Primjena ideje atomizacije na jedan kombinatorni tip problema[1]

Vjekoslav Kovač[2]

U ovom ćemo članku predstaviti jedan općeniti rezultat koji može biti od neizmjerne pomoći kod određene vrste zadataka iz kombinatorike, vjerojatnosti, a čak i geometrije. Još važnija od samog rezultata je ideja kojom ćemo ga dokazati. To će biti tzv. *metoda atomizacije*, posebni slučaj tehnike "podijeli pa vladaj". Kako bi naš teorem bio primjenjiv u što većem broju raznolikih situacija, formulirat ćemo ga u ponešto neobičnom i općenitom okruženju.

Neka je Ω neprazan skup i $\mathcal{F}$ familija podskupova od Ω koja sadrži $\emptyset$ i Ω te koja je zatvorena na operacije unije, presjeka i skupovne razlike dvaju podskupova. Preciznije, za bilo koje $A, B \in \mathcal{F}$ skupovi $A \cup B$, $A \cap B$ i $A \setminus B$ se također nalaze u kolekciji $\mathcal{F}$. Takva familija $\mathcal{F}$ se zove *algebra podskupova* od Ω.

Nadalje, pretpostavimo da je svakom skupu $A \in \mathcal{F}$ pridružen nenegativni realni broj $|A|$ i to tako da skupovna funkcija $\mathcal{F} \to [0, +\infty\rangle$ zadana pridruživanjem $A \mapsto |A|$ ima svojstvo:

$$\text{Ako su } A, B \in \mathcal{F} \text{ međusobno disjunktni, tada je } |A \cup B| = |A| + |B|. \tag{1}$$

Uvrštavanje $A = B = \emptyset$ daje $|\emptyset| = 2|\emptyset|$ pa je očigledna posljedica $|\emptyset| = 0$. Osim toga, ako za neke $A, B \in \mathcal{F}$ vrijedi $A \subseteq B$, tada iz

$$|B| = |A \cup (B \setminus A)| = |A| + |B \setminus A| \geq |A| + 0 = |A|$$

zaključujemo $|A| \leq |B|$.

Vidimo da je $|A|$ svojevrsna "mjera veličine" skupa A i tada (1) postaje sasvim razuman zahtjev. Brojni su primjeri takvih skupovnih funkcija $A \mapsto |A|$, a navodimo najvažnije.

a) $|A| =$ broj elemenata skupa A.
Pritom je Ω konačan skup, a za $\mathcal{F}$ možemo naprosto uzeti cijeli partitivni skup $\mathcal{P}(\Omega)$, tj. familiju svih podskupova od Ω.

b) $|A| =$ površina skupa A.
Neka je Ω dovoljno veliki krug u ravnini u kojem se nalaze svi podskupovi koji nas trenutno zanimaju. Za familiju $\mathcal{F}$ možemo uzeti neku kolekciju skupova kojima znamo izračunati površinu, na primjer unije konačno mnogo (ne nužno konveksnih) mnogokuta. Ne smijemo u $\mathcal{F}$ staviti baš sve podskupove odabranog kruga jer neki od njih nemaju dobro definiranu površinu. Sasvim slično možemo interpretirati $|A|$ kao duljinu (na pravcu) ili kao volumen (u prostoru).

c) $|A| =$ vjerojatnost događaja A, koja se još označava $\mathrm{P}(A)$ ili $p(A)$.
Ovdje je Ω skup mogućih ishoda nekog slučajnog pokusa, a $\mathcal{F}$ je kolekcija svih događaja koje promatramo. Napomenimo da je vjerojatnost uvijek normalizirana s $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

---

[1] Gradivo članka je prilagođena verzija jednog izlaganja koje je autor održao u sklopu eksperimentalnog kolegija *Studentska natjecanja* na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.

