ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2014. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 2/258.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 286.

A) Zadaci iz matematike

3414. Nađi sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)=18.$$

Uputa. Koristi identitet $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$.

3415. Riješi sustav jednadžbi

$$x+y+z=2 \tag{1}$$

$$x^2-y^2-z^2=2 \tag{2}$$

$$x-3y^2+z=0. \tag{3}$$

3416. Dokaži da za svaki prirodan broj n jednadžba $x^2+y^2=z^n$ ima pozitivno cjelobrojno rješenje.

3417. Kružnica polumjera R prolazi kroz dva susjedna vrha kvadrata. Duljina tangente na kružnicu iz trećeg vrha kvadrata je dvaput dulja od njegove duljine stranice. Kolika je duljina stranice kvadrata?

3418. Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom uz vrh C. Označimo s $k(I,r)$ njemu upisanu kružnicu. Neka je D presjek pravaca BI i AC, a E je presjek od AI i BC. Povrsina trokuta AID je p, a površina trokuta BIE je q. Dokaži da je

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{r^2}.$$

3419. Nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ s vanjske strane šiljastokutnog trokuta ABC nacrtani su slični pravokutnici $ACMN$ i $BCPQ$. Dokaži da se pravci BN i AQ sijeku na visini iz C trokuta ABC.

3420. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i α, β, γ nasuprotni im kutovi, dokaži

$$c^2=a^2\cos 2\beta+b^2\cos 2\alpha+2ab\cos(\alpha-\beta).$$

3421. Dokaži da za svaki cijeli broj $n\geq 0$ i za svaki $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{\cos^{2n}x}+\frac{1}{\sin^{2n}x}\geq 2^{n+1}.$$

3422. Neka su $a,b,c,d\in[0,\pi]$ tako da vrijedi

$$2\cos a+6\cos b+7\cos c+9\cos d=0$$

$$2\sin a-6\sin b+7\sin c-9\sin d=0.$$

Dokaži jednakost

$$3\cos(a+d)=7\cos(b+c).$$

3423. Dani su jednakostranični trokuti $A_1A_2A_3$, A_1BC, A_2DE i A_3FG iste orijentacije. Dokaži da su polovišta dužina $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ i $\overline{BG}$ vrhovi jednakostraničnog trokuta.

3424. Duljina stranice kvadrata $ABCD$ je a. Iz vrhova A i C povučene su okomice AE i CF na ravninu $ABCD$ tako da je $|AE|=|AC|$ i $|CF|=\frac{3}{2}|AC|$. Odredi duljine $|BE|$, $|EF|$ i $|BF|$ u zavisnosti od a. Pokaži da je trokut BEF pravokutan s pravim kutom uz E i da je EF okomito na ravninu BDE.

3425. Članovi niza $(a_n)_{n\geq 0}$ zadovoljavaju relaciju

$$a_{m+n}+a_{m-n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})$$

za sve nenegativne cijele brojeve m i n takve da je $m\geq n$.

Ako je $a_1=1$, odredi a_n.

3426. Nađi funkciju $f(x)$ takvu da je

$$\bigcup_{c\in\mathbf{R}}\left\{y\geq\frac{1}{2}x^2+cx+c^2\right\}=\{(x,y)|y\geq f(x)\}.$$

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 374. Hrvatski rekord u utrci na 100 metara od prošle godine drži Dario Horvat i iznosi 10.2 sekunde. Pretpostavimo da je Dario prvih 20 metara jednoliko ubrzavao i nakon toga trčao do cilja svojom maksimalnom brzinom. Koliko iznosi ta brzina ako je ubrzavanje trajalo 3.4 sekunde?

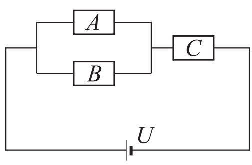
OŠ – 375. Učenik je želio izmjeriti temperaturu vatre u kaminu. Stavio je željezni predmet mase 200 grama neko vrijeme u vatru i nakon toga ga je pomoću kliješta brzo stavio u izoliranu posudu u kojoj je bilo 2 litre vode temperature $10\,^{\circ}\mathrm{C}$. Temperatura vode u posudi je porasla na $20\,^{\circ}\mathrm{C}$. Kolika je temperatura vatre? Zagrijavanje posude zanemarite. Specifični toplinski kapacitet željeza je $460\ \mathrm{J/kg}\,^{\circ}\mathrm{C}$, a vode $4200\ \mathrm{J/kg}\,^{\circ}\mathrm{C}$.

OŠ – 376. Akvarij je dugačak 5 dm, širok, 30 cm i visok 25 mm. U njega je utočeno 27 litara vode. Koliko je razina vode udaljena od gornjeg ruba akvarija?

OŠ – 377. Tijelo mase 2 kilograma miruje na horizontalnoj podlozi. Faktor trenja između njega i podloge iznosi 0.2. U v-t dijagramu prikažite gibanje tijela nakon što je na njega 2 sekunde djelovala sila od 6 njutna.

1560. Pri jednoliko ubrzanom gibanju trajanja 10 sekundi tijelo prevali ukupno 108 m, od toga 18 m u posljednjoj sekundi. Odredi ubrzanje, početnu brzinu i put prevaljen u prvoj sekundi.

