Udaljenosti karakterističnih točaka trokuta

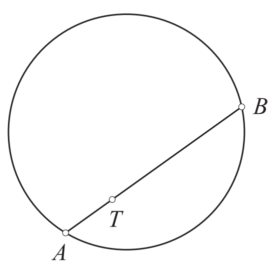
Kristijan Kilassa Kvaternik[1]

U trokutu postoje četiri karakteristične točke: težište G, ortocentar H, središte upisane kružnice I i središte opisane kružnice O. U ovom ćemo članku odrediti udaljenosti prve tri navedene točke od četvrte, i to koristeći potencije tih točaka u odnosu na opisanu kružnicu trokuta. Pritom ćemo kao posljedicu dobiti neke poznate nejednakosti među veličinama u trokutu.

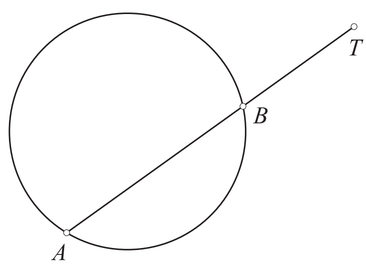
Za početak ćemo definirati pojam koji će nam biti ključan u računu – potenciju točke u odnosu na kružnicu.

Definicija 1. Neka je dana kružnica $k(S,r)$ i točka T unutar nje. Povucimo točkom T tetivu $\overline{AB}$ kružnice k. *Potencija točke T u odnosu na kružnicu k* je umnožak

$$|AT| \cdot |TB|.$$



Slika 1.



Slika 2.

Analogno definiramo potenciju točke u slučaju kada je T izvan kružnice k: točkom T povučemo pravac koji siječe k u točkama A i B. Potencija od T u odnosu na k je umnožak

$$|AT| \cdot |TB|.$$

Ako se T nalazi na k, onda kažemo da je njena potencija u odnosu na k nula. Potenciju točke T u odnosu na kružnicu k označavat ćemo s $p(T,k)$.

Napomena 1. Lako se pokaže da je gornja definicija dobra, tj. da potencija točke T u odnosu na kružnicu k ne ovisi o izboru tetive, odnosno pravca kroz T (ta činjenica slijedi iz sličnosti trokuta).

Iz napomene 1 slijedi

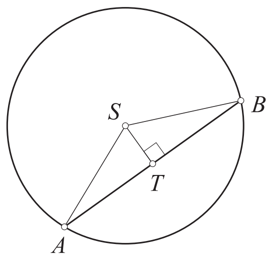
[1] Autor je student 3. godine matematike na Matematičkom odsjeku PMF-a Sveučilišta u Zagrebu,
e-pošta: kkkvate@student.math.hr

Propozicija 1. *Za potenciju točke T u odnosu na kružnicu $k(S,r)$ vrijedi*

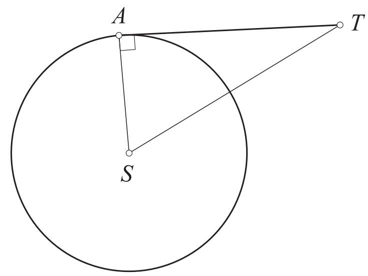
$$p(T,k) = \left||ST|^2 - r^2\right|.$$

Dokaz. Ako se T nalazi na k, tvrdnja očito vrijedi. Ukoliko je T unutar k, povucimo tetivu $\overline{AB}$ kojoj je T polovište (to je tetiva okomita na pravac ST). Sada je prema napomeni 1

$$p(T,k) = |AT| \cdot |TB| = |AT|^2 = |SA|^2 - |ST|^2 = r^2 - |ST|^2.$$



Slika 3.



Slika 4.

Ako se T nalazi izvan k, onda povučemo tangentu iz T na k. Ako je A diralište te tangente, prema napomeni 1 opet dobivamo

$$p(T,k) = |AT|^2 = |ST|^2 - |SA|^2 = |ST|^2 - r^2. \qquad \square$$

Propozicija 1 nam daje efikasan način računanja udaljenosti točke od središta opisane kružnice trokuta: naime, dovoljno je odrediti potenciju točke s obzirom na opisanu kružnicu.

