# Injekcija – predavanje s prve godine studija

*Hrvoje Šikić*

*Napomena uredništva. Namjera nam je s nekoliko članaka prikazati neka predavanja sa studija matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno–matematičkog fakulteta u Zagrebu. Željeli bismo na taj način zainteresiranim učenicima barem malo približiti nastavu na studiju matematike. Ovaj prvi članak napisao je profesor Hrvoje Šikić koji već petnaestak godina na prvoj godini preddiplomskog studija Matematika predaje kolegije Matematička analiza 1 i 2. U ovom članku prikazano je jedno njegovo predavanje na kolegiju Matematička analiza 1.*

Na samom početku važno je naglasiti da do ovog predavanja studenti znaju pojam funkcije $f : D \to K$, pri čemu su $D$ i $K$ (domena i kodomena) neprazni skupovi. U cijelom ovom članku slijedit ćemo tu pretpostavku. Slučajevi u kojima je bar jedan od ovih skupova prazan diskutirani su na ranijim predavanjima. Isto tako, u slučaju realnih funkcija realne varijable studenti već znaju na grafu u Kartezijevom sustavu prepoznati radi li se o funkciji ili ne.

Kriterij prepoznavanja nekog grafa u ravnini kao funkcijskog je da presjek grafa s bilo kojim pravcem paralelnim s $y$-osi bude najviše jednočlan skup. Razmislimo (igre radi) što se dogodi ako istu vrstu kriterija primijenimo na pravce paralelne s $x$-osi (dakle, pravce oblika $y = a$, pri čemu je $a$ realan broj).

Budući da je ovo opis predavanja, u ovom članku nisu navedene razne ilustracije koje se koriste u predavanju. Želimo naglasiti da se na ovom mjestu, kao i kroz cijelo predavanje, daje dosta ilustracija pomoću raznih grafova. Ovdje se obično nacrta nekoliko grafova, od kojih neki imaju/ nemaju prije navedeno svojstvo, a neki jesu/ nisu funkcijski. Primjerice u koordinatnom sustavu u ravnini nacrta se sljedeće: vertikalni pravac, kosi pravac, horizontalni pravac, kružnica, parabola, te graf kubne funkcije, pa se na svakoj od njih kratko ispita spomenuto pravilo.

Nas će ovdje posebno zanimati primjena ovog pravila na funkcije, dakle na one grafove koji su funkcijski. Recimo da je $f : D \to \mathbb{R}$, pri čemu je $D \subseteq \mathbb{R}$ neprazan podskup, te da graf od $f$ zadovoljava navedeno pravilo. Kako bismo to pravilo preveli "običnim jezikom"?

Ako malo razmislimo, pravilo kaže da za svaki realan broj $a$ postoji najviše jedan $x \in D$ takav da je $a = f(x)$. Nema ništa u ovom pravilu, izrečenom u prethodnoj rečenici, što je posebno vezano za skup realnih brojeva. Prema tome, nema razloga ne postaviti to pravilo za bilo koje funkcije. Učinimo tako.

**Definicija 1.** *Funkcija $f : D \to K$ je* ***injekcija*** *ako je za svaki $y \in K$ skup $\{x \in D : f(x) = y\}$ ili prazan ili jednočlan.*

Drugi, ali ekvivalentan, smisao ovog pojma je da dvije različite točke iz domene ne mogu imati istu sliku. Pokušajmo ovaj smisao predstaviti i formalno. Imamo zapravo dvije rečenice (ili njihove negacije), $x_1 = x_2$ (pri čemu su ovo točke iz domene) i $f(x_1) = f(x_2)$, te jednu implikaciju koja može imati dvije različite premise. Radi se o osam različitih mogućnosti. Idemo za vježbu izlistati svih osam matematičkih rečenica, te odrediti klase funkcija koje su opisane svakom od ovih rečenica.

**Napomena 2.** *Ova vježba ima bar dvije namjene. Jedna je vježbanje u logičkom zaključivanju. Druga je vezana uz autorovo predavačko iskustvo. Čini se da jedan veliki dio studenata ne uspijeva savladati dobro osnove ovakvog zaključivanja do prvog usmenog ispita, pa onda uče napamet i "vizualno" pamte matematičku rečenicu. Tako je svaka od sljedećih osam rečenica bila ponuđena više puta u zadnjih tridesetak godina kao odgovor na ispitno pitanje o definiciji injektivnosti. Na ovaj način im se želi ukazati koliko naoko mala "vizualna" promjena može zapravo vrlo bitno promijeniti smisao rečenice.*

$$
\begin{array}{ll}
(1)\ x_1 = x_2 \implies f(x_1) = f(x_2) & (5)\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \\
(2)\ x_1 = x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) & (6)\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 \neq x_2 \\
(3)\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) = f(x_2) & (7)\ f(x_1) \neq f(x_2) \implies x_1 = x_2 \\
(4)\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) & (8)\ f(x_1) \neq f(x_2) \implies x_1 \neq x_2
\end{array}
$$

Razmislimo li malo o (1), vidimo da sve funkcije zadovoljavaju ovo svojstvo (to je zapravo definicijsko svojstvo funkcije kao takve, recimo ako promatramo funkciju kao posebni slučaj binarne relacije). Opet lako vidimo da svojstvo (2) ne ispunjava niti jedna funkcija. Svojstvo (3) nas može malo "zabrinuti", ali ipak lako vidimo da to svojstvo zadovoljavaju konstantne funkcije. Svojstvo (4) je injektivnost. To je dosta očito, ali za domaću zadaću razmislite kako biste formalno proveli dokaz o ekvivalenciji injektivnosti (kako smo je ranije definirali) i svojstva (4). Krenemo li u drugi stupac, vidimo da je i svojstvo (5) zapravo injektivnost. Svojstvo (6) ne zadovoljava niti jedna funkcija, dok svojstvo (8) zadovoljavaju sve funkcije. Što je sa svojstvom (7)?