1561. U strujnom krugu na slici otpornik A oslobađa Jouleovu snagu 4 W. Odredi snagu na otpornicima B i C. $R_A = 1\ \Omega$, $R_B = 2\ \Omega$, $R_C = 3\ \Omega$. Koliki je napon izvora?



1562. Konvergentna leća kružnog oblika promjera 10 cm ima žarišnu duljinu 60 cm. Sunčevu svjetlost fokusiramo pomoću leće. Ako je prividni promjer Sunca $0^{\circ}32'$, a svjetlosni tok zračenja $1000\ \mathrm{W/m^2}$ odredi:

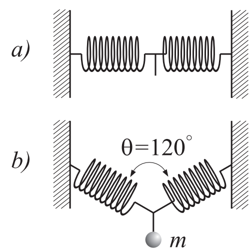
– veličinu nastale slike Sunca,

– snagu svjetlosnog zračenja u žarištu,

– svjetlosni tok $(\mathrm{W/m^2})$ u žarištu.

1563. Željezna plutača mase 150 kg (željeza) ima unutarnji volumen 250 litara i polako se puni vodom. U nekom trenutku, kad u plutaču uđe dovoljno vode, ona će potonuti. Koliko se litara zraka tada još nalazi u plutači? Gustoća željeza je $7.87\ \mathrm{kg/l}$, vode $1\ \mathrm{kg/l}$, a zraka je zanemariva.

1564. Dvije jednake opruge spojene su međusobno i učvršćene horizontalno tako da se između njih može objesiti uteg (slika a). Pri vješanju utega mase m, kut θ među oprugama se smanji sa 180° na 120° (slika b). Koliki će biti kut θ ako objesimo uteg mase $2m$? Duljina neopterećene opruge je zanemarivo mala.



1565. Refleksija svjetlosti koja upada okomito na prozirnu plohu indeksa loma n određena je izrazom (iz Fresnelovih relacija):

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 .$$

Odredi indeks loma stakla (reflektira 4%) i dijamanta (reflektira 17.2%) okomite svjetlosti.

1566. Sirius, najsjajnija zvijezda na nebu, udaljen je od Sunca 8.6 svjetlosnih godina (gs). Bliska zvijezda Procyon udaljena je 11.41 gs. Ako je prividni kut na nebu između tih dviju zvijezda 25.7°, koliko je Sirius udaljen od Procyona? Koliko je puta Sirius sjajniji gledano s Procyona u odnosu na "naš" pogled iz smjera Sunca? (Kako bi izračunali ili izmjerili prividni kut između dviju zvijezda?)

C) Rješenja iz matematike

3388. *Dokaži da je broj* $10\ldots01$*, s* 500 *nula, djeljiv s* 1001.

Rješenje. Za pozitivan neparan broj n vrijedi

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Primjenom ove formule dobivamo

$$1\underbrace{0\ldots0}_{500}1 = 10^{501} + 1 = (10^3)^{167} + 1 = (10^3+1)[(10^3)^{166} - (10^3)^{165} + \ldots - 10^3 + 1].$$

Dakle, $10^3 + 1 = 1001$ dijeli $1\underbrace{0\ldots0}_{500}1$.

Lejla Jašarević (1),
Peta Gimnazija, Sarajevo

3389. *a) Ako su* x, y *pozitivni realni brojevi, dokaži nejednakost*

$$\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

b) Ako su x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ *pozitivni realni brojevi, dokaži nejednakost*

$$\frac{x_1+x_3}{x_2^2} + \frac{x_2+x_4}{x_3^2} + \ldots + \frac{x_n+x_2}{x_1^2} \geqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}.$$

Rješenje.

a)

$$\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y} / \cdot x^2y^2$$

$$\iff x^3 + y^3 \geqslant x^2y + xy^2$$

$$\iff (x+y)(x^2 - xy + y^2) \geqslant (x+y)xy \ / \ : (x+y)$$

$$\iff (x-y)^2 \geqslant 0$$

što vrijedi.

b) $$\frac{x_1+x_3}{x_2^2} + \frac{x_2+x_4}{x_3^2} + \ldots + \frac{x_n+x_2}{x_1^2} \geqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$$

možemo zapisati kao

$$\left(\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}\right) + \left(\frac{x_2}{x_3^2} + \frac{x_3}{x_2^2}\right) + \ldots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_2^2} + \frac{x_n}{x_{n-1}^2}\right) + \left(\frac{x_n}{x_1^2} + \frac{x_1}{x_n^2}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1}$$

$$= 2\sum\frac{1}{x_1}.$$

Dana nejednakost vrijedi zbog a) dijela zadatka.