[2] Autor je s Matematičkog odsjeka PMF-a u Zagrebu, e-pošta: `vjekovac@math.hr`

d) Može se pokazati da je za svaki beskonačni skup Ω moguće na cijelom $\mathcal{P}(\Omega)$ konstruirati skupovnu funkciju takvu da vrijedi (1) i koja još ima svojstva: za svaki $A \subseteq \Omega$ je ili $|A| = 0$ ili $|A| = 1$, za konačne podskupove A je $|A| = 0$ te vrijedi $|\Omega| = 1$. Valja napomenuti da se može samo dokazati postojanje takvog pridruživanja (npr. korištenjem tzv. aksioma izbora), ali nije moguće eksplicitno opisati $|A|$ za svaki podskup $A \subseteq \Omega$. Stoga ovaj primjer nema praktičnu vrijednost.

Premda to nije posebno važno, napomenimo da se definicijsko svojstvo (1) zove *konačna aditivnost*, a skupovna funkcija, od koje se zahtijeva samo to svojstvo, zove se *konačna* i *konačno aditivna mjera*. Čitatelj koji poznaje osnove teorije mjere i teorije vjerojatnosti će znati da se u primjerima pod (b) i (c) obično traži i svojstvo aditivnosti obzirom na unije prebrojivo mnogo disjunktnih skupova. Mi nemamo potrebu praviti tu suptilnu razliku jer ćemo se baviti problemima u kojima se pojavljuje samo konačno mnogo podskupova, a prednost ovog izbora je da izlaganje čini elementarnijim.

Booleov polinom u n skupovnih varijabli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je svaki formalni izraz $f(A_1, \ldots, A_n)$ dobiven iz skupova A_i pomoću konačno mnogo operacija unije i presjeka. Naprimjer,

$$f(A_1, A_2, A_3) = ((A_1 \cap A_2) \cup A_3) \cap (A_1 \cup (A_2 \cap A_3)).$$

Nije važno dade li se taj izraz pojednostaviti koristeći poznate skupovne identitete. Ako se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nalaze u nekoj algebri podskupova $\mathcal{F}$, tada je također $f(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{F}$ pa je na taj način dobro definirana funkcija $f : \underbrace{\mathcal{F} \times \ldots \times \mathcal{F}}_{n} \to \mathcal{F}$.

Konačno možemo formulirati naš glavni rezultat, koji se tiče linearnih nejednakosti s općenitim Booleovim polinomima.

Teorem. *Neka su m i n prirodni brojevi. Dani su Booleovi polinomi u n varijabli $f_1, f_2, \ldots, f_m$ i realni brojevi $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Da bismo dokazali nejednakost*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \, |f_i(A_1, \ldots, A_n)| \geq 0 \tag{2}$$

za sve $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ iz proizvoljne algebre podskupova $\mathcal{F}$ nekog skupa Ω i za sve konačne i konačno aditivne mjere $A \mapsto |A|$ na $\mathcal{F}$, dovoljno je samo provjeriti (2) u trivijalnom, posebnom, slučaju kada je $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ i $|\Omega| = 1$.

Ista tvrdnja vrijedi i ako u (2) stoji nejednakost "$\leq$" jer tada naprosto pomnožimo koeficijente c_i s -1. Tvrdnja također vrijedi i kada u (2) piše "$=$", što se vidi tako da se jednakost shvati kao kombinacija dviju suprotnih nejednakosti.

Dokaz teorema. Pretpostavimo da je nejednakost (2) ispunjena u specijalnom slučaju $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, $|\Omega| = 1$. Ako je pak $|\Omega| = 0$, onda je lijeva strana od (2) uvijek jednaka 0 pa nejednakost vrijedi iz trivijalnog razloga. Imamo li umjesto toga $|\Omega| = \alpha > 0$, onda možemo definirati $|A|' = \frac{1}{\alpha}|A|$ za svaki $A \in \mathcal{F}$. Tada je $|\Omega|' = 1$, a (2) postaje

$$\alpha \sum_{i=1}^{m} c_i \, |f_i(A_1, \ldots, A_n)|' \geq 0,$$

što slijedi primjenom naše pretpostavke na $A \mapsto |A|'$. Zaključujemo da nejednakost (2) ostaje vrijediti kad god je $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, bez uvjeta na $|\Omega|$.

