55. Državno natjecanje iz matematike Šibenik, 2. – 4. travnja 2014.

Ove godine matematička natjecanja su počela 27. siječnja 2014., kada su održana školska (odnosno gradska) natjecanja. Županijska natjecanja su održana 18. veljače. Na temelju rezultata županijskih natjecanja, određeni su učenici koji će sudjelovati na Državnom natjecanju.

Zadatke za sve razine natjecanja priređuje Državno povjerenstvo koje se sastoji od tri potpovjerenstva s po 20-ak članova: za osnovne škole, srednje škole A varijante i srednje škole B varijante. Njihov rad uspješno je koordinirala tajnica državnog povjerenstva, *Draženka Kovačević, prof.*, viša savjetnica za matematiku Agencije za odgoj i obrazovanje, koja je obavila velik dio posla oko organizacije školsko/ gradskog, županijskog i državnog natjecanja.

Državno natjecanje iz matematike za učenike osnovnih i srednjih škola ove je godine održano u Šibeniku. Od pozvanih 260 učenika okupilo se njih 258: njih 85 iz osnovnih škola (V. – 20, VI. – 23, VII. – 23, VIII. – 19), 94 iz srednjih škola A varijante (I. – 24, II. – 23, III. – 25, IV. – 22) i 79 iz srednjih škola B varijante (I. – 18, II. – 18, III. – 19, IV. – 24).

Najveći dio sudionika bio je smješten hotelu Jure, a tek manji dio državnog povjerenstva u hotelu Ivan turističkog naselja Solaris.

Prvog dana održan je sastanak Državnog povjerenstva i obavljene su posljednje pripreme za sutrašnje natjecanje. Navečer je u kongresnoj dvorani hotela Ivan održano svečano otvaranje. Prisutnima su se obratili: *Darko Junaković*, ravnatelj Osnovne škole Petra Krešimira IV., *Mirjana Žurić*, pročelnica Upravnog odjela za društvene djelatnosti grada Šibenika, *don Marinko Mlakić*, *Dijana Ercegović*, pročelnica Upravnog odjela za prosvjetu, znanost, kulturu i šport Županije Šibensko-kninske, *prof. dr. Vladimir Volenec*, predsjednik Državnog povjerenstva i *Vinko Filipović*, ravnatelj Agencije za odgoj i obrazovanje. Samo natjecanje otvorio je *Krunoslav Ivanović*, učenik 7. razreda škole domaćina.

Natjecanje je održano u Osnovnoj školi Petra Krešimira IV., a u isto vrijeme za mentore iz osnovnih i srednjih škola održavao se Seminar za mentore u hotelu Jure. Poslijepodne je za učenike i mentore organiziran izlet na slapove Krke. Povjerenstvo je prionulo na posao – pregledavanje i ocjenjivanje učeničkih rješenja, a navečer su se rješavale žalbe (kojih je ove godine bilo znatno manje, budući da smo prije njih održali prezentacije rješenja). Nakon toga Državno povjerenstvo je potvrdilo konačnu rang listu i odlučilo o nagradama. Po već ustaljenim pravilima određena su 22 učenika koji će tokom travnja sudjelovati na Hrvatskoj matematičkoj olimpijadi u borbi za mjesto u ekipama za 55. Međunarodnu matematičku olimpijadu u Republici Južna Afrika i 8. Srednjoeuropsku matematičku olimpijadu u Njemačkoj. Posljednjeg dana ujutro je održan Okrugli stol o matematičkim natjecanjima.

Na svečanom proglašenju predsjednik državnog povjerenstva, prof. dr. Vladimir Volenec, uručio je najboljim mladim matematičarima priznanja i skromne nagrade, dok su po tri najbolja u svakom razredu dobila plakete. Osnovnoškolcima je uručeno 8 prvih, 9 drugih i 11 trećih nagrada, dok je 21 učenik bio pohvaljen. Za srednje je škole podijeljeno 8 prvih, 6 drugih, 9 trećih nagrada i 13 pohvala za A varijantu, odnosno 8 prvih, 8 drugih, 11 trećih nagrada i 19 pohvala za B varijantu.