Petar Orlić (2),
XV. gimnazija, Zagreb

3390. *Ako su* a, b, c *duljine stranica trokuta i* α, β, γ *nasuprotni im kutovi, dokaži nejednakost*

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geqslant 4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

Rješenje. Imamo

$$2bc\cos\alpha + a^2 = b^2 + c^2$$

$$2\cos\alpha + \frac{a^2}{bc} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}.$$

Kako je $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geqslant 2$ imamo

$$\frac{a^2}{bc} \geqslant 2(1-\cos\alpha) = 4\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

i analogno

$$\frac{b^2}{ca} \geqslant 4\sin^2\frac{\beta}{2}, \quad \frac{c^2}{ab} \geqslant 4\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

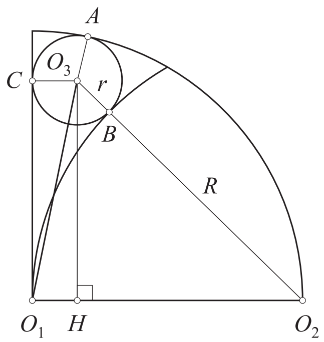
Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost.

Halil Lačević (1),
Tursko-Bosanski Sarajevo College, Sarajevo

3391. *Promatraj četvrtinu kruga polumjera* R. *Iz jedne krajnje točke luka opiši luk polumjera* R *koji dijeli promatranu četvrtinu kruga na dva "zakrivljena trokuta". U manji od njih upisana je kružnica polumjera* r. *Koliki je omjer* $\frac{r}{R}$ *?*

Rješenje. Imamo

$$|O_1O_2| = R, \quad |O_2O_3| = R + r,$$
$$|O_1O_3| = R - r, \quad |O_1H| = |CO_3| = r.$$



Iz $\triangle O_1HO_3$ imamo:

$$|O_3H|^2 = |O_1O_3|^2 - |O_1H|^2 = (R - r)^2 - r^2,$$

a iz $\triangle O_2HO_3$ je:

$$|O_3H|^2 = |O_2O_3|^2 - |O_2H|^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2.$$

Tada je

$$(R - r)^2 - r^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2,$$

odakle je $\dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{6}$.

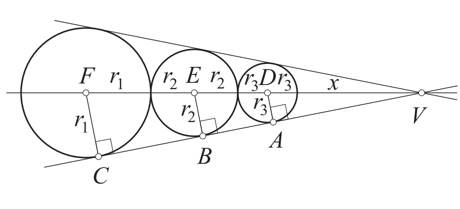
Petar Orlić (2), Zagreb

3392. *Tri kružnice $k_1(r_1)$, $k_2(r_2)$ i $k_3(r_3)$, tim redom, dodiruju dva pravca, a srednja od njih dodiruje dvije preostale. Dokaži da vrijedi*

$$r_1r_3 = r_2^2.$$

Rješenje. Iz sličnosti trokuta $\triangle VDA \sim \triangle VEB \sim \triangle VFC$ po KK dobivamo

$$\frac{x + r_3}{r_3} = \frac{x + 2r_3 + r_2}{r_2} = \frac{x + 2r_3 + 2r_2 + r_1}{r_1}$$
$$\Longrightarrow \frac{x}{r_3} = \frac{x + 2r_3}{r_2} = \frac{x + 2r_3 + 2r_2}{r_1}.$$



Iz $\dfrac{x}{r_3} = \dfrac{x + 2r_3}{r_2}$ slijedi

$$xr_2 = xr_3 + 2r_3^2,$$
$$x = \frac{2r_3^2}{r_2 - r_3}. \tag{1}$$

Iz $\dfrac{x}{r_3} = \dfrac{x + 2r_3 + 2r_2}{r_1}$ imamo

$$xr_1 = r_3x + 2r_3^2 + 2r_2r_3,$$
$$x(r_1 - r_3) = 2r_3(r_2 + r_3),$$
$$x = \frac{2r_3(r_2 + r_3)}{r_1 - r_3}. \tag{2}$$

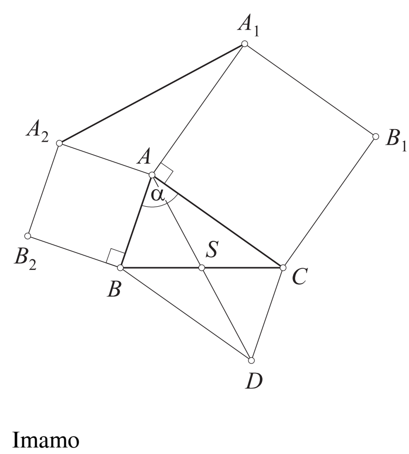
Iz (1) i (2) slijedi

$$\frac{2r_3^2}{r_2 - r_3} = \frac{2r_3(r_2 + r_3)}{r_1 - r_3}$$
$$r_3(r_1 - r_3) = r_2^2 - r_3^2$$
$$r_2^2 = r_1r_3.$$

Petar Orlić (2), Zagreb

3393. *Nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ s vanjske strane trokuta ABC konstruirani su kvadrati ACB_1A_1 i BAA_2B_2. Nađi duljinu dužine $\overline{A_1A_2}$ u zavisnosti od duljina a, b, c stranica trokuta ABC.*

Rješenje. Konstruirajmo točku D tako da je $ABDC$ paralelogram.



Imamo

$$|AB| = |AA_2| = |CD|,$$
$$|BD| = |AA_1| = |AC|,$$

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = 180^\circ - \alpha = \sphericalangle A_2AA_1.$$

Nadalje,

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD \cong \triangle A_2AA_1 \text{ po SKS,}$$

$$|A_1A_2| = |AD| = \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

(jer je $|AS| = |SD| = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$ duljina težišnice $\triangle ABC$ na $\overline{BC}$).