Uzmimo bilo koju algebru $\mathcal{F}$ podskupova od Ω i bilo koju skupovnu funkciju $A \mapsto |A|$ sa svojstvom (1). Za dane $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ promotrimo svih 2^n mogućih presjeka oblika

$$A_1^\star \cap A_2^\star \cap \ldots \cap A_n^\star,$$

pri čemu je za svaki $j = 1, 2, \ldots, n$ ili $A_j^\star = A_j$ ili $A_j^\star = A_j^c = \Omega \setminus A_j$. Možda su neki od tih presjeka prazni, no to nas neće smetati. Svi se oni moraju nalaziti u kolekciji $\mathcal{F}$ zbog zatvorenosti na operacije presjeka i komplementiranja. Izlistajmo te skupove (u nekom poretku) kao $B_1, B_2, \ldots, B_{2^n}$ i primijetimo da su svaka dva od njih međusobno disjunktna, naprosto radi činjenice da postoji indeks j takav da je jedan sadržan u A_j, a drugi u A_j^c. Osim toga je po distributivnosti presjeka u odnosu na uniju,

$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{2^n} = (A_1 \cup A_1^c) \cap (A_2 \cup A_2^c) \cap \ldots \cap (A_n \cup A_n^c) = \Omega. \tag{3}$$

Sada primijetimo da za svaki $i = 1, \ldots, m$ i svaki $k = 1, \ldots, 2^n$ vrijedi

$$f_i(A_1, \ldots, A_n) \cap B_k = f_i(A_1 \cap B_k, \ldots, A_n \cap B_k). \tag{4}$$

To se vidi is opisa izraza $f_i(A_1, \ldots, A_n)$ uzastopnom primjenom formula

$$(C \cup D) \cap B = (C \cap B) \cup (D \cap B) \quad \text{i} \quad (C \cap D) \cap B = (C \cap B) \cap (D \cap B).$$

Korištenjem jednakosti (3) imamo

$$f_i(A_1, \ldots, A_n) = f_i(A_1, \ldots, A_n) \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{2^n} B_k \Big) = \bigcup_{k=1}^{2^n} \big(f_i(A_1, \ldots, A_n) \cap B_k \big).$$

Zbog disjunktnosti od B_k i aditivnosti (1) je

$$\big| f_i(A_1, \ldots, A_n) \big| = \sum_{k=1}^{2^n} |f_i(A_1, \ldots, A_n) \cap B_k|,$$

a primjenom (4) konačno dobivamo

$$\big| f_i(A_1, \ldots, A_n) \big| = \sum_{k=1}^{2^n} |f_i(A_1 \cap B_k, \ldots, A_n \cap B_k)|,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \, |f_i(A_1, \ldots, A_n)| = \sum_{k=1}^{2^n} \sum_{i=1}^{m} c_i \, |f_i(A_1 \cap B_k, \ldots, A_n \cap B_k)|. \tag{5}$$

Uočimo da za svaki izbor od j i k vrijedi ili $B_k \subseteq A_j$ ili $B_k \subseteq A_j^c$. Time smo dobili $A_j \cap B_k \in \mathcal{F}_k$, pri čemu označavamo $\mathcal{F}_k = \{\emptyset, B_k\}$, što je trivijalna algebra podskupova od B_k. Primjenom naše pretpostavke da (2) vrijedi u toj trivijalnoj situaciji dobivamo upravo

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \, |f_i(A_1 \cap B_k, \ldots, A_n \cap B_k)| \geq 0.$$

Zbrajanjem po $k = 1, \ldots, 2^n$ u kombinaciji s jednakošću (5) dokazujemo tvrdnju, tj. nejednakost (2) u općenitom slučaju. $\square$