Sada možemo odrediti udaljenosti središta opisane kružnice od preostalih karakterističnih točaka trokuta. Pritom ćemo duljine stranica trokuta označavati s a, b, c, mjere unutarnjih kutova s α, β, γ, polumjere opisane, odnosno upisane kružnice s R i r redom, a opisanu kružnicu trokuta ABC s (ABC).

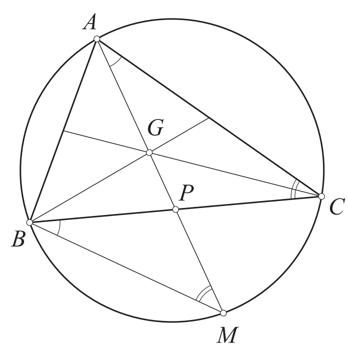
Teorem 1. *Udaljenost težišta G od središta O opisane kružnice trokuta ABC dana je s*

$$|GO| = \sqrt{R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}}.$$

Dokaz. Neka je $\overline{AP}$ težišnica u trokutu ABC i neka pravac AP siječe opisanu kružnicu (ABC) u točki M. Zbog jednakosti obodnih kutova nad istom tetivom u kružnici vrijedi $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MAC$ i $\sphericalangle BMA = \sphericalangle BCA$ pa su trokuti BPM i APC slični. Zato imamo

$$\frac{|BP|}{|PM|} = \frac{|AP|}{|PC|}.$$

Budući da je $\overline{AP}$ težišnica, vrijedi $|BP| = |PC| = \frac{1}{2}a$.



Slika 5.

Uvrštavanjem dobivamo

$$\frac{\frac{1}{2}a}{|PM|} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{\frac{1}{2}a}, \qquad |PM| = \frac{a^2}{2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}.$$

Budući da je $|AP| = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ (jednakost dobivamo iz Eulerove relacije paralelograma) i da težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$ (računajući od vrha), vrijedi

$$|AG| = \frac{2}{3}|AP| = \frac{1}{3}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},$$

$$|GP| = \frac{1}{3}|AP| = \frac{1}{6}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

Zato za potenciju težišta vrijedi

$$\begin{aligned} p(G,(ABC)) &= |AG|\cdot|GM| \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\cdot\left(\frac{1}{6}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} + \frac{a^2}{2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}\right) \\ &= \frac{2b^2+2c^2-a^2}{18} + \frac{a^2}{6} = \frac{a^2+b^2+c^2}{9}. \end{aligned}$$

Budući da se težište trokuta nalazi unutar njega, prema propoziciji 1 slijedi

$$R^2 - |GO|^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{9} \implies |GO| = \sqrt{R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}}.$$

□

Korolar 1. U trokutu sa stranicama duljina a, b, c i polumjerom opisane kružnice R vrijedi nejednakost

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant 9R^2.$$

Korolar 2. *Ako su α, β, γ kutovi trokuta, onda vrijede nejednakosti*

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Dokaz. Prema korolaru 1 i teoremu o sinusima vrijedi nejednakost

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leqslant \frac{9}{4}.$$

Budući da su sinusi kutova u trokutu nenegativni realni brojevi, primjenom nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine dobivamo

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant 3\cdot\sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}{3}} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

a primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine,

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqslant \left(\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3}\right)^3 \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

□

Propozicija 2. *Za trokut površine P kojemu je radijus opisane kružnice R, vrijedi*

$$P \leqslant \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Drugim riječima, površina trokuta nije veća od površine jednakostraničnog trokuta stranice $\sqrt{3}R$, gdje je R radijus opisane mu kružnice.

Dokaz. Površina trokuta je jednaka polovini umnoška duljine dviju njegovih stranica i sinusa kuta među njima. Primjenom teorema o sinusima dobijemo

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Sada primjenom druge nejednakosti korolara 2 dobivamo zadanu nejednakost. □

Za računanje udaljenosti središta upisane kružnice trokuta od središta opisane, koristit ćemo neke pomoćne tvrdnje.