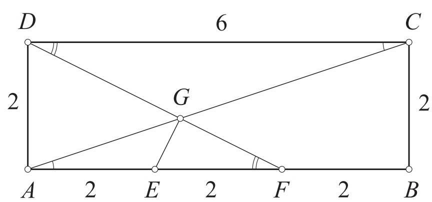
Petar Orlić (2), Zagreb

3394. *Duljine stranica pravokutnika $ABCD$ su $|AB| = 6$ cm i $|BC| = 2$ cm. Na stranici $\overline{AB}$ su dane točke E i F tako da je $|AE| = |EF| = |FB|$. Pravac DF siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki G. Dokaži da je $EG \perp DF$.*

Prvo rješenje.

$$|AC| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},$$

$$|FD| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$



Nadalje,

$$\sphericalangle GAF = \sphericalangle GCD, \quad \sphericalangle GFA = \sphericalangle GDC$$

(uz presječnicu).

Iz sličnosti trokuta $\triangle GAF \sim \triangle GCD$ po KK dobivamo

$$\frac{|GD|}{|GF|} = \frac{|CD|}{|AF|} = \frac{3}{2}$$

$$|GD| + |GF| = \frac{5}{2}|GF| = 2\sqrt{5}$$

$$|GF| = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$|AF| : |FD| = 4 : 2\sqrt{5}$$

$$|GF| : |EF| = \frac{4\sqrt{5}}{5} : 2 = 4 : 2\sqrt{5}.$$

Kako su ovi omjeri jednaki i zajednički kut uz F,

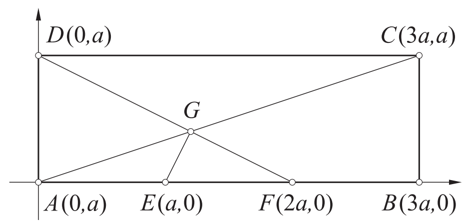
$$\triangle EFG \sim \triangle DFA \text{ po KK}$$

pa imamo

$$\sphericalangle EGF = \sphericalangle DAF = 90^\circ.$$

Petar Orlić (2), Zagreb

Drugo rješenje. Promatrajmo zadatak u Kartezijevu koordinatnom sustavu.



Promatrat ćemo pravokutnik kojemu su duljine stranica $|AB| = 3a$, $|BC| = a$.

Jednadžba pravca AC je $y = \dfrac{x}{3}$, a pravca DF $y = -\dfrac{1}{2}x + a$. Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobivamo koordinate točke $G\left(\dfrac{6a}{5}, \dfrac{2a}{5}\right)$.

Koeficijent smjera pravca DF je $-\dfrac{1}{2}$.

Koeficijent smjera pravca GE je $\dfrac{\frac{2a}{5} - 0}{\frac{6a}{5} - a} = 2$.

Odavde slijedi $GE \perp DF$.

Ur.

3395. *Ako su k i n prirodni brojevi i k neparan, dokaži da $1 + 2 + \ldots + n$ dijeli $1^k + 2^k + \ldots + n^k$.*

Rješenje. Kako je

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

ekvivalentna je tvrdnja da $n(n+1)$ dijeli $2(1^k + 2^k + \ldots + n^k)$. Kako su n i $n+1$ relativno prosti dovoljno je pokazati da

$$n \mid 2(1^k + 2^k + \ldots + n^k) \quad \text{i}$$

$$(n+1) \mid 2(1^k+2^k+\ldots+n^k).$$

Kako je k neparan, dobivamo

$$\begin{aligned}2(1^k&+2^k+\ldots+n^k)\\ &=[1^k+(n-1)^k]+[2^k+(n-2)^k]\\ &\quad+\ldots+[(n-1)^k+1^k]+2n^k,\end{aligned}$$

što je višekratnik od n. Nadalje

$$\begin{aligned}2(1^k&+2^k+\ldots+n^k)\\ &=(1^k+n^k)+(2^k+(n-1)^k)\\ &\quad+\ldots+(n^k+1^k),\end{aligned}$$

što je djeljivo s $n+1$.

Halil Lačević (1), Sarajevo, BiH

3396. *Odredi sumu*

$$\cos\alpha+\binom{n}{1}\cos(\alpha+\beta)+\binom{n}{2}\cos(\alpha+2\beta)+\ldots+\cos(\alpha+n\beta).$$

Rješenje. Stavimo $a=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $b=\cos\beta+i\sin\beta$. Tražena suma je realni dio kompleksnog broja

$$a+\binom{n}{1}ab+\binom{n}{2}ab^2+\ldots+\binom{n}{n}ab^n=a(1+b)^n,$$

jer je

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+k\beta)+i\sin(\alpha+k\beta)&=e^{i(\alpha+k\beta)}\\ &=e^{i\alpha}\cdot e^{ik\beta}=ab^k,\ k=1,2,\ldots,n.\end{aligned}$$

No,

$$\begin{aligned}1+b&=1+\cos\beta+i\sin\beta\\ &=2\cos^2\frac{\beta}{2}+2i\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\\ &=2\cos\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}+i\sin^2\frac{\beta}{2}\right)\\ &=2\cos\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\beta}{2}},\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}a(1+b)^n&=e^{i\alpha}\left(2\cos\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\beta}{2}}\right)^n\\ &=\left(2\cos\frac{\beta}{2}\right)^n e^{i\alpha}e^{i\frac{n\beta}{2}}\\ &=\left(2\cos\frac{\beta}{2}\right)^n e^{i(\alpha+\frac{n\beta}{2})}.\end{aligned}$$

Dana suma je jednaka

$$\left(2\cos\frac{\beta}{2}\right)^n\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right).$$

Ur.

