Jedna algebarska nejednakost i njene primjene

Dragoljub Milošević, Bratislav Sredojević[1]

U matematici ima puno zanimljivih nejednakosti. Naišli smo na jednu od njih pomoću koje se dokazuju druge dvije. U zadacima za samostalno rješavanje ima još nekoliko njih.

Neka su a, b, c, x, y, z pozitivni realni brojevi. Na osnovu poznate elemetarne nejednakosti $p+q \geqslant 2\sqrt{pq}$, gdje su p i q pozitivni brojevi, imamo

$$\frac{y+z}{x}\cdot a^2+\frac{z+x}{y}\cdot b^2+\frac{x+y}{z}\cdot c^2=\Big(\frac{y}{x}\cdot a^2+\frac{x}{y}\cdot b^2\Big)+\Big(\frac{z}{y}\cdot b^2+\frac{y}{z}\cdot c^2\Big)+\Big(\frac{x}{z}\cdot c^2+\frac{z}{x}\cdot a^2\Big)$$
$$\geqslant 2ab+2bc+2ca.$$

Ako na obje strane posljednje nejednakosti dodamo $a^2+b^2+c^2$, dobijemo

$$\frac{x+y+z}{x}a^2+\frac{y+z+x}{y}b^2+\frac{z+x+y}{z}c^2 \geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca,$$

odnosno

$$(x+y+z)\Big(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\Big) \geqslant (a+b+c)^2,$$

ili

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}. \qquad (*)$$

Sada ćemo ovu nejednakost primijeniti za dokazivanje nekih drugih interesantnih nejednakosti.

Primjer 1. Dokazati da za kutove trokuta vrijedi nejednskost

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \geqslant \Big(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\Big)^2. \qquad (1)$$

Rješenje. Ako u nejednakost $(*)$ stavimo

$$a=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\quad b=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},\quad c=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},\quad x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},\quad y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},\quad z=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

dobivamo

$$\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}+\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}+\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$
$$\geqslant \frac{\Big(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\Big)^2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

[1] Autori su profesori matematike u srednjoj školi u Gornjem Milanovcu, Srbija.

a odavde, zbog poznate jednakosti za kutove trokuta

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1,$$

slijedi tražena nejednakost.

Primjer 2. Dokazati da za pozitivne brojeve a, b, c za koje vrijedi $a+b+c=3$ imamo nejednakost

$$\frac{a}{b(2c+a)}+\frac{b}{c(2a+b)}+\frac{c}{a(2b+c)}\geqslant 1. \tag{2}$$

Rješenje. Ako u nejednakost $(*)$ stavimo

$$x=ab(2c+a),\quad y=bc(2a+b),\quad z=ca(2b+c)$$

imamo

$$\frac{a^2}{ab(2c+a)}+\frac{b^2}{bc(2a+b)}+\frac{c^2}{ca(2b+c)}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{ab(2c+a)+bc(2a+b)+ca(2b+c)},$$

ili

$$\frac{a}{b(2c+a)}+\frac{b}{c(2a+b)}+\frac{c}{a(2b+c)}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{(a^2b+b^2c+c^2a+abc)+5abc}. \tag{3}$$

Sada dokažimo

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc\leqslant\frac{4}{27}(a+b+c)^3. \tag{4}$$

Kako je ova nejednakost ciklična u odnosu na brojeve a, b, c možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostaviti da je $c=\min(a,b,c)$. Tada razlikujemo ova dva slučaja: i) $a<b$, ii) $a\geqslant b$.

i) Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja $a+b$, $b+c$, $c+a$ dobivamo

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a)&\leqslant\left[\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right]^3\\&=\frac{8}{27}(a+b+c)^3,\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}\frac{4}{27}(a+b+c)^3&\geqslant\frac{1}{2}(a+b)(b+c)(c+a)\\&=a^2b+b^2c+c^2a+abc+\frac{1}{2}(b-a)(a-c)(b-c)\\&\geqslant a^2b+b^2c+c^2a+abc,\end{aligned}$$

jer je $(b-a)(a-c)(b-c)\geqslant 0$ (zbog $a<b$ i $c=\min(a,b,c)$).

ii) Primjenom aritmetičko-geometrijske nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}\frac{4}{27}(a+b+c)^3 &= \frac{1}{2}\left[\frac{2b+(a+c)+(a+c)}{3}\right]^3\\ &\geqslant \frac{1}{2}[2b(a+c)^2]\\ &= b(a+c)^2.\end{aligned} \tag{5}$$

Kako je

$$\begin{aligned}b(a+c)^2-(a^2b+b^2c+c^2a+abc) &= abc+bc^2-b^2c-c^2a\\ &= c(ab+bc-b^2-ac)\\ &= c(a-b)(b-c),\end{aligned}$$

zbog $a \geqslant b \geqslant c$, dobivamo

$$b(a+c)^2-(a^2b+b^2c+c^2a+abc) \geqslant 0,$$

odnosno

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc \leqslant b(a+c)^2. \tag{6}$$

Nejednakost (4) dobivamo iz nejednakosti (5) i (6), čime je njen dokaz završen.

Radi $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$ (A-G nejednakost), imamo

$$abc \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3. \tag{7}$$

Iz nejednakosti (3), (4) i (7) i uvjeta $a+b+c=3$ imamo

$$\begin{aligned}\frac{a}{b(2c+a)}+\frac{b}{c(2a+b)}+\frac{c}{a(2b+c)} &\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{\frac{4}{27}(a+b+c)^3+5\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}\\ &= \frac{3}{a+b+c} = 1,\end{aligned}$$

čime smo dobili nejednakost (2).

Na kraju evo i nekoliko zadataka koji se mogu riješiti primjenom nejednakosti $(*)$.

1. Ako su x, y, z pozitivni brojevi, dokazati da za kutove trokuta vrijedi
$$\frac{y+z}{x}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\frac{z+x}{y}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\frac{x+y}{z}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geqslant 2.$$

2. Neka je $H=\dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$, $A=\dfrac{x+y+z}{3}$ i $K=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}$, $(x,y,z>0)$.
Dokazati nejednakosti $H \leqslant A \leqslant K$.

3. Ako su a, b, c, m, n pozitivni brojevi takvi da je $a^2+b^2+c^2=1$, dokazati nejednakost
$$\frac{a^3}{ma+nb}+\frac{b^3}{mb+nc}+\frac{c^3}{mc+na} \geqslant \frac{1}{m+n}.$$

4. Neka su a, b, c pozitivni brojevi pri čemu je $a+b+c=1$. Dokazati
$$(2a+b)(2b+c)(2c+a) \leqslant 1.$$