje: B. Prvu kupaonu koriste momci $22'+12'+10'=44'$, a drugu $8'+17'+21'=46'$. U 7:46 mogu najranije napustiti kupaone.

Pitanja za 5 bodova:

17. Kapetan Sparrow i njegova gusarska družina iskopali su nekoliko zlatnika. Plijen su podijelili među sobom tako da je svaki od njih dobio jednak broj zlatnika. Kada bi gusara bila četvorica manje, tada bi svaki dobio 10 zlatnika više. Ali, da su pronašli 50 zlatnika manje, tada bi svatko od njih dobio 5 zlatnika manje. Koliko su točno zlatnika iskopali?

A. 80 **B.** 100 **C.** 120 **D.** 150 **E.** 250

Rješenje: D. Broj gusara označimo s x, s y označimo količinu zlatnika koju dobije svaki gusar, a sa z ukupnu količinu iskopanih zlatnika, pa ćemo dobiti jednadžbe: $xy=z$, $(x-4)(y+10)=z$, $x(y-5)=z-50$. Ako iz prve jednadžbe z uvrstimo u ostale dvije, iz treće ćemo dobiti $x=10$, a zatim iz druge $y=15$, a iz prve $z=150$.

18. Pravokutnik ima stranice duljine 6 cm i 11 cm. Izaberemo jednu od duljih stranica. Povučemo simetrale kuteva s oba kraja te stranice. Te dvije simetrale dijele suprotnu dulju stranicu na tri dijela. Koje su duljine tih dijelova?

A. 1 cm, 9 cm, 1 cm **B.** 2 cm, 7 cm, 2 cm **C.** 3 cm, 5 cm, 3 cm **D.** 4 cm, 3 cm, 4 cm **E.** 5 cm, 1 cm, 5 cm

Rješenje: E. Povučemo li simetrale dobit ćemo dva jednakokračna pravokutna trokuta koji se preklapaju za 1 cm.

19. Andrej upisuje brojke od 1 do 9 u mrežu koja se sastoji od 3×3 polja, tako da u svako polje upiše jednu brojku. Brojke 1, 2, 3 i 4 je već upisao kako je prikazano na slici. Dvije su brojke "susjedi" ako im polja imaju zajedničku stranicu. Nakon što je unio sve brojke primijetio je da je zbroj "susjeda" brojke 9 jednak 15. Koliki je zbroj "susjeda" broja 8?

1		3
2		4

A. 12 **B.** 18 **C.** 20 **D.** 26 **E.** 27

Rješenje: E. Broj 9 je između brojeva 3 i 4. Njegovi "susjedi" su brojevi 3, 8 i 4. Broj 8 je u sredini, pa su njegovi "susjedi" svi brojevi osim 1, 2, 3 i 4. Njihov zbroj je $5 + 6 + 7 + 9 = 27$.

20. Antikna vaga se s vremenom poremetila. Naime, ako na nju stavimo neki predmet manji od 1000 g ona će pokazivati točnu masu, no ako na nju stavimo predmet od točno 1000 g ili više ona bi mogla pokazati bilo koji broj veći od 1000. Imamo 5 utega A, B, C, D, E, svaki mase manje od 1000 g. Kada ih važemo u paru, vaga pokazuje sljedeće: $B + D = 1200$, $C + E = 2100$, $B + E = 800$, $B + C = 900$, $A + E = 700$. Koji je od utega najteži?

A. A **B.** B **C.** C **D.** D **E.** E

Rješenje: D. Vrijedi $B = 800 - E$ i $B + D \geqslant 1000$, pa je $(800 - E) + D \geqslant 1000$, tj. $D \geqslant 200 + E$, tj. $D > E$. Iz $B + E = 800$ i $B + C = 900$ slijedi $C = E + 100$, tj. $C > E$. Iz $B = 900 - C$ i $B + D \geqslant 1000$ slijedi $(900 - C) + D \geqslant 1000$, tj. $D \geqslant 100 + C$, tj. $D > C$. Sad imamo poredak: $D > C > E$. Zbrajanjem nejednakosti $D \geqslant 200 + E$ i $D \geqslant 100 + C$ dobivamo $2D \geqslant 300 + E + C \geqslant 1300$ jer je $E + C = 2100$, a to znači da je $E + C \geqslant 1000$. Dakle $D \geqslant 650$. Iz $B + E = 800$ i $A + E = 700$ slijedi da je $B > A$. Još treba usporediti B i D. Kad bi bilo $B \geqslant D$, tada bi i $B \geqslant 650$. No tada iz $E = 800 - B$ slijedi $E \leqslant 150$. Iz $C = 900 - B$ slijedi $C \leqslant 250$ pa je $E + C \leqslant 400$, a mora biti veće od 1000. Dakle $B > D$. Ukupno imamo da je D najveći.