3397. *Promatraj kvadratne jednadžbe $x^2+a_kx+b_k=0$, $k=1,2,\ldots,8$. Svaka od njih ima jedno rješenje $x_0=2$ dok je zbroj svih preostalih jednak 2008. Dokaži da su oba rješenja jednadžbe*

$$x^2+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_8}{8}x+\frac{b_1+b_2+\ldots+b_8}{8}=0$$

prosti brojevi.

Rješenje. Označimo li drugo rješenje jednadžbe $x^2+a_kx+b_k=0$ s x_k imamo

$$x_1+\ldots+x_8=2008.$$

U svakoj je jednadžbi jedno rješenje 2, tj.

$$4+2a_k+b_k=0,$$
$$b_k=-4-2a_k.$$

Jednadžba postaje

$$x^2+a_kx-2a_k-4=0,$$

odakle je

$$x_k=\frac{-a_k\pm\sqrt{a_k^2+8a_k+16}}{2}=\frac{-a_k\pm(a_k+4)}{2}$$

$$x_k=-a_k-2 \quad \text{tj.} \quad a_k=-x_k-2.$$

Iz $\sum x_k=2008$ dobivamo

$$\sum a_k=-\sum x_k-2\cdot 8=-2024,$$
$$\sum b_k=-2\sum a_k-4\cdot 8=4016.$$

Rješavajući jednadžbu

$$x^2+\frac{\sum a_k}{8}x+\frac{\sum b_k}{8}=0$$

koja postaje

$$x^2-253x+502=0,$$

dobivamo rješenja 2 i 251 koja su oba prosta.

Petar Orlić (2), Zagreb

3398. *Dani su realni brojevi a, b, c za koje vrijedi*

$$a+b+c=2 \quad i \quad a^2+b^2+c^2=2.$$

Dokaži da između njih postoje dva čija je razlika veća ili jednaka 1.

Prvo rješenje. Zbog simetrije možemo pretpostaviti $a \leqslant b \leqslant c$ i $b = a+x$, $c = a+y$, $x, y \geqslant 0$, $x \leqslant y$.

Jednakosti postaju

$$3a + x + y = 2 \quad \text{tj.} \quad a = \frac{2-x-y}{3};$$

$$a^2 + (a+x)^2 + (a+y)^2 = 2$$

tj.

$$3a^2 + 2ax + 2ay + x^2 + y^2 = 2.$$

Uvrštavanjem $a = \dfrac{2-x-y}{3}$ dobivamo:

$$\frac{(2-x-y)^2}{3} + x^2 + y^2 + 2(x+y)\frac{2-x-y}{3} = 2.$$

Sređivanjem dobijemo

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy = 2 \;/ : 2$$

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

$$x(x-y) + y^2 = 1.$$

Kako je $x \leqslant y$ dobivamo $x(x-y) \leqslant 0$, $y^2 \geqslant 1$ tj. $y \geqslant 1$.

Dakle, razlika najvećeg i najmanjeg broja je barem 1.

Petar Orlić (2), Zagreb

Drugo rješenje. Primijetimo da je

$$\begin{aligned}(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &= 3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 \\ &= 3 \cdot 2 - 2^2 = 2.\end{aligned}$$

Uvedimo zamjenu $x = a-b$, $y = b-c$, $z = c-a$. Tada je

$$x + y + z = 0 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

Između brojeva x, y, z ili postoje dva nenegativna ili postoje dva nepozitivna broja. Neka su to y i z. Imamo

$$\begin{aligned}2 = x^2 + y^2 + z^2 &= x^2 + (y+z)^2 - 2yz \\ &= 2x^2 - 2yz,\end{aligned}$$

$$x^2 = 1 + yz \geqslant 1,$$

$$(a-b)^2 \geqslant 1 \quad \text{tj.} \quad |a-b| \geqslant 1.$$

Ur.