Glavna ideja dokaza bila je "parcelirati" Ω na konačno mnogo dijelova B_k takvih da su svi presjeci $A_j \cap B_k$ trivijalni i posljedično se svaki A_j može prikazati kao konačna unija tih dijelova. Takva particija od Ω se naziva *atomizacija*, a njeni članovi B_k se zovu *atomi*. Gornji bi teorem imao jednostavniji dokaz da smo radili samo s konačnim skupovima i s $|A|$ označavali naprosto broj elemenata od A, kao u primjeru pod (a). Naime, najprirodnija atomizacija konačnog skupa Ω je upravo rastav na njegove jednočlane podskupove. Čitatelj može sam pojednostaviti argumente u tom specijalnom slučaju, koristeći jedino tehniku dvostrukog prebrojavanja. Jačina dokazanog rezultata je u njegovoj općenitosti: možemo ga primjenjivati na likove u ravnini, tijela u prostoru, itd.

Netom dokazani teorem nema neko posebno ime i smatra se svojevrsnim "matematičkim folklorom", premda mu gornja formulacija nije odviše poznata. Autor je prvi put na taj rezultat naišao u zbirci zadataka [4].

Nadalje ćemo prezentirati nekoliko primjera kod kojih se naš teorem može elegantno primijeniti, a čitateljima ostaviti i nekoliko zadataka za vježbu. Napomenimo da se problemi koji slijede mogu riješiti i drukčijim (ad hoc) metodama, ali im gornji teorem omogućava sustavan i računski jednostavan pristup.

Primjer 1. U prostoru su dana četiri (ne nužno konveksna) poliedra. Dokažite da je prosječna vrijednost volumena presjeka od po dva od tih poliedara veća ili jednaka prosječnoj vrijednosti volumena presjeka od po tri poliedra.

Rješenje. Ako poliedre označimo A_1, A_2, A_3, A_4 te pišemo $|A|$ za volumen od A, problem postaje dokazati

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}\Big(|A_1\cap A_2| + |A_1\cap A_3| + |A_1\cap A_4| + |A_2\cap A_3| + |A_2\cap A_4| + |A_3\cap A_4|\Big)\\ &\geq \frac{1}{4}\Big(|A_1\cap A_2\cap A_3| + |A_1\cap A_2\cap A_4| + |A_1\cap A_3\cap A_4| + |A_2\cap A_3\cap A_4|\Big). \qquad (6)\end{aligned}$$

Neka je Ω kugla dovoljno velika da su u njoj sadržana sva četiri poliedra. Teorem ćemo moći primijeniti nakon što prebacimo desnu stranu na lijevu. Kako nakon primjene teorema možemo vratiti taj izraz na desnu stranu, nećemo taj logički korak zapisivati, a ubuduće ni komentirati.

Zaključujemo da je nejednakost dovoljno provjeriti samo za skupove $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \{\emptyset, \Omega\}$ i uz "renormalizaciju" volumena $|\Omega| = 1$. Zbog očigledne simetrije u (6) bitan je samo broj skupova A_j koji su jednaki Ω. Označimo taj broj s ℓ, tako da je preostalih $4-\ell$ skupova prazno. Valja izračunati obje strane od (6) za $\ell = 0, 1, 2, 3, 4$.

ℓ	lijeva strana	desna strana
0	0	0
1	0	0
2	$1/6$	0
3	$1/2$	$1/4$
4	1	1

Na primjer, ako je $\ell = 3$ i recimo $A_1 = A_2 = A_3 = \Omega$, $A_4 = \emptyset$, tada je lijeva strana u (6) jednaka $\frac{1}{6}(1+1+0+1+0+0)$, dok je desna strana jednaka $\frac{1}{4}(1+0+0+0)$. Uočimo da je u svakom retku tablice lijeva strana veća ili jednaka desnoj, čime je provjerena tražena nejednakost.

Poopćenje od (6) je dano kao zadatak 1 na kraju.

Primjer 2. (*formula uključivanja-isključivanja*)
Neka je $A \mapsto |A|$ konačna i konačno aditivna mjera na nekoj algebri podskupova $\mathcal{F}$.