Nagrade i pohvale

A varijanta

I. razred

Adrian Beker, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Lukas Novak*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, *Mihael Grmovšek*, ŠS Krapina, Krapina (II. nagrada); *Ivan Živković*, Gimnazija Andrije Mohorovičića Rijeka, Rijeka (III. nagrada); *Robert Benić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ela Đimoli*, XV. gimnazija, Zagreb, *Bruno Iljazović*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

II. razred

Ivan Barta, XV. gimnazija, Zagreb, *Petar Orlić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Daniel Paleka*, Gimnazija Franje Petrića, Zadar, (I. nagrada); *Domagoj Bradač*, XV. gimnazija, Zagreb, *Martin Rosenzweig*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Kristijan Rupić*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Andrija Mandić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Dario Domjanić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Marko Jukić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Leon Starešinić*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

III. razred

Ivan Lazarić, Gimnazija Pula, Pula, *Josip Pupić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Kristijan Štefanec*, XV. gimnazija, Zagreb, (I. nagrada); *Al Depope*, Gimnazija Andrije Mohorovičića Rijeka, Rijeka (II. nagrada); *Josip Mohler*, Gimnazija, Požega, *Kristian Vedran Budrovčan*, XV. gimnazija, Zagreb, *Maja Puček*, Druga gimnazija Varaždin, Varaždin, *Nikola Šalgaj*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin (III. nagrada); *Lucija Fioretti*, Gimnazija Pula, Pula, *Marko Cvitković*, III. gimnazija, Split (pohvala).

IV. razred

Vlatka Vazdar, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Mislav Balunović*, Gimnazija "Matija Mesić", Slavonski Brod (II. nagrada); *Vlatko Crnković*, XV. gimnazija, Zagreb, *Erik Banek*, V. gimnazija, Zagreb, *Drago Plečko*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Krunoslav Haramina*, Gimnazija Ivana Zakmardija, Križevci, *Pero Skoko*, Gimnazija Metković, Metković, *Tomislav Buhiniček*, XV. gimnazija, Zagreb, *Fran Ante Lončar*, V. gimnazija, Zagreb (pohvala).

B varijanta

I. razred

Božidar Grgur Drmić, II. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Marko Brajković*, Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile, Pazin, *Patrik Matošević*, Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile, Pazin, *Antonijo Marijić*, Klasična gimnazija fra Marijana Lanosovića s pravom javnosti, Slavonski Brod (II. nagrada); *Matija Ilišinović*, Gimnazija Sisak, Sisak, *Marin Smoljan*, Srednja škola Biograd, Biograd, *Nikola Pražić*, Gimnazija Andrije Mohorovičića Rijeka, Rijeka (III. nagrada); *Matej Salković*, Srednja škola Ambroza Haračića, Cres, *Lugo Mihoviličić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Tin Župančić*, Srednja škola ban Josip Jelačić, Zaprešić, *Vinko Ivandić*, Klasična gimnazija fra Marijana Lanosovića s pravom javnosti, Slavonski Brod (pohvala).

II. razred

Damir Čupić, Srednja škola Mate Balote, Poreč, *Antonio Buljan*, V. gimnazija "Vladimir Nazor", Split (I. nagrada); *Doris Jakulj*, II. gimnazija, Zagreb, *Luka Šarić*, Graditeljsko geodetska tehnička škola, Split (II. nagrada); *Joško Bilandžić*, II. gimnazija, Zagreb, *Ivan Kuljak*, Srednja škola Zlatar, Zlatar, *Katarina Zornada*, Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile, Pazin (III. nagrada); *David Mrkoci*, Srednja škola Zlatar, Zlatar, *Ivan Franulović*, Srednja škola Vela Luka, Vela Luka, *Marino Voćanec*, Srednja škola Mate Blažine, Labin, *Karlo Videc*, Srednja škola Ivanec, Ivanec (pohvala).

III. razred

Martin Bajzek, Srednja škola Zlatar, Zlatar, *Matem Buljan*, II. gimnazija, Zagreb, *Marta Han*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska (I. nagrada); *Iva Brnić*, II. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Matija Livaić*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Lucija Zoretić*, Srednja škola Jastrebarsko, Jastrebarsko, *Matej Radović*, Gimnazija Jurja Barakovića, Zadar (III. nagrada); *Luka Kukurin*, Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile, Pazin, *Marijana Zrilić*, Gimnazija Jurja Barakovića, Zadar, *Jurica Jurić*, Gimnazija Sisak, Sisak, *Mirna Vučemilo*, Franjevačka klasična gimnazija u Sinju s pravom javnosti, Sinj (pohvala).