3399. *Da li je vjerojatnije da će kod bacanja tri kocke ukupan zbroj brojeva na njima biti 11 ili 12?*

Rješenje. Neka je A događaj da se dobije zbroj 11, a B događaj da se dobije zbroj 12. Ukupan broj slučajeva je $n = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Za slučaj A imamo mogućnosti 1, 5, 5; 1, 4, 6; 2, 4, 5; 2, 3, 6; 3, 5, 3; 3, 4, 4. Uključujući sve moguće permutacije redom dobivamo da je mogućih zbrojeva $m_1 = 3 + 6 + 6 + 6 + 3 + 3 = 27$. Tada je

$$p(A) = \frac{m_1}{m} = \frac{27}{216}.$$

U drugom slučaju imamo mogućnosti 1, 5, 6; 2, 4, 6; 2, 5, 5; 3, 3, 6; 3, 4, 5; 4, 4, 4. Uključujući i sve permutacije dobivamo broj slučajeva $m_2 = 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$. Tada je

$$p(B) = \frac{m_2}{m} = \frac{25}{216},$$

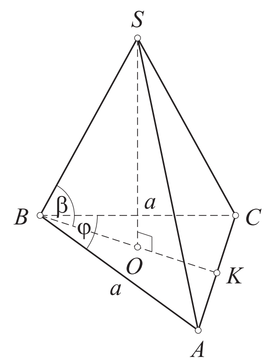
$$p(A) > p(B).$$

Veća je vjerojatnost da ćemo dobiti zbroj 11.

Lejla Jašarević (1), Sarajevo

3400. *Baza piramide je jednakokračan trokut s bočnom stranicom a i kutom u vrhu φ. Svi bočni bridovi zatvaraju s ravninom baze kut β. Koliki je volumen piramide?*

Rješenje. Imamo $|AB| = |BC| = a$, $\sphericalangle ABC = \varphi$, $\sphericalangle SBO = \beta$. Kako su svi bočni bridovi pod kutom β prema ravnini baze, točka O je središte kružnice opisane oko trokuta ABC.



$$V = \frac{1}{3} P_{ABC} \cdot |SO|,$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| \sin\varphi = \frac{a^2}{2}\sin\varphi.$$

Po teoremu o sinusima je $\dfrac{|AC|}{\sin\varphi} = 2|OB|$.

Iz $\triangle ABK$ je:

$$|AK| = |AB| \sin\frac{\varphi}{2} = a\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$|OB| = \frac{|AC|}{2\sin\varphi} = \frac{|AK|}{\sin\varphi} = \frac{a\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi} = \frac{a}{2\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Iz $\triangle SBO$ je:

$$|SO| = |OB|\operatorname{tg}\beta = \frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\cos\frac{\varphi}{2}},$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\sin\varphi\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{a^3}{6}\sin\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\beta.$$

Ur.

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 366. *Zemljina se atmosfera proteže do visine od nekoliko stotina kilometara, ali se 90 posto zraka nalazi u prvih 8 kilometara. Atmosferski tlak nastaje zbog težine zraka. Na razini mora iznosi 101 325 Pa. Kolika se masa zraka nalazi u stupcu zraka površine 10 cm² koji se proteže od površine mora do vrha atmosfere?*

Rješenje.

$h = 8$ km

$A = 10\ \mathrm{cm}^2$

$\underline{p = 101\,325\ \mathrm{Pa}}$

$m = ?,\quad \rho = ?$

$F = G = pA$

$G = 101\,325\ \mathrm{Pa}\cdot 0.001\ \mathrm{m}^2 = 101.325\ \mathrm{N}$

$$m = \frac{G}{g} = \frac{101.325\ \mathrm{N}}{10\ \mathrm{N/kg}} = 10.1325\ \mathrm{kg}$$

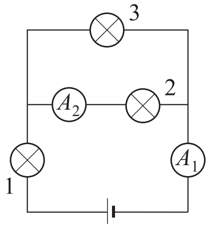
$m_{8\ \mathrm{km}} = 0.9\cdot 10.1325\ \mathrm{kg} = 9.11925\ \mathrm{kg}$

$V = Ah = 0.001\ \mathrm{m}^2\cdot 8000\ \mathrm{m} = 8\ \mathrm{m}^3$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{9.11925\ \mathrm{kg}}{8\ \mathrm{m}^3} = 1.14\ \mathrm{kg/m}^3$$

Ante Šego (7),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 367. *Na ampermetru A_1 se očitava struja od 800 mA, a na ampermetru A_2 od 300 mA. Koliki naboj prođe kroz treće trošilo za 10 minuta?*



Rješenje.

$I_1 = 800$ mA

$I_2 = 300$ mA

$\underline{t = 5\ \mathrm{min} = 300\ \mathrm{s}}$

$Q_3 = ?$

$I_3 = I_1 - I_2 = 800\ \mathrm{mA} - 300\ \mathrm{mA}$

$\quad = 500\ \mathrm{mA} = 0.5\ \mathrm{A}$

$Q_3 = I_3 t = 0.5\ \mathrm{A}\cdot 300\ \mathrm{s} = 150\ \mathrm{C}$

Klara Dorešić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 368. *Dva su komada olova istovremeno spuštena s različitih visina. Prvi, spušten s visine od 45 metara, udario je u tlo sekundu prije drugog. S koje je visine pao drugi komad? Koliko mu je nakon udara porasla temperatura ako pretpostavimo da je 70 posto njegove gravitacijske potencijalne energije prešlo u njegovu unutarnju energiju?*

Rješenje.