Uočimo da se rezultati naše analize javljaju u parovima: (1)–(8), (2)–(6), (4)–(5). Je li to slučajno? Zapravo nije! Ako s $non - A$ označimo negaciju tvrdnje $A$, a s $non - B$ negaciju tvrdnje $B$, tada su svi parovi u sljedećem odnosu:

$$(A \implies B) \text{ prema } (non - B \implies non - A).$$

Kakva je veza ovih parova? Pretpostavimo da je tvrdnja $(A \implies B)$ istinita. Mora li tada biti istinita i tvrdnja $(non - B \implies non - A)$? Pretpostavimo suprotno, tj. da ova druga implikacija nije istinita, a prva jest. To znači da su redom istinite tvrdnje $(A \implies B)$, $(non - B)$ i $(non - non - A = A)$. Istinitost prve i treće tvrdnje povlače istinitost tvrdnje $(B)$, a to je u kontradikciji s pretpostavkom istinitosti tvrdnje $(non - B)$. Prema tome, dokazali smo da vrijedi

$$(A \implies B) \implies (non - B \implies non - A).$$

Primijenimo li sada tu tvrdnju tako da krenemo od "druge implikacije", dobivamo

$$(non - B \implies non - A) \implies (non - non - A \implies non - non - B).$$

Znamo da negacija negacije daje polaznu tvrdnju, pa smo zapravo dokazali

$$(A \implies B) \iff (non - B \implies non - A).$$

To je upravo odnos u kojem se nalaze parovi svojstava koje smo ranije naveli, pa je jasno da ti parovi moraju određivati iste klase funkcija. To su ekvivalentne tvrdnje. Sjetimo li se da su brojni teoremi zapravo tvrdnje tipa implikacije, onda smo pokazali da matematičari vole "ekonomizirati" svoje zapise, te je uz svaki teorem koji je implikacija oblika $(A \implies B)$ vezan "još jedan" (zapravo isti) teorem $(non - B \implies non - A)$. U ovakvom zapisu ova činjenica izgleda jasno, jednostavno i "ne pretjerano uzbudljivo". Ali u stvarnim slučajevima ponekad postoji razlika "koliko jasno prepoznajemo" ovakve tvrdnje. Na primjer, mi sada znamo da svojstva (3) i (7) tvore takav par, pa prema tome daju istu klasu funkcija. Posebno, svojstvo (7) zadovoljavaju sve konstantne funkcije. Kako to? Odgovor je pomalo suptilan u ovom slučaju. Sjetimo se da ako premisa nije istinita, onda je cijela implikacija istinita. U slučaju (7) konstante su točno one funkcije za koje premisa u (7) nije ispunjena (niti za jedan par točaka iz slike funkcije), pa za njih implikacija (7) vrijedi.

Uočimo da se injektivnost može promatrati i jezikom jednadžbi, što je osobito pogodno za realne funkcije realne varijable (u skupu realnih brojeva znamo rješavati razne jednadžbe). Neka je funkcija zadana formulom $f(x)$. Direktno iz definicije injektivnosti čitamo da je $f$ injekcija ako i samo ako za svaki $y$ iz kodomene jednadžba $y = f(x)$ ima najviše jedno rješenje (kao jednadžba koja se rješava po $x$).

Na primjer, funkcija $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ je injekcija, jer za svaki realni broj $y$ jednadžba $y = f(x)$ ima (točno) jedno rješenje

$$x = \frac{y - b}{a}.$$

Funkcija $f(x) = x^2$ nije injekcija jer za svaki $y > 0$ jednadžba $y = x^2$ ima dva rješenja (bez obzira što u slučaju $y = 0$ ova jednadžba ima jedno rješenje, a u slučaju $y < 0$ nema niti jedno rješenje).

Ovdje je kraj jednosatnog predavanja. U sljedećim predavanima se počinje jezikom jednadžbi, pa se pita koje je to svojstvo kada imamo bar jedno rješenje za svaku jednadžbu $y = f(x)$ (surjektivnost), a onda se prirodno prelazi na točno jedno rješenje (bijektivnost).

Za kraj je korisno spomenuti da je pristup ovih lekcija takav da se studente vodi kroz priču u kojoj oni (donekle) sami otkrivaju novi sadržaj. U zadnjih tridesetak godina se promijenio sastav naših studenata, recimo od uske grupe motiviranih ljudi čiji primarni interes je matematika, do šire grupe studenata različitih interesa (na primjer, primarni interes mogu biti financije, a matematika se vidi više kao sredstvo za bavljenje financijama). Posljedica ove promjene je da nastavnici moraju paziti i na motivaciju studenata. Studenti moraju osjetiti da im je korisno, važno (a možda i lijepo) naučiti matematiku.