IV. razred

Domagoj Lasić, II. gimnazija, Zagreb, *Tomislav Vojvodić*, Talijanska srednja škola Dante Alighieri – Pula, Pula (I. nagrada); *Anja Šoštar*, Srednja škola Ivanec, Ivanec, *Ante Ravlić*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska (II. nagrada); *Nikola Vrbanić*, Elektrostrojarska škola, Varaždin, *Doria Šarić*, I. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Petar Heđi*, Gimnazija Daruvar, Daruvar, *Luka Tadić*, Srednja škola Donji Miholjac, Donjii Miholjac, *Davor Penzar*, Klasična gimnazija, Zagreb, *Sven Lazić*, Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška, *Ivan Jeličić*, Srednja škola Hvar, Hvar, *Ines Horvat*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, *Vasilije Perović*, Gimnazija Beli Manastir, Beli Manastir (pohvala).

Zadaci s državnog natjecanja – A varijanta

I. razred

1. Odredi najmanji prirodni broj a takav da je vrijednost izraza
$$\frac{n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + a}{n^2 - 1}$$
za $n = 2014$ cijeli broj djeljiv s 3.

2. Na igralištu se nalazi 2014 sportaša koji na dresovima imaju brojeve od 1 do 2014 (svaki broj je na točno jednom dresu). Na početku su svi u stojećem položaju. U određenim vremenskim intervalima trener uzvikuje redom sve prirodne brojeve od 1 do 2014. Sportaši kojima je na dresu višekratnik uzviknutoga broja odmah mijenjaju svoj položaj iz stojećeg položaja u čučanj ili obratno. Koliko je sportaša u čučnju nakon što trener uzvikne broj 2014?

3. Dužina $\overline{AB}$ je promjer kružnice sa središtem O. Na kružnici je dana točka C takva da je OC okomito na AB. Na kraćem luku $\overset{\frown}{BC}$ odabrana je točka P. Pravci

CP i AB sijeku se u točki Q, a točka R je sjecište pravca AP i okomice kroz Q na pravac AB. Dokaži da je $|BQ| = |QR|$.

4. Neka su x_1, x_2,..., x_{100} realni brojevi za koje vrijedi

$$\begin{aligned}|2x_k - x_{k+1}| &= x_{k+2} \quad \text{za sve} \quad k \in \{1, 2, \ldots, 98\},\\ |2x_{99} - x_{100}| &= x_1,\\ |2x_{100} - x_1| &= x_2.\end{aligned}$$

Dokaži da je $x_1 = x_2 = \ldots = x_{100}$.

5. Andrija i Boris imaju 2014 karata označenih brojevima od 1 do 2014. Andrija ima sve karte s parnim, a Boris sve karte s neparnim brojevima. Andrija je poredao svoje karte ukrug redom, od 2 do 2014, u smjeru kazaljke na satu tako da se ne vide brojevi na kartama. Boris zna da su karte poredane tim redom i u tom smjeru, ali ne zna gdje se nalazi karta s brojem 2. Nakon toga, Boris na svaku Andrijinu stavi po jednu od svojih karata i tako nastane 1007 parova karata. Za svaki se par usporedi brojeve na kartama i dodijeli jedan bod onom igraču na čijoj je karti veći broj.
Odredi najveći mogući N tako da Boris može biti siguran da će ostvariti barem N bodova.

II. razred

1. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju sustav

$$\begin{aligned}x + y^2 &= y^3,\\ y + x^2 &= x^3.\end{aligned}$$

2. Svaki od brojeva x_1, x_2,..., x_{2014} može biti -1, 0 ili 1. Koja je najmanja moguća vrijednost zbroja svih umnožaka $x_i x_j$ za $1 \leq i < j \leq 2014$?

3. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je broj $3^m + 3^n + 1$ kvadrat nekog prirodnog broja.

4. Neka su p i q dva paralelna pravca. Kružnica k dodiruje pravac p u točki A i siječe pravac q u različitim točkama B i C. Neka je T točka na pravcu p i neka dužine $\overline{TB}$ i $\overline{TC}$ sijeku kraći luk $\overset{\frown}{AC}$ redom u točkama K i L, različitima od B i C. Dokaži da pravac KL prolazi polovištem dužine $\overline{AT}$.

5. Sto kvadratnih omotnica različitih veličina raspoređeno je tako da se za svake dvije različite omotnice manja omotnica nalazi unutar veće ili su omotnice jedna izvan druge. Pritom se i u manjoj i u većoj omotnici mogu nalaziti i druge omotnice. Dva rasporeda smatramo različitima ako postoje dvije omotnice koje se u jednom rasporedu nalaze jedna unutar druge, a u drugom ne. Koliko ima različitih rasporeda u kojima se unutar najveće omotnice nalaze sve ostale?