Lema 1. *Simetrala stranice trokuta i simetrala toj stranici nasuprotnog kuta sijeku se na opisanoj kružnici trokuta.*

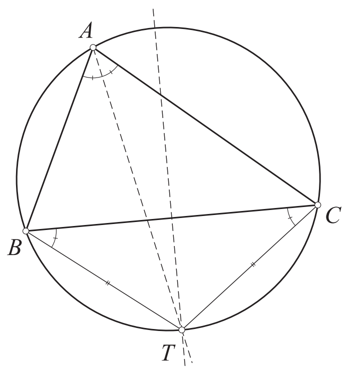
Dokaz. Neka simetrala stranice $\overline{BC}$ siječe opisanu kružnicu (ABC) u točki T. Zbog svojstva simetrale dužine vrijedi

$$|BT| = |TC| \implies \sphericalangle BCT = \sphericalangle CBT.$$

Sada zbog jednakosti obodnih kutova nad istom tetivom imamo

$$\sphericalangle BAT = \sphericalangle BCT = \sphericalangle CBT = \sphericalangle CAT,$$

pa je AT simetrala kuta $\sphericalangle BAC$. □



Slika 6.

Lema 2. *Zadan je trokut ABC sa središtem I upisane kružnice. Središte kružnice (IBC) je polovište T onog luka $\widehat{BC}$ kružnice (ABC) koji ne sadrži točku A.*

Dokaz. Uočimo da je točka T, prema lemi 1, sjecište simetrale dužine $\overline{BC}$ i simetrale kuta $\sphericalangle BAC$. Zato je dovoljno dokazati $|TI| = |TB|$. Označimo unutarnje kutove trokuta ABC s α, β, γ. Vrijedi

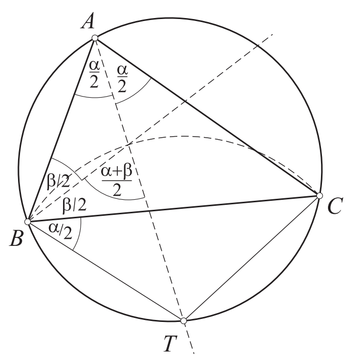
$$\sphericalangle TBI = \sphericalangle CBI + \sphericalangle TBC = \sphericalangle CBI + \sphericalangle TAC = \frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\sphericalangle TIB = \sphericalangle IBA + \sphericalangle IAB = \frac{\alpha+\beta}{2},$$

pa imamo

$$\sphericalangle TBI = \sphericalangle TIB \implies |TI| = |TB|.$$

□



Slika 7.

Teorem 2. *Udaljenost središta I upisane kružnice od središta O opisane kružnice trokuta ABC dana je s*

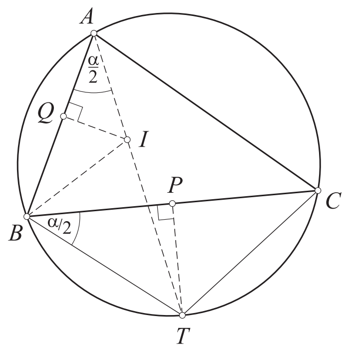
$$|IO| = \sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Dokaz. Neka pravac AI siječe kružnicu (ABC) u točki T. Prema lemi 2 je T središte kružnice (IBC) i vrijedi $|TB| = |TI| = |TC|$. Neka je P nožište okomice iz T na $\overline{BC}$ i Q nožište okomice iz I na $\overline{AB}$. Uočimo da je P polovište dužine $\overline{BC}$ i $|IQ| = r$. Sada iz pravokutnih trokuta AQI i BPT dobivamo

$$|AI| \sin\frac{\alpha}{2} = |IQ| \implies |AI| = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$|BP| = |TB| \cos\frac{\alpha}{2} \implies$$

$$|TI| = |TB| = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{R\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2R\sin\frac{\alpha}{2}.$$



Slika 8.

Za potenciju točke I imamo

$$p(I, (ABC)) = |AI| \cdot |IT| = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2Rr,$$

a kako se točka I uvijek nalazi unutar trokuta ABC,

$$R^2 - |IO|^2 = 2Rr \implies |IO| = \sqrt{R^2 - 2Rr}. \qquad \square$$

Korolar 3. *U trokutu s polumjerima R i r opisane, odnosno upisane kružnice vrijedi nejednakost*

$$R \geqslant 2r.$$

Udaljenost ortocentra od središta opisane kružnice odredit ćemo u slučaju šiljastokutnog trokuta (u tom se slučaju ortocentar nalazi unutar trokuta, odnosno opisane kružnice). Najprije ćemo dokazati jedno svojstvo ortocentra u trokutu.