21. Liz i Marija se natječu u rješavanju zadataka. Obje imaju identične popise sa 100 zadataka na svakom popisu. Prva koja riješi pojedini zadatak dobija 4 boda, dok druga dobija 1 bod za taj isti riješeni zadatak. Liz je riješila 60 zadataka, Marija također. Zajedno one imaju 312 bodova. Koliko su zadataka riješile obje djevojke?

A. 53 **B.** 54 **C.** 55 **D.** 56 **E.** 57

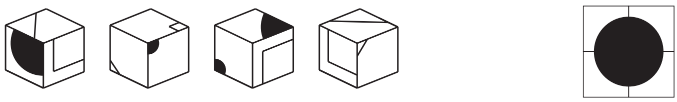
Rješenje: D. Označimo s x dio zadataka koje su riješile obje prijateljice, za njih su dobile jedna 4, a druga 1 bod, ukupno $5x$ bodova. Za ostale zadatke $(60 - x)$ dobila je svaka 4 boda. Ukupno imaju 312 bodova. $5x + [(60 - x)4]2 = 312$, $x = 56$.

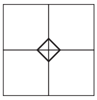
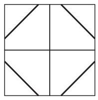
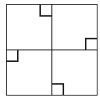
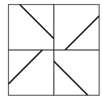
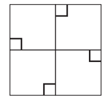
22. David se biciklom dovezao iz Edinburgha do svoje farme. Trebao je stići točno u 15 sati, ali je $\frac{2}{3}$ planiranog vremena potrošio na prelazak $\frac{3}{4}$ puta. Nakon toga je vozio sporije i stigao je na cilj točno na vrijeme. Koji je omjer brzina na prvom i drugom dijelu Davidova puta?

A. 5 : 4 **B.** 4 : 3 **C.** 3 : 2 **D.** 2 : 1 **E.** 3 : 1

Rješenje: C. $v = \dfrac{s}{t}$, $v_1 = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{9}{8}$, $v_2 = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{4} \implies \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{\frac{9}{8}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{3}{2}$.

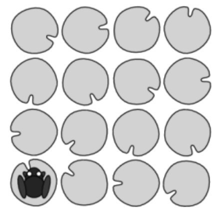
23. Imamo četiri potpuno jednake kocke (vidi sliku!). Složene su tako da im gornje stranice zajedno čine veliki crni krug, kao što je prikazano na slici desno. Što vidimo na suprotnoj (donjoj) strani tako posloženih kocaka?



A.  B.  C.  D.  E. 

Rješenje: A.

24. Na jezercetu pluta 16 lopočevih listova u formaciji 4×4, kako je prikazano na slici. Na jednom od listova u kutu sjedi žaba. Ona se vodoravnim ili okomitim skokovima kreće s lista na list, i to tako da uvijek preskoči barem jedan list i nikada ne skoči na isti list dvaput. Koji je najveći broj listova (uključujući i onaj na kojem sjedi) koje žaba tako može prijeći?



A. 16 **B.** 15 **C.** 14 **D.** 13 **E.** 12

Rješenje: A.

5	11	6	12
1	15	2	16
8	10	7	9
4	14	3	13

Zadaci za učenike 2. i 3. razreda srednje škole (Juniors)

Pitanja za 3 boda:

1. Matematički klokan svake se godine održava trećeg četvrtka u ožujku. Kojeg se datuma najranije Klokan može održati?

A. 14. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 21. **E.** 22.

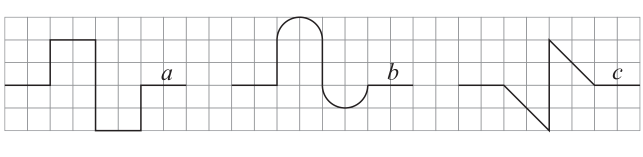
Rješenje: B.