III. razred

1. Neka je ABC jednakostranični trokut sa stranicama duljine 1. Točka X na polupravcu AB i točka Y na polupravcu AC odabrane su tako da su $|AX|$ i $|AY|$ prirodni brojevi. Može li polumjer kružnice opisane trokutu AXY biti $\sqrt{2014}$?

2. Unutar šiljastokutnog trokuta ABC nalazi se točka P takva da je

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB, \qquad \sphericalangle BPC = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC.$$

Dokaži da vrijedi

$$\frac{|AC| \cdot |BP|}{|BC|} = \frac{|BC| \cdot |AP|}{|AB|}.$$

3. Postoje li prirodni brojevi m i n za koje su $m^2 + n$ i $n^2 + m$ kvadrati prirodnih brojeva?

4. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4}.$$

5. Na kružnici duljine $6N$ označeno je $3N$ točaka koje dijele tu kružnicu na ukupno $3N$ lukova: N lukova duljine 1, N lukova duljine 2 i N lukova duljine 3. Dokaži da među označenim točkama postoje dvije koje su krajnje točke nekog promjera te kružnice.

IV. razred

1. Za prirodni broj n označimo sa $s(n)$ zbroj njegovih pozitivnih djelitelja, a sa $d(n)$ broj njegovih pozitivnih djelitelja. Odredi sve prirodne brojeve n takve da vrijedi

$$s(n) = n + d(n) + 1.$$

2. Odredi sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy.$$

3. Dano je 2014 žetona koji su s jedne strane crne, a s druge bijele boje i ploča dimenzija 2014×1. Na početku se na svakom polju ploče nalazi po jedan žeton, okrenut na crnu ili na bijelu stranu. U svakom potezu dozvoljeno je ukloniti jedan žeton okrenut na crnu stranu i istovremeno preokrenuti žetone na susjednim poljima (ako nisu već uklonjeni). Odredi sve početne rasporede žetona za koje je nizom takvih poteza moguće ukloniti sve žetone.

4. Neka su a, b i c duljine stranica trokuta opsega 1. Dokaži da vrijedi

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut takav da vrijedi

$$\sphericalangle BAD = 90^\circ, \qquad \sphericalangle BAC = 2\sphericalangle BDC \quad \text{i} \quad \sphericalangle DBA + \sphericalangle DCB = 180^\circ.$$

Odredi mjeru kuta $\sphericalangle DBA$.

Zadaci s državnog natjecanja – B varijanta

I. razred

1. Odredite ostatak pri dijeljenju broja $\left(7^{2012}\right)^{2014} - \left(3^{12}\right)^{14}$ s 10.

2. Odredite sve cijele brojeve a za koje jednadžba

$$3 \cdot |x-2| + a \cdot |3-x| = a + 4 - x$$

ima cjelobrojna rješenja.

3. Bazen se puni dvjema pumpama. Ako su obje pumpe otvorene 20 minuta do punog bazena bi nedostajalo još 1000 litara, a ako su obje otvorene 70 minuta, 250 litara bi se prelilo izvan punog bazena. Prva pumpa može napuniti u 2 minute onoliki dio koliko druga može napuniti u 3 minute. Koliko vremena treba svakoj od njih da sama napuni cijeli bazen?

4. U krugu polumjera r povučene su s iste strane središta dvije paralelne tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. $\overline{AB}$ je stranica jednakostraničnog trokuta upisanog tom krugu, a $\overline{CD}$ je stranica pravilnog šesterokuta upisanog istom krugu. Odredite opseg i površinu trapeza $ABCD$.

5. Marko i njegov "bend" su krenuli na turneju. Prvog su dana išli prema istoku, drugog su dana nastavili prema sjeveru, trećeg su dana nastavili prema zapadu, četvrtog dana prema jugu, petog prema istoku i tako dalje. Ako su n-tog dana turneje prešli $\frac{n^2}{2}$ kilometara, koliko su km bili udaljeni od polaznog mjesta na kraju četrdesetog dana?

II. razred

1. Koliko ima kompleksnih brojeva $z = a + bi$ za koje vrijedi:
$$a, b \in \mathbf{Z}, \quad a \cdot b \geq 0 \quad \text{i} \quad \frac{|z| - 16}{1 - |z|} \geq 2?$$

2. Točke H i N redom su nožišta visina iz vrha A i vrha B šiljastokutnog trokuta ABC. Duljina visine iz vrha A iznosi $5\sqrt{3}$ cm, duljina stranice $\overline{AB}$ 14 cm, a mjera kuta kojeg zatvaraju visine $\overline{AH}$ i $\overline{BN}$ iznosi $60°$. Odredite duljine preostalih stranica trokuta te duljinu dužine $\overline{HN}$.