Dokažite da za $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ vrijedi identitet

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| = \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Napomenimo da prva suma na desnoj strani ima $\binom{n}{1} = n$, druga $\binom{n}{2}$, treća $\binom{n}{3}$ pribrojnika, itd. Ako $|A|$ interpretiramo kao vjerojatnost $\mathrm{P}(A)$, tada se gornja jednakost obično naziva *Sylvesterova formula*. Najpoznatiji je pak specijalni slučaj za konačne skupove, vidjeti npr. [7].

Rješenje. Po našem teoremu opet smijemo pretpostaviti da je svaki A_j ili jednak Ω ili jednak $\emptyset$ te normalizirati $|\Omega| = 1$. Ako je neprazno točno $\ell \ge 1$ od skupova $A_1, \ldots, A_n$, tada je lijeva strana jednaka 1, dok je desna

$$\binom{\ell}{1} - \binom{\ell}{2} + \binom{\ell}{3} - \ldots + (-1)^{\ell+1}\binom{\ell}{\ell} + 0 + \ldots + 0.$$

Njihova jednakost je jednostavna posljedica binomnog poučka,

$$0 = (1-1)^{\ell} = 1 - \binom{\ell}{1} + \binom{\ell}{2} - \ldots + (-1)^{\ell}\binom{\ell}{\ell}.$$

Ako su pak svi A_j jednaki $\emptyset$, onda su obje strane 0 pa je jednakost trivijalno ispunjena. Time je dokaz završen. Formula uključivanja-isključivanja se na ovom nivou općenitosti (za skupove koji ne moraju biti konačni) obično dokazuje matematičkom indukcijom po n, pogledajte na primjer u [3].

Čitatelj može pokušati na sličan način riješiti zadatak 2 koji pokazuje kako se $\big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big|$ može ocijeniti samo pomoću dvostrukih i trostrukih presjeka.

Primjer 3.[2] Pokrivač ima 5 zakrpa, od kojih je svaka površine barem $1/2$ površine čitavog pokrivača. Dokažite da postoje dvije od tih zakrpa čiji presjek ima površinu barem $1/5$ površine pokrivača.

Rješenje. Zakrpe shvatimo kao skupove A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, a $|A|$ interpretirajmo kao površinu skupa A. Označimo cijeli pokrivač s Ω. Treba pokazati da postoje indeksi i, j takvi da je $|A_i \cap A_j| \ge \frac{1}{5}|\Omega|$. Dokazat ćemo, u stvari, nešto jaču tvrdnju:

$$\frac{1}{10}\sum_{1\le i<j\le 5} |A_i \cap A_j| \ge \frac{1}{5}|\Omega|.$$

Kako ima točno $\binom{5}{2} = 10$ parova indeksâ $1 \le i < j \le 5$, vidimo da je prosječna vrijednost površina presjeka $A_i \cap A_j$ barem $\frac{1}{5}|\Omega|$ pa je onda sigurno površina nekog od presjeka veća ili jednaka tom broju.

Pokušajmo naći i dokazati pogodnu nejednakost oblika

$$\sum_{1\le i<j\le 5} |A_i \cap A_j| \ge \alpha \sum_{i=1}^{5} |A_i| - \beta \Big|\bigcup_{i=1}^{5} A_i\Big|, \tag{7}$$

za neke parametre $\alpha, \beta \ge 0$. Dijeljenjem s 10 te korištenjem $|A_i| \ge \frac{1}{2}|\Omega|$ i $\big|\bigcup_{i=1}^{5} A_i\big| \le |\Omega|$ imamo

[2] Zadatak je preuzet iz knjige [6].

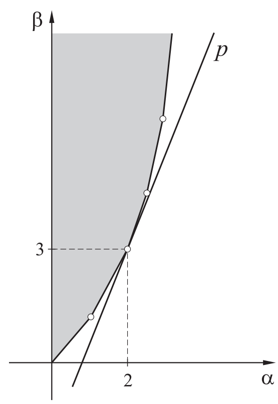
$$\frac{1}{10}\sum_{1\le i<j\le 5}|A_i\cap A_j| \ge \frac{1}{10}\cdot\alpha\cdot 5\cdot\frac{1}{2}|\Omega| - \frac{1}{10}\cdot\beta\cdot|\Omega| = \Big(\frac{\alpha}{4}-\frac{\beta}{10}\Big)|\Omega|.$$

Prema tome, treba odrediti α i β takve da uvijek vrijedi (7) i da je $\frac{\alpha}{4}-\frac{\beta}{10}=\frac{1}{5}$, tj. $5\alpha-2\beta-4=0$.