2. MSC Fabiola drži rekord kao najveći kontejnerski brod koji je ušao u zaljev San Francisco. On nosi 12 500 kontejnera koji bi kada bi se posložili u niz tvorili kompoziciju dugačku 75 km. Kolika je, ugrubo, duljina jednog kontejnera?

A. 6 m **B.** 16 m **C.** 60 m **D.** 160 m **E.** 600 m

Rješenje: A. $75 \text{ km} = 75\,000 \text{ m}$, $75\,000 : 12\,500 = 6 \text{ m}$.

3. Ako s a, b i c označimo duljine linija na slici, što je od navedenog istinito?



A. $a < b < c$ **B.** $a < c < b$ **C.** $b < a < c$ **D.** $b < c < a$ **E.** $c < b < a$

Rješenje: E.

4. Koji broj je na sredini između $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$?

A. $\frac{11}{15}$ **B.** $\frac{7}{8}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{6}{15}$ **E.** $\frac{5}{8}$

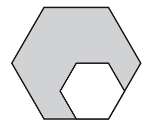
Rješenje: A.

5. U broju 2014 posljednja znamenka veća je od zbroja preostale tri. Prije koliko godina se ovo zadnji put dogodilo?

A. 1 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 7 **E.** 11

Rješenje: C. To se zadnji put dogodilo 2009.

6. Stranica velikog pravilnog šesterokuta dva puta je dulja od stranice malog pravilnog šesterokuta. Površina je malog šesterokuta 4 cm^2. Kolika je površina velikog šesterokuta?



A. 16 cm^2 **B.** 14 cm^2 **C.** 12 cm^2 **D.** 10 cm^2 **E.** 8 cm^2

Rješenje: A. Koeficijent sličnosti ova dva lika je $k = 2$. Njihove površine se onda odnose kao $k^2 = 4$, tj. površina velikog šesterokuta četiri je puta veća od površine malog šesterokuta, $4 \cdot 4 = 16$.

7. Toma je u koordinatnom sustavu nacrtao kvadrat. Jedna njegova dijagonala leži na osi x. Koordinate vrhova na osi x su $(-1, 0)$ i $(5, 0)$. Što su od navedenoga koordinate još jednog vrha tog kvadrata?

A. $(2, 0)$ **B.** $(2, 3)$ **C.** $(2, -6)$ **D.** $(3, 5)$ **E.** $(3, -1)$

Rješenje: B. Sjecište dijagonala ovog kvadrata polovište je dužine kojoj su krajnje točke $(-1, 0)$ i $(5, 0)$. To je točka $(2, 0)$. Dijagonale kvadrata su međusobno okomite, jednake du duljine i raspolavljaju se. Stoga druga dijagonala prolazi točkom $(2, 0)$ okomito na x-os, a svaki vrh kvadrata udaljen je za 3 od središta. Sada je jasno da su preostala dva vrha kvadrata točke $(2, 3)$ i $(2, -3)$. Sve se lako vidi iz skice.

8. U jednom je selu omjer broja odraslih muškaraca i odraslih žena $2 : 3$, a omjer broja odraslih žena i djece je $8 : 1$. Koji je omjer broja odraslih (muškaraca i žena) i djece?

A. 5 : 1 **B.** 10 : 3 **C.** 13 : 1 **D.** 12 : 1 **E.** 40 : 3

Rješenje: E. Iz uvjeta zadatka imamo $\frac{\text{m}}{\text{ž}} = \frac{2}{3}$ i $\frac{\text{ž}}{\text{d}} = \frac{8}{1}$, tj. $\text{m} = \frac{2}{3}\text{ž}$ i $\text{d} = \frac{1}{8}\text{ž}$. Nas zanima omjer $\frac{\text{m} + \text{ž}}{\text{d}} = \frac{\frac{2}{3}\text{ž} + \text{ž}}{\frac{1}{8}\text{ž}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{8}} = \frac{40}{3}$.

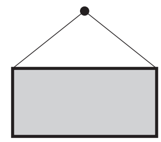
Pitanja za 4 boda:

9. Baka, njena kćer i njena unuka ove godine mogu reći da je zbroj njihovih godina 100. Koje je godine rođena unuka ako su sve njihove godine starosti potencije broja 2?

