Tri poboljšanja jedne nejednakosti u vezi s trokutom

Šefket Arslanagić[1], *Dragoljub Milošević*[2]

Neka su a, b, c duljine stranica $\triangle ABC$; α, β, γ njegovi unutrašnji kutovi; h_a, h_b, h_c duljine visina; s_α, s_β, s_γ duljine simetrala unutrašnjih kutova; R i r polumjeri opisanog i upisanog kruga tog trokuta, te s i P njegov poluopseg i površina.

U [3], str. 70–76 je dokazana sljedeća nejednakost

$$\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c}\leqslant\frac{R+r}{r}. \tag{1}$$

U istom članku je dokazano i jedno njezino poboljšanje koje glasi

$$\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c}\leqslant 3\sqrt{\frac{R}{2r}}. \tag{2}$$

Stvarno,

$$\begin{aligned}3\sqrt{\frac{R}{2r}}\leqslant\frac{R+r}{r} &\iff \frac{9R}{2r}\leqslant\frac{R^2+2Rr+r^2}{r^2}\\ &\iff 9Rr\leqslant 2R^2+4Rr+2r^2\\ &\iff 2R^2-5Rr+2r^2\geqslant 0\\ &\iff (R-2r)(2R-r)\geqslant 0,\end{aligned}$$

a ova nejednakost vrijedi zbog Eulerove nejednakosti, $R\geqslant 2r$, pa je stoga i nejednakost (2) istinita. Jednakost u (1) i (2) vrijedi ako i samo ako je trokut istostraničan.

Sada ćemo dati dva poboljšanja nejednakosti (2). Ona glase

$$\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c}\leqslant\sqrt{1+\frac{4R}{r}}, \tag{3}$$

i

$$\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c}\leqslant\sqrt{3\left(1+\frac{R}{r}\right)}. \tag{4}$$

Dokaz. Dokažimo najprije (3). Iskoristit ćemo poznate nejednakosti (vidi [2]):

$$s_\alpha\leqslant\sqrt{s(s-a)},\qquad s_\beta\leqslant\sqrt{s(s-b)},\qquad s_\gamma\leqslant\sqrt{s(s-c)},$$

kao i obrasce

$$h_a=\frac{2P}{a},\qquad h_b=\frac{2P}{b},\qquad h_c=\frac{2P}{c}\qquad\text{i}\qquad P=rs.$$

Sada imamo

$$\frac{s_\alpha}{h_a}\leqslant\frac{a\sqrt{s-a}}{2r\sqrt{s}},\qquad\frac{s_\beta}{h_b}\leqslant\frac{b\sqrt{s-b}}{2r\sqrt{s}},\qquad\frac{s_\gamma}{h_c}\leqslant\frac{c\sqrt{s-c}}{2r\sqrt{s}},$$

[1] Autor je izvanredni profesor u miru na PMF-u u Sarajevu, e-pošta: asefket@pmf.unsa.ba

[2] Profesor je u miru na srednjoj školi u Gornjem Milanovcu.

a odavde nakon zbrajanja

$$\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c}\leqslant\frac{1}{2r\sqrt{s}}\left(a\sqrt{s-a}+b\sqrt{s-b}+c\sqrt{s-c}\right). \tag{5}$$

Na osnovu nejednakosti Cauchy-Bunjakovski-Schvarza za $n=3$,

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leqslant\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right),$$

stavljajući $a_1=\sqrt{a}$, $a_2=\sqrt{b}$, $a_3=\sqrt{c}$, $b_1=\sqrt{a(s-a)}$, $b_2=\sqrt{b(s-b)}$, $b_3=\sqrt{c(s-c)}$, dobivamo:

$$\begin{aligned}&\left[\sqrt{a}\cdot\sqrt{a(s-a)}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{b(s-b)}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{c(s-c)}\right]^2\\&\qquad\leqslant(a+b+c)\left[a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)\right],\end{aligned}$$

odnosno

$$\left(a\sqrt{s-a}+b\sqrt{s-b}+c\sqrt{s-c}\right)^2\leqslant 2s\left[2s^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)\right]$$

a odavde koristeći poznatu jednakost $a^2+b^2+c^2=2(s^2-4Rr-r^2)$:

$$\begin{aligned}\left(a\sqrt{s-a}+b\sqrt{s-b}+c\sqrt{s-c}\right)^2&\leqslant 2s\left[2s^2-2\left(s^2-4Rr-r^2\right)\right]\\&=4rs\,(4R+r)\,,\end{aligned}$$

tj.

$$a\sqrt{s-a}+b\sqrt{s-b}+c\sqrt{s-c}\leqslant 2\sqrt{rs(4R+r)}. \tag{6}$$

Sada iz (5) i (6) imamo

$$\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c}\leqslant\frac{1}{2r\sqrt{s}}\cdot 2\sqrt{rs\,(4R+r)},$$

odnosno

$$\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c}\leqslant\sqrt{1+\frac{4R}{r}},$$

a to je upravo ono što je trebalo dokazati.

Jednakost u (3) vrijedi ako i samo ako trokut istostranični. Nejednakost (3) je bolja od nejednakosti (2) (pa i od (1)) jer je:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{4R}{r}}\leqslant 3\sqrt{\frac{R}{2r}}&\iff 1+\frac{4R}{r}\leqslant\frac{9R}{2r}\\&\iff R\geqslant 2r,\end{aligned}$$

a ovo je poznata Eulerova nejednakost.