Prema našem teoremu znamo da je nejednakost (7) dovoljno testirati na podskupovima $A_j\in\{\emptyset,\Omega\}$. Neka je točno ℓ od njih jednako Ω. Za razne vrijednosti od ℓ dobivamo razne linearne uvjete na α i β.

ℓ	uvjet
0	trivijalan
1	$\alpha-\beta\le 0$
2	$2\alpha-\beta-1\le 0$
3	$3\alpha-\beta-3\le 0$
4	$4\alpha-\beta-6\le 0$
5	$5\alpha-\beta-10\le 0$

Skicirajmo u koordinatnom sustavu točke (α,β) za koje je ispunjeno svih 5 netrivijalnih uvjeta, tj. koje se nalaze u svih 5 njima određenih poluravnina. Trebamo odabrati točku iz tog (na slici zatamnjenog) područja koja još leži na pravcu p zadanom jednadžbom $5\alpha-2\beta-4=0$. Sa slike vidimo da je jedna jedina takva točka $(\alpha,\beta)=(2,3)$. Sada znamo da je za taj izbor od α i β ispunjena nejednakost (7), koja pak povlači tvrdnju zadatka.



Skratili bismo posao da smo odmah pogodili prave vrijednosti parametara $\alpha=2$, $\beta=3$ te samo za njih provjeravali (7). S druge pak strane, u zadatku nije ni trebalo pisati donju među $\frac{1}{5}|\Omega|$, nego se do nje moglo doći maksimizirajući izraz $\frac{\alpha}{4}-\frac{\beta}{10}$ po svim (α,β) iz označenog područja. Geometrijski se to radi tako da se pravac $\frac{1}{4}\alpha-\frac{1}{10}\beta=0$ translatira udesno dokle god siječe zatamnjeno područje ili njegov rub.

Primjer 4. (Studentsko natjecanje *Miklós Schweitzer* 1968.[3])
Neka su n,k prirodni brojevi, A konačan skup te $A_1,\dots,A_n\subseteq A$ takvi da vrijedi

(i) $|A_i|=n-1$ za $i=1,\dots,n$,

(ii) $|A_i\cap A_j|\le k$ za $1\le i<j\le n$.

Dokažite da je $|A|\ge\frac{(n-1)n}{k+1}$.

[3] Autor zadatka je K. Corrádi, vidjeti knjigu [4], zadatak C.3.

Rješenje. Sličnim rezoniranjem kao u prethodnom primjeru zadatak se može svesti na ocjenu

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| \geq \frac{2k+1}{(k+1)^2}\sum_{i=1}^{n}|A_i| - \frac{2}{(k+1)^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i\cap A_j|, \tag{8}$$

pri čemu su $A_1,\ldots,A_n \subseteq \Omega$ ovog puta čak konačni skupovi. Naime, korištenjem uvjeta (i), (ii) iz (8) odmah proizlazi

$$|A| \geq \Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| \geq \frac{2k+1}{(k+1)^2}\cdot n\cdot(n-1) - \frac{2}{(k+1)^2}\cdot\binom{n}{2}\cdot k = \frac{(n-1)n}{k+1}.$$

Po teoremu je nejednakost (8) za čak proizvoljnu konačnu i konačno aditivnu mjeru dovoljno provjeriti uz renormalizaciju $|\Omega| = 1$ i kada je ili $A_j = \emptyset$ ili $A_j = \Omega$ za svaki j. Pišimo opet ℓ za broj nepraznih skupova A_j i pretpostavimo $\ell \geq 1$. Treba vidjeti da vrijedi

$$1 \geq \frac{2k+1}{(k+1)^2}\cdot\ell - \frac{2}{(k+1)^2}\cdot\binom{\ell}{2},$$

no račun pokazuje da je to naprosto ekvivalentno s $(k+1-\ell)^2 \geq 0$. Tako je provjerena ocjena (8), a time je i riješen zadatak.