A. 1998 **B.** 2006 **C.** 2010 **D.** 2012 **E.** 2013

Rješenje: C. Potencije broja 2 između 0 i 100 su 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Zbroj 100 možemo dobiti samo kombinacijom $4 + 32 + 64$ pa zaključujemo da je unuka rođena prije 4 godine.

10. Pavao je stavio pravokutne slike na zid. Za svaku sliku postavio je čavao na visini 2.5 m od poda i spojio je nit duljine 2 m na dva gornja ugla slike. Koja od sljedećih slika je najbliža podu (format slike: širina u cm $\times$ visina u cm)?



A. 60×40 **B.** 120×50 **C.** 120×90 **D.** 160×60 **E.** 160×100

Rješenje: C. Udaljenost slike od poda dobit ćemo tako da od 2.5 m oduzmemo udaljenost od čavla do slike i visinu slike. Udaljenost od čavla do slike dobijemo primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut kojem je hipotenuza polovica niti, a jedna kateta polovica širine slike. Označimo li format slike sa $a \times b$ (u metrima) udaljenost slike od poda dana je izrazom $2.5 - \left(\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} + b\right)$.

11. Šest djevojaka dijeli stan s dvije kupaonice koje koriste svako jutro počevši od 7:00 sati. Kupaonicu koriste jedna po jedna i zajedno doručkuju kada su sve spremne. Provode 9, 11, 13, 18, 22 i 23 minute u kupaonici redom. Ako se dobro organiziraju, kada najranije mogu zajedno doručkovati?

A. 7:48 **B.** 7:49 **C.** 7:50 **D.** 7:51 **E.** 8:03

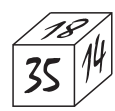
Rješenje: B. Jedna kupaonica: $9 + 18 + 22 = 49$, druga kupaonica: $11 + 13 + 23 = 47$.

12. U Africi je otkrivena nova vrsta krokodila. Duljina njegova repa trećina je njegove cjelokupne duljine. Njegova glava duga je 93 cm što je četvrtina duljine krokodila bez repa. Kolika je duljina ovog krokodila u cm?

A. 558 **B.** 496 **C.** 490 **D.** 372 **E.** 186

Rješenje: A. Označimo s k duljinu cijelog krokodila, a s r duljinu njegova repa. Znamo da je $r = \frac{1}{3}k$. Sada imamo $93 = \frac{1}{4}(k - r) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}k = \frac{1}{6}k$, tj. $k = 93 \cdot 6 = 558$ cm.

13. Na slici je posebna igraća kocka. Brojevi na nasuprotnim stranama uvijek daju isti zbroj. Brojevi koje na slici ne vidimo su prosti. Koji broj je nasuprot broja 14?



A. 11 **B.** 13 **C.** 17 **D.** 19 **E.** 23

Rješenje: E. Kako su brojevi 14 i 18 parni, a brojevi nasuprot njima prosti zaključujemo da zbroj na nasuprotnim stranama mora biti neparan. Zato nasuprot broja 35 mora biti jedini paran prost broj, 2. Sada znamo da zbroj na nasuprotnim stranama mora biti 37, pa je nasuprot broja 14 broj 23, a nasuprot broja 18 broj 19. Zadatak se može riješiti i provjerom ponuđenih rješenja.

14. Ana je hodala 8 km brzinom 4 km/ h. Sada će neko vrijeme trčati brzinom 8 km/ h. Koliko dugo treba trčati kako bi njena prosječna brzina na cijelom putu bila 5 km/ h?

A. 15 min **B.** 20 min **C.** 30 min **D.** 35 min **E.** 40 min

Rješenje: E. Ana je prvo hodala 2 sata i prešla 8 km. Trčeći brzinom od 8 km/ h za

x sati prijeći će $8x$ km. Ukupno utrošeno vrijeme je $2+x$, a ukupan prijeđeni put je $8+8x$. Prosječna brzina je omjer puta i vremena, tj. imamo $5=\dfrac{8+8x}{2+x}$ iz čega slijedi $x=\dfrac{2}{3}$ sata, tj. 40 minuta.