3. Riješite jednadžbu
$$x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8.$$

4. Zadan je kvadrat $ABCD$ duljine stranice 10 cm. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka E, na stranici $\overline{BC}$ točka F, na stranici $\overline{CD}$ točka G i na stranici $\overline{DA}$ točka H tako da je $EFGH$ također kvadrat. Izračunajte duljinu dužine $\overline{AE}$ tako da zbroj površine kruga upisanog kvadratu $EFGH$ i površina krugova upisanih trokutima EBF, FCG, GDH i HAE bude najmanji mogući.

5. Profesor Ante na ploči je ispisao redom prvih n prirodnih brojeva, počevši od 1 i rekao Mati: "Ispod svakog zapisanog broja napiši umnožak tog broja i svih brojeva zapisanih ispred njega." "A ti Kate zbroji sve brojeve koje je zapisao Mate i zapiši rezultat." Ako je Kate zapisala broj m^2, odredite sve parove prirodnih brojeva m i n za koje to vrijedi.

III. razred

1. Riješite jednadžbu $\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1$.

2. Odredite sve realne brojeve x za koje vrijedi
$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \ldots + \frac{1}{\log_x 2^{2013} \cdot \log_x 2^{2014}} \leq 2013 \log_2 x.$$

3. Duljina veće osnovice trapeza iznosi 18 cm, a duljine krakova trapeza su $b = 12$ cm i $d = 8$ cm. Omjer kutova uz veću osnovicu je $2:1$. Odredite duljinu manje osnovice trapeza.

4. U ravnini je nacrtano 100 koncentričnih kružnica kojima su polumjeri 1 cm, 2 cm, 3 cm,...,100 cm. Krug polumjera 1 cm obojan je crveno, a sva ostala područja omeđena uzastopnim kružnicama obojana su ili crveno ili zeleno, ali tako da su susjedna područja obojana različitim bojama. Odredite omjer površine svih zelenih područja i površine svih crvenih područja.

5. Grupa djece se natjecala tko će pojesti više jagoda. Pobjednik je pojeo n jagoda, a svaki sljedeći po dvije jagode manje i tako sve do posljednjeg djeteta na k-tom mjestu, koje je pojelo $n+2-2k$ jagoda. Ukupan broj pojedenih jagoda na natjecanju iznosi 2014. Koliko je najmanje jagoda pojeo pobjednik?

IV. razred

1. Odredite prirodni broj N za koji vrijedi
$$\frac{1}{2!11!}+\frac{1}{3!10!}+\frac{1}{4!9!}+\frac{1}{5!8!}+\frac{1}{6!7!}=\frac{N}{1!12!}.$$

2. Opći član niza a_n dan je formulom $a_n=\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$. Odredite zbroj prvih 9999 članova tog niza.

3. U kvadratnu plutenu ploču kojoj je duljina stranice 1 metar zabodena je 201 pribadača. Dokažite da barem tri pribadače leže unutar kruga polumjera $\dfrac{1}{14}$ metra.

4. Odredite sve prirodne brojeve a za koje je broj a^3+1 potencija broja 3.

5. Uz ravnu su cestu duž jednog pravca zasađena 4 stabla. Prvo je od drugog udaljeno 6 m, drugo od trećeg 4 m i treće od četvrtog 8 m. Na kojoj se udaljenosti od svakog od stabala nalazi promatrač koji sve tri udaljenosti među stablima vidi pod istim kutom?

⋆ ⋆ ⋆

Učenici pozvani na Hrvatsku matematičku olimpijadu, tj. kandidati za međunarodna natjecanja su:

I. razred: *Adrian Beker, Lukas Novak, Mihael Grmovšek*

II. razred: *Ivan Barta, Petar Orlić, Danijel Paleka, Domagoj Bradač, Martin Rosenzweig, Kristijan Rupić*

III. razred: *Ivan Lazarić, Josip Rupić, Kristijan Štefanec, Al Depope, Josip Mohler, Kristian Vedran Budrovčan, Maja Puček, Nikola Šalgaj*

IV. razred: *Vlatka Vazdar, Mislav Balunović, Vlatko Crnković, Erik Banek, Drago Plečko*

Željko Hanjš