Završimo ovo razmatranje s nekoliko problema za samostalno rješavanje. U zadacima 1 i 2 se podrazumijeva da se skupovi A_j nalaze u nekoj algebri podskupova $\mathcal{F}$, a skupovna funkcija $A \mapsto |A|$ je konačna i konačno aditivna mjera na $\mathcal{F}$.

Zadatak 1. (*Fréchetove nejednakosti* [2])
Za skupove $A_1,\ldots,A_n$ i prirodni broj $k \leq n-1$ dokažite

$$\frac{1}{\binom{n}{k}}\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}| \geq \frac{1}{\binom{n}{k+1}}\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_{k+1}\leq n}|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_{k+1}}|.$$

U gornjim izrazima sumiramo po svim mogućim rastućim izborima indeksâ $i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}$.

Uputa. Nakon primjene teorema preostaje provjeriti

$$\frac{\binom{\ell}{k}}{\binom{n}{k}} \geq \frac{\binom{\ell}{k+1}}{\binom{n}{k+1}}, \quad \ell = k+1,\ldots,n,$$

za što pak treba raspisati binomne koeficijente. U primjeru 1 je bio obrađen posebni slučaj $n = 4$ i $k = 2$.

Zadatak 2. (*Bonferronijeve nejednakosti* [1])
Dokažite da za $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vrijedi:

a) $$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| \geq \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i\cap A_j|,$$

b) $$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| \leq \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n}|A_i\cap A_j\cap A_k|.$$

Uputa. Za svaki prirodni broj ℓ imamo

$$\ell - \frac{\ell(\ell-1)}{2} - 1 = -\frac{(\ell-1)(\ell-2)}{2} \leq 0$$

i

$$\ell - \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \frac{\ell(\ell-1)(\ell-2)}{6} - 1 = \frac{(\ell-1)(\ell-2)(\ell-3)}{6} \geq 0.$$

Općenitiju formulaciju može se naći u [7].

Zadatak 3. (*Boole-Fréchetova nejednakost* [2])
Neka su $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ događaji iz vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Dokažite da vrijedi ocjena

$$\mathrm{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - n + 1.$$

Uputa. Pišući $|A| = \mathrm{P}(A)$ i koristeći činjenicu $\mathrm{P}\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) \leq \mathrm{P}(\Omega) = 1$, interpretirajte nejednakost kao

$$\Big|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big| \geq \sum_{i=1}^{n} |A_i| - (n-1)\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big|.$$

Promatranje komplemenata skupova A_i vodi nešto drugačijem rješenju zadatka.

Zadatak 4. (*Mediteransko matematičko natjecanje* 2005.)
Neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi prirodnih brojeva. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |A_i| + \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{1 \leq i<j<k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \geq \frac{2}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i<j \leq n} |A_i \cap A_j|.$$

Uputa. Dva različita rješenja ovog zadatka se mogu naći u knjizi [5].

Literatura

[1] C. E. Bonferroni, *Teoria statistica delle classi e calcolo delle probabilità*, Pubbl. d. R. Ist. Super. di Sci. Econom. e Commerciali di Firenze, **8** (1936), 1–62.

[2] M. Fréchet, *Généralisations du théorème des probabilités totales*, Fundamenta Mathematica, **25** (1935), 379–387.

[3] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[4] G. J. Székely (urednik), *Contests in Higher Mathematics: Miklós Schweitzer Competitions, 1962–1991*, Springer, 1996.

[5] T. Tadić, *Pripreme za matematička natjecanja za 4. razred gimnazije*, Element, Zagreb, 2008.

[6] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[7] D. Veljan, *Kombinatorika i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.