$s_1 = 45$ m

$t_2 - t_1 = 1$ s

$\underline{Q = 0.7E_{gp}}$

$s_2 = ?,\quad \Delta t = ?$

$$t_1^2 = \frac{2s}{g} = \frac{2\cdot 45\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{m/s}^2} = 9\ \mathrm{s}^2 \implies t_1 = 3\ \mathrm{s}$$

$t_2 = t_1 + 1\ \mathrm{s} = 4\ \mathrm{s}$

$$s_2 = \frac{gt^2}{2} = \frac{10\ \mathrm{m/s}^2\cdot 16\ \mathrm{s}^2}{2} = 80\ \mathrm{m} = h$$

$Q = 0.7E_{gp}$

$cm\Delta t = 0.7mgh$

$$\Delta t = \frac{0.7gh}{c} = \frac{0.7\cdot 10\ \mathrm{m/s}^2\cdot 80\ \mathrm{m}}{130\ \mathrm{J/kg\,^\circ C}} = 4.3\ ^\circ\mathrm{C}$$

Lucija Matić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 369. *Arhimedov zakon kaže da svako tijelo uronjeno u tekućinu prividno gubi na težini onoliko koliko teži tim tijelom istisnuta tekućina. Tijelo mase 800 grama je obješeno na dinamometar i uronjeno u vodu, tako da ne dodiruje dno. "Težina" mu je tada iznosila 5.5 N (njutna). Kolika je gustoća tog tijela? Gustoća vode je* $1000\ kg/m^3$.

Rješenje.

$m = 800\ \text{g} = 0.8\ \text{kg}$

$G' = 5.5\ \text{N}$

$\underline{\rho_v = 1000\ \text{kg/m}^3}$

$\rho_t = ?$

$G = mg = 8\ \text{N}$

$G_v = G - G' = 2.5\ \text{N}$

$$m_v = \frac{G}{g} = \frac{2.5\ \text{N}}{10\ \text{N/kg}} = 0.25\ \text{kg}$$

$$V = \frac{m_v}{\rho_v} = \frac{0.25\ \text{kg}}{1000\ \text{kg/m}^3} = 0.00025\ \text{m}^3 = V_t$$

$$\rho_t = \frac{m}{V_t} = \frac{0.8\ \text{kg}}{0.00025\ \text{m}^3} = 3200\ \text{kg/m}^3$$

Ante Šego (7), Zagreb

1546. *Kuglica se kotrlja niz kosinu nagiba* α. *Iz stanja mirovanja na vrhu kosine, kuglici je potrebno 5 puta dulje vrijeme da se spusti do dna kosine, nego što bi joj trebalo slobodnim padom s iste visine. Odredi kut kosine* α.

Rješenje. Slobodni pad s visine h traje $t^2 = 2h/g$. Na kosini je $T^2 = 5^2t^2 = 25\cdot 2l\sin\alpha/g$. Odatle je $a = g/(25\sin\alpha)$. Kako znamo da je ubrzanje na kosini $a = g\sin\alpha$ (bez kotrljanja), i $ma + Ia/r^2 = mg\sin\alpha$ (uz kotrljanje s momentom tromosti I), slijedi:

$$a = \frac{g}{25\sin\alpha} = \frac{g\sin\alpha}{1 + I/mr^2}.$$

Pokrata g i uvrštavanje momenta tromosti kugle $I = 2/5mr^2$ daje:

$$1 + \frac{2}{5} = 25\sin^2\alpha$$

Odatle je $\sin^2\alpha = 7/125 = 0.056$, što daje kut kosine $\alpha = 13°41'19''$.

Ur.

1547. *Na udaljenosti 100 kilometara iznad površine asteroida kuglastog oblika, prosječne gustoće* $2700\ kg/m^3$ *ubrzanje sile teže iznosi 42% ubrzanja na površini. Odredi radijus i masu asteroida, te ubrzanje sile teže na površini.*

Rješenje. Na površini asteroida ubrzanje sile teže iznosi

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

gdje je M masa a R radijus asteroida. Na visini $h = 100$ km iznad površine imamo:

$$g' = \frac{GM}{(R+h)^2} = 0.42\cdot\frac{GM}{R^2}.$$

Odatle je $R^2 = 0.42(R+h)^2$, što ili korjenujemo ili riješimo kao kvadratnu jednadžbu:

$$0.42R^2 + 2\cdot 0.42R\cdot 100 + 0.42\cdot 100^2 = R^2,$$

$$0.58R^2 - 84R - 4200 = 0.$$

Odatle je $R = 184.15$ km $= 184\,150$ m (drugo rješenje je negativno). Masu odredimo iz volumena i gustoće asteroida:

$$M = \rho V = 2700\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot\frac{4\cdot(184\,150\ \text{m})^3\pi}{3}$$
$$= 7.06\cdot 10^{19}\ \text{kg}.$$

Iz početnog izraza za g dobivamo:

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 7.06\cdot 10^{19}}{(184\,150)^2} = 0.14\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Gabrijela Perkov (2),
Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik

1548. *Da bi 200 g vode potpuno ishlapilo iz čaše, potrebno je 20 dana. Koliko molekula prosječno izleti s površine vode u 1 s?*

Rješenje. Odredimo prvo broj molekula u 200 grama vode. Molarna masa vode je

$$M(\text{H}_2\text{O}) = 2Ar(\text{H}) + Ar(\text{O}) = 2 + 16 = 18\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}.$$