Lema 3. *Osnosimetrične slike ortocentra s obzirom na stranice šiljastokutnog trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.*

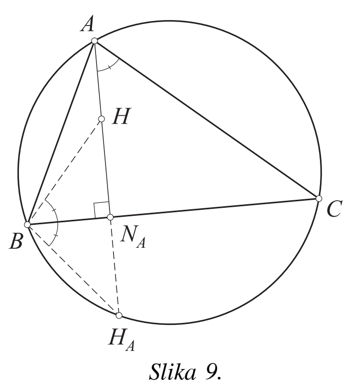
Dokaz. Neka je N_A nožište okomice iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ i neka produžetak visine $\overline{AN_A}$ siječe kružnicu (ABC) u točki H_A. Imamo

$$\sphericalangle H_ABN_A = \sphericalangle N_AAC = 90^\circ - \gamma$$

jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{H_AC}$. Nadalje,

$$BH \perp AC \implies \sphericalangle N_ABH = 90^\circ - \sphericalangle BCA = 90^\circ - \gamma.$$

Slijedi, $\sphericalangle H_ABN_A = \sphericalangle N_ABH$ pa su trokuti BN_AH_A i BN_AH sukladni (KSK teorem), odakle imamo $|HN_A| = |N_AH_A|$. $\square$



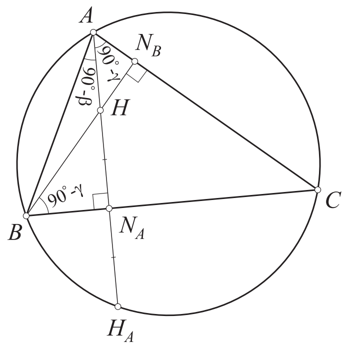
Slika 9.

Teorem 3. *Udaljenost ortocentra H od središta opisane kružnice O šiljastokutnog trokuta ABC dana je s*

$$|HO| = R\sqrt{1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Dokaz. Neka su N_A, N_B nožišta okomica iz vrhova A, B na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ redom i neka pravac AN_A siječe kružnicu po drugi put u točki H_A. Iz pravokutnih trokuta BN_AH, AN_BH, AN_AB dobivamo

$$|HN_A| = |BN_A|\operatorname{ctg}\gamma = |AB|\cos\beta\operatorname{ctg}\gamma,$$
$$|AH| = \frac{|AN_B|}{\sin\gamma} = \frac{|AB|\cos\alpha}{\sin\gamma}.$$



Slika 10.

Sada koristeći lemu 3 i teorem o sinusima, računamo potenciju točke H

$$\begin{aligned}
p(H,(ABC)) &= |AH|\cdot|HH_A| = |AH|\cdot 2|HN_A| \\
&= 2|AB|^2\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma} \\
&= 2\left(\frac{|AB|}{\sin\gamma}\right)^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\
&= 8R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.
\end{aligned}$$

Budući da je trokut šiljastokutan, ortocentar se nalazi unutar trokuta pa imamo

$$\begin{aligned}
&R^2 - |HO|^2 = 8R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\
\Longrightarrow\ &|HO| = R\sqrt{1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.
\end{aligned}$$ □

Napomena 2. Iako smo lemu 3 i teorem 3 dokazali za slučaj šiljastokutnog trokuta, analogni se dokazi provode i u slučaju tupokutnog trokuta (s time da u dokazu teorema 3 koristimo formulu redukcije za kosinus $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$). Zato jednakost dana u teoremu 3 vrijedi i za tupokutan trokut. Uočimo također kako je ta jednakost trivijalno ispunjena za pravokutan trokut. Zato ćemo sljedeći korolar iskazati za bilo koji trokut.

Korolar 4. *Ako su α, β, γ kutovi trokuta, vrijedi nejednakost*

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}.$$

Literatura

[1] M. Bombardelli, D. Ilišević, *Elementarna geometrija*, skripta, verzija 1.0, PMF – Matematički odsjek, Zagreb, 2007.

[2] B. Pavković, D. Veljan, *Matematika 1*, zbirka zadataka, Školska knjiga, Zagreb, 2001.