15. Šahist je odigrao 40 mečeva i osvojio 25 bodova (pobjeda nosi jedan bod, remi pola boda, a poraz nula bodova). Koliko je više mečeva dobio nego izgubio?

A. 5 **B.** 7 **C.** 10 **D.** 12 **E.** 15

Rješenje: C. Označimo s p broj pobjeda, a s r broj remija. Tada je broj poraza jednak $40-p-r$ Zanima nas vrijednost izraza $p-(40-p-r)=2p+r-40$. Znamo još i broj osvojenih bodova: $p+\dfrac{1}{2}r=25$, iz čega slijedi $2p+r=50$. Vidimo da je traženi broj $50-40=10$.

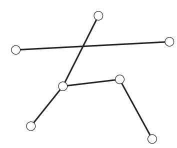
16. Trojke Jana, Daniela i Hana željele su kupiti identične šešire. No, Jani je nedostajala trećina cijene šešira, Danieli četvrtina, a Hani petina. Kada je šešir pojeftinio 9.40 € sestre su objedinile svoje ušteđevine i svakoj kupile šešir. Nije im ostao ni cent. Kolika je bila cijena šešira prije sniženja?

A. 12 € **B.** 16 € **C.** 28 € **D.** 36 € **E.** 112 €

Rješenje: D. Neka je x prvotna cijena šešira. Jana ima $\dfrac{2}{3}x$, Daniela $\dfrac{3}{4}x$, a Hana $\dfrac{4}{5}x$ eura. Cijena tri šešira nakon sniženja je $3(x-9.4)$. Iz jednadžbe $\dfrac{2}{3}x+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{4}{5}x=3(x-9.4)$ dobijemo $x=36$.

Pitanja za 5 bodova:

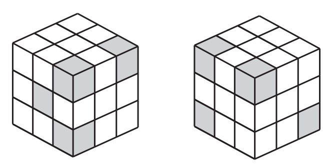
17. Na donjoj slici Karlo želi dodati dužine tako da svaka od sedam točaka ima isti broj veza s drugim točkama. Koji je najmanji broj dužina koje Karlo treba nacrtati?



A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 9 **E.** 10

Rješenje: D. Najveći broj dužina koji izlazi iz jedne točke je 3. Kada bi željeli da iz svakog vrha izlaze 3 dužine trebalo bi nam još $\dfrac{11}{2}$ dužina, no to nije cijeli broj. Kada bi iz svakog vrha izlazile 4 dužine trebalo bi nam još $\dfrac{18}{2}=9$ dužina.

18. Na slici vidimo dva različita pogleda na istu kocku. Ona se sastoji od 27 kockica od kojih su neke bijele, a neke crne. Koji je najveći broj crnih kockica koje bi se tu mogle nalaziti?



A. 5 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 9 **E.** 10

Rješenje: D. Možemo prebrojati koliko kockica mora biti bijele boje: 15 ih vidimo na lijevoj slici i još 3 (nove) na desnoj. To znači da crnih kockica može biti najviše $27-18=9$.

19. Na jednom otoku žabe su uvijek ili zelene ili plave. Broj plavih žaba povećao se za 60% dok je broj zelenih žaba opao za 60%. Ispostavilo se da je novi omjer plavih i zelenih žaba isti kao prethodni omjer u suprotnom poretku (zelene žabe naprama plavih žaba). Za koliki postotak se ukupan broj žaba na otoku promijenio?

A. 0% **B.** 20% **C.** 30% **D.** 40% **E.** 50%

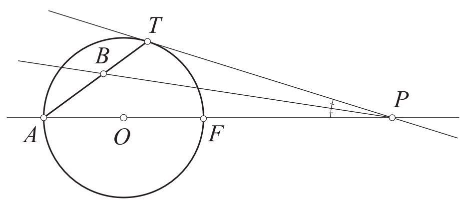
Rješenje: B. Ako s p označimo stari broj plavih žaba, onda je novi broj plavih žaba $1.6p$. Ako sa z označimo stari broj zelenih žaba, onda je novi broj zelenih žaba $0.4z$. Iz jednakosti $\frac{1.6p}{0.4z} = \frac{z}{p}$ slijedi $z = 2p$. Nas zanima omjer $\frac{1.6p + 0.4z}{p + z} = \frac{2.4p}{3p} = 0.8$ iz čega zaključujemo da je na otoku sada 20% manje žaba.