Odatle je broj molekula

$$N = N_A n = N_A\cdot\frac{m}{M(\text{H}_2\text{O})}$$
$$= 6.022\cdot 10^{23}\,\frac{200}{18} = 6.69\cdot 10^{24}.$$

Kako 20 dana sadrži $20\cdot 24\cdot 60\cdot 60 = 1\,728\,000$ sekundi, svake sekunde izleti $1/1\,728\,000$ ukupnog broja molekula, što iznosi

$$\Delta N = 3.87\cdot 10^{18}\ \text{molekula/s}.$$

Gabrijela Perkov (2), Šibenik

1549. *Staklena boca ima obujam 2000 cm^3 pri $0\,^\circ C$. Pri $0\,^\circ C$ boca je do ruba napunjena alkoholom. Koliko će alkohola izaći iz boce kad ju ugrijemo na $50\,^\circ C$?*

Rješenje. Termičko širenje alkohola određuje se izrazom

$$V = V_0(1 + \gamma\Delta t),$$

gdje je $\gamma = 1.135 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$ koeficijent volumnog rastezanja alkohola. Uz $V_0 = 2$ l i $\Delta t = 50\,^\circ\mathrm{C} = 50$ K, dobivamo $V = 2.1135$ l. No zagrijavanjem se povećao i volumen staklene boce. Budući da je staklo čvrsta tvar, u tablicama nalazimo koeficijent *linearnog* rastezanja $\alpha = 0.9 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$. Kako vrijedi $\gamma = 3\alpha$, imamo:

$$V = V_0(1 + \gamma\Delta t) = 2.0027 \text{ l}.$$

Iz boce će izaći razlika volumena, to jest

$$\Delta V = 2.1135 - 2.0027 = 0.1108 \text{ l}.$$

Gabrijela Perkov (2), Šibenik

1550. *Sabirna leća napravljena je od stakla indeksa loma 1.502 za crvenu i 1.507 za plavu svjetlost. Odredi kromatsku aberaciju (udaljenost žarišta za crvenu i plavu svjetlost), ako je jakost leće $+1.5$ dpt za crvenu svjetlost.*

Rješenje. Ovisnost jačine leće o indeksu loma slijedi iz jednadžbe:

$$J = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

gdje su radijusi zakrivljenosti dioptara R_1 i R_2 neovisni o boji upadne svjetlosti, dok se indeks loma n mijenja. Omjer jakosti (i inverznih žarišnih daljina) tada iznosi:

$$\frac{J_{\text{crveno}}}{J_{\text{plavo}}} = \frac{f_{\text{plavo}}}{f_{\text{crveno}}} = \frac{(n_{\text{crveno}} - 1)}{(n_{\text{plavo}} - 1)}.$$

Iz $J_{\text{crveno}} = 1.5$ dpt, te $n_{\text{crveno}} = 1.502$ i $n_{\text{plavo}} = 1.507$ dobivamo $f_{\text{crveno}} = 66.666666$ cm, i $f_{\text{plavo}} = 66.009215$ cm. Razlika žarišnih daljina na 4 decimale je prema tome

$$\Delta f = 0.6574 \text{ cm}.$$

Ur.

1551. *Meteor prolazi po hiperboličnoj putanji pored Zemlje. U trenutku najvećeg približenja (u perihelu) udaljen je 250 000 km od središta Zemlje i giba se brzinom 8.5 km/s u odnosu na Zemlju. Odredi za koji je kut meteor skrenuo s prvobitne putanje (u sustavu mirovanja Zemlje). Masa Zemlje je $6\cdot 10^{24}$ kg.*

Rješenje. Otklon smjera kod hiperbolične putanje određen je kutom pod kojim se sijeku asimptote hiperbole. Taj kut δ ovisi o poluosima hiperbole kao $\operatorname{tg}\delta = b/a$. Glavna poluos a je udaljenost od tjemena (perihel putanje) do žarišta (središte Zemlje), dakle $a = 250\,000$ km. Da bismo odredili b treba nam numerički ekscentricitet ε kojeg izračunamo iz ukupne energije meteora E (kinetičke i gravitacijske u odnosu na Zemlju), momenta vrtnje meteora L i mase meteora m i Zemlje M kao:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3(GM)^2}}.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{a} = m \cdot 34\,523\,720 \text{ J}$$

$$L = mva = m \cdot 2.125 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m^2kg/s},$$

pokrativši masu meteora m dobijemo $\varepsilon = 44.12$. Odatle je $b = 11\,027\,205$ km, pa je kut otklona $\delta = 2.6^\circ$.

Ur.

1552. *Odredi temperaturu čistog dušika u kojemu razlika srednje brzine i srednje kvadratične brzine gibanja molekula iznosi 41 m/s.*

Rješenje. Srednja brzina molekula je

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

gdje je $M = 0.028$ kg/mol molarna masa dušika (dvoatomni plin), a $R = 8.314$ J/(mol K) opća plinska konstanta. Srednja kvadratična brzina je

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

pa je njihova razlika

$$\sqrt{\frac{3RT}{M}} - \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 41 \text{ m/s}.$$

Izlučivši $\sqrt{T}$ dobijemo $T = 304.8$ K, odnosno $T = 31.65\,^\circ$C.

Ur.