Dokažimo sada i nejednakost (4). Ako u poznatu nejednakost

$$(x+y+z)^2 \leqslant 3(x^2+y^2+z^2) \left(\iff \frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] \geqslant 0\right); \ x,y,z \in \mathbf{R}$$

stavimo $x = \dfrac{s_\alpha}{h_a}$, $y = \dfrac{s_\beta}{h_b}$, $z = \dfrac{s_\gamma}{h_c}$, dobivamo,

$$\left(\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c}\right)^2 \leqslant 3\left(\frac{s_\alpha^2}{h_a^2}+\frac{s_\beta^2}{h_b^2}+\frac{s_\gamma^2}{h_c^2}\right).$$

Odavde zbog

$$\begin{aligned} s_\alpha &\leqslant \sqrt{s(s-a)}, & s_\beta &\leqslant \sqrt{s(s-b)}, & s_\gamma &\leqslant \sqrt{s(s-c)}, \\ h_a &= \frac{2P}{a} = \frac{2rs}{a}, & h_b &= \frac{2P}{b} = \frac{2rs}{b}, & h_c &= \frac{2P}{c} = \frac{2rs}{c} \end{aligned}$$

i poznatih jednakosti $a^2+b^2+c^2 = 2\left(s^2-4Rr-r^2\right)$ i $a^3+b^3+c^3 = 2s\left(s^2-6Rr-3r^2\right)$, imamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c}\right)^2 &\leqslant 3\left[\frac{a^2(s-a)}{4r^2s}+\frac{b^2(s-b)}{4r^2s}+\frac{c^2(s-c)}{4r^2s}\right] \\ &= \frac{3}{4r^2s}\left[s\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a^3+b^3+c^2\right)\right] \\ &= \frac{3}{4r^2s}\left[2s\left(s^2-4Rr-r^2\right)-2s\left(s^2-6Rr-3r^2\right)\right] \\ &= \frac{3}{2r^2}\left(2Rr+2r^2\right) = 3\left(1+\frac{R}{r}\right), \end{aligned}$$

tj.

$$\frac{s_\alpha}{h_a}+\frac{s_\beta}{h_b}+\frac{s_\gamma}{h_c} \leqslant \sqrt{3\left(1+\frac{R}{r}\right)},$$

što je i trebalo dokazati. Jednakost u (4) vrijedi ako i samo ako je trokut istostraničan. Nejednakost (4) je bolja od nejednakosti (3) (pa i od (2) i (1)) jer je:

$$\begin{aligned} \sqrt{3\left(1+\frac{R}{r}\right)} \leqslant \sqrt{1+\frac{4R}{r}} &\iff 3\left(1+\frac{R}{r}\right) \leqslant 1+\frac{4R}{r} \\ &\iff R \geqslant 2r, \end{aligned}$$

što je opet Eulerova nejednakost.

Ostaje otvoreno pitanje da li je nejednakost (4) najbolje poboljšanje nejednakosti (1)?

Napomena. U [4] je na stranici 219 dana nejednakost $\dfrac{s_\alpha}{h_a}+\dfrac{s_\beta}{h_b}+\dfrac{s_\gamma}{h_c} \leqslant \dfrac{3R}{2r}$ koja je mnogo slabija od nejednakosti (1) jer je:

$$\frac{R+r}{r} \leqslant \frac{3R}{2r} \iff R \geqslant 2r \quad \text{(Eulerova nejednakost).}$$

Lako se dokaže da je gornja nejednakost slabija i od nejednakosti (2), (3) i (4) jer smo dokazali da vrijedi niz nejednakosti:

$$\frac{3R}{2r} \geqslant \frac{R+r}{r} \geqslant 3\sqrt{\frac{R}{2r}} \geqslant \sqrt{1+\frac{4R}{r}} \geqslant \sqrt{3\left(1+\frac{R}{r}\right)}.$$

Dokažimo još jednakosti koje smo koristili u prethodnim dokazima:

$$ab+bc+ac = r^2+s^2+4Rr, \tag{7}$$

$$a^2+b^2+c^2 = 2\left(s^2-4Rr-r^2\right), \tag{8}$$

$$a^3+b^3+c^3 = 2s\left(s^2-6Rr-3r^2\right). \tag{9}$$

Dokaz od (7). Imamo

$$\begin{aligned} r^2+s^2+4Rr &= \frac{P^2}{s^2}+s^2+\frac{abc}{P}\cdot\frac{P}{s} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}+s^2+\frac{abc}{s} \\ &= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)+s^3+abc}{s} \\ &= \frac{s^3-as^2-bs^2+abs-s^2c+asc+bcs-abc+s^3+abc}{s} \\ &= 2s^2-s(a+b+c)+ab+ac+bc = 2s^2-2s^2+ab+ac+bc \\ &= ab+bc+ac, \end{aligned}$$

tj. vrijedi (7).

Dokaz od (8). Iz jednakosti

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac),$$

koristeći jednakost (7), imamo

$$4s^2 = a^2+b^2+c^2+2(r^2+s^2+4Rr) \iff a^2+b^2+c^2 = 2(s^2-4Rr-r^2),$$

tj. vrijedi (8).

Dokaz od (9). Koristit ćemo poznati identitet:

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right).$$

Iz (7) i (8) dobivamo:

$$\begin{aligned} & a^3+b^3+c^3-12RP = 2s\left(2s^2-8Rr-2r^2-r^2-s^2-4Rr\right) \\ \iff & a^3+b^3+c^3 = 2s\left(s^2-12Rr-3r^2\right)+12Rrs \\ \iff & a^3+b^3+c^3 = 2s\left(s^2-3r^2-6Rr\right), \end{aligned}$$

tj. vrijedi i jednakost (9).

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Š. Arslanagić, *O simetralama uglova trougla*, Nastava matematike, Beograd, Vol. LV, br. 1–2(2010), str. 30–39.

[3] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 2*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2010.

[4] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London, 1989.