20. Tin je zapisao nekoliko različitih prirodnih brojeva, ne većih od 100. Njihov umnožak nije bio djeljiv s 18. Koliko je najviše brojeva mogao zapisati?

A. 5 **B.** 17 **C.** 68 **D.** 69 **E.** 90

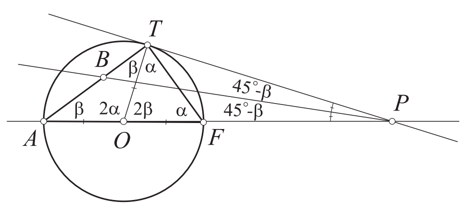
Rješenje: C. $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Među zapisanim brojevima ne smiju se naći dva broja djeljiva s 3. Izbacimo li sve brojeve djeljive s 3, osim jednog, između 1 i 100 ostane 68 brojeva.

21. Na slici je pravac PT tangenta kružnice sa središtem u točki O, a pravac PB simetrala je kuta TPA. Odredi kut TBP



A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $75°$ **E.** Ovisi o položaju točke P.

Rješenje: B. Iz Talesovog poučka slijedi da je kut ATF pravi. Tangenta kružnice okomita je na radijus te kružnice u diralištu pa je i kut OTP pravi kut. Koristeći poučak o obodnom i središnjem kutu i činjenicu da su trokuti AOT i OFT jednakokračni dobivamo odnose među kutovima kao na slici. Sada iz trokuta BPT imamo $\sphericalangle TBP + (45° - \beta) + (90° + \beta) = 180°$, tj. $\sphericalangle TBP = 45°$.

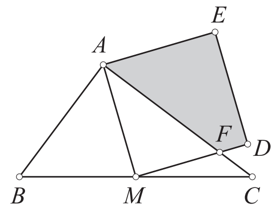


22. Uzmimo skup 7-znamenkastih brojeva sastavljenih od znamenki 1, 2, 3,...,7 takvih da su u svakom broju sve znamenke iskorištene. Postavi brojeve ovog skupa u rastućem poretku i podijeli niz točno na sredini na dva jednakobrojna dijela. Koji je posljednji broj prve polovice niza?

A. 1234567 **B.** 3765421 **C.** 4123567 **D.** 4352617 **E.** 4376521

Rješenje: E.

23. Neka je ABC trokut takav da je $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 8$ cm i $|BC| = 10$ cm. Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$. $AMDE$ je kvadrat i $\overline{MD}$ siječe $\overline{AC}$ u točki F. Odredi površinu četverokuta $AFDE$ u cm^2.



A. $\dfrac{124}{8}$ **B.** $\dfrac{125}{8}$ **C.** $\dfrac{126}{8}$ **D.** $\dfrac{127}{8}$ **E.** $\dfrac{128}{8}$

Rješenje: B. Po obratu Pitagorinog poučka trokut ABC je pravokutan, s pravim kutom kod vrha A. Onda je M središte opisane kružnice tog trokuta, tj. vrijedi $|MB| = |MA| = |MC| = 5$ cm te $\sphericalangle ABM = \sphericalangle MAB$ i $\sphericalangle MAC = \sphericalangle ACM$. Po KK poučku trokuti ABC i MFA slični su, pa možemo odrediti duljinu stranice $\overline{MF}$. Površina traženog četverokuta razlika je površina kvadrata $AMDE$ i trokuta AMF, tj. $5^2 - \dfrac{5 \cdot \frac{15}{4}}{2} = \dfrac{125}{8}$ cm^2.

24. U vrsti je 2014 osoba. Svaka od njih je ili lažov (koji uvijek laže) ili vitez (koji uvijek govori istinu). Svaka osoba kaže "Ima više lažova s moje lijeve strane nego vitezova s moje desne strane." Koliko lažova se nalazi u ovoj vrsti?

A. 0 **B.** 1 **C.** 1007 **D.** 1008 **E.** 2014

Rješenje: C. Moraju biti poredani tako da su svi lažovi jedan do drugog, lijevo od vitezova, i svi vitezovi jedan do drugog, desno od lažova. Treba biti jednak broj lažova i vitezova.