Geometrijska rješenja nekih zadataka s arctg x

Jens Carstensen, Alija Muminagić

U ovom prilogu dat ćemo geometrijski dokaz adicijske formule za funkciju $\operatorname{arc\,tg} x$ i geometrijska rješenja nekih zadataka gdje se ona pojavljuje.

Prisjetimo se:

1. Arkus funkcije ili ciklometrijske funkcije su inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija. Jedna od tih funkcija je i funkcija $\operatorname{arc\,tg} x$. Funkcija $\operatorname{arc\,tg} x$ je inverzna funkcija funkcije $\operatorname{tg} x$, tj.

$$\operatorname{arc\,tg} x = \left(\operatorname{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} x\right)^{-1},$$

tj. $\operatorname{arc\,tg} x$ funkcija je restrikcija trigonometrijske funkcije $\operatorname{tg} x$ na interval $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Pretpostavljamo da su vam poznata osnovna svojstva i graf fukcije $\operatorname{arc\,tg} x$.

3. Vrijedi, $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x$.

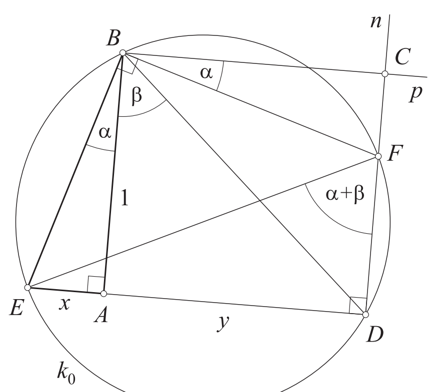
4. Adicijske formule za funkciju $\operatorname{arc\,tg} x$ su:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+y}{1-xy}, & x, y < 1 \\ \pi + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+y}{1-xy}, & x > 0,\ xy > 1 \\ -\pi + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+y}{1-xy}, & x < 0,\ xy > 1 \end{cases}$$

Dat ćemo geometrijski dokaz formule $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+y}{1-xy}$.

Promatrajmo pravokutni trokut ABE u kojem je $\sphericalangle A = 90^\circ$, $|AB| = 1$ i $|EA| = x$. Produžimo katetu $\overline{EA}$ preko A do točke D, tako da je $\sphericalangle DBA = \beta$ i neka je $|AD| = y$.

Kroz točku B povucimo pravac $p \| ED$, a u točki D konstruirajmo okomicu $n \perp ED$. Presječnu točku te okomice i pravca p označimo s C, a presječnu točku opisane kružnice k_o oko trokuta DBE i okomice n s F. Spojimo točke B i E s F.



Slika 1.

Kako je $\sphericalangle EDF = 90^\circ$, $\overline{EF}$ je promjer kružnice k_o. Imamo $\sphericalangle FBE = 90^\circ$ (obodni kut nad promjerom). Sada imamo:

$$\sphericalangle FBA = \sphericalangle FBE - \sphericalangle ABE = 90^\circ - \alpha,$$

$$\sphericalangle CBF = \sphericalangle CBA - \sphericalangle FBA = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha,$$

odakle vidimo $\triangle ABE \sim \triangle CBF$ (dva jednaka kuta). Odavde dobivamo

$$\frac{|EA|}{|AB|} = \frac{|FC|}{|CB|} \iff |FC| = |CB| \cdot \frac{|EA|}{|AB|} = (\text{zbog } |AB| = 1)$$

$$= |CB| \cdot |EA| = (\text{zbog } |CB| = |DA|) = |EA| \cdot |DA| = xy. \qquad (1)$$

Nadalje je

$$|DF| = |DC| - |FC| = (\text{zbog } |DC| = |AB| = 1 \text{ i } (1)) = 1 - xy. \qquad (2)$$

U trokutu EAB je $\operatorname{tg}\alpha = x$, tj.

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} x. \qquad (3)$$

U trokutu ADB je $\operatorname{tg}\beta = y$, tj.

$$\beta = \operatorname{arc\,tg} y, \qquad (4)$$

te u trokutu EDF je $\operatorname{tg}\sphericalangle DFE = \dfrac{|DE|}{|DF|} \overset{(2)}{=} \dfrac{x+y}{1-xy}$ i zbog $\sphericalangle DFE = \sphericalangle DBE$ (kao kutovi nad lukom $\overset{\frown}{ED}$) $= \alpha + \beta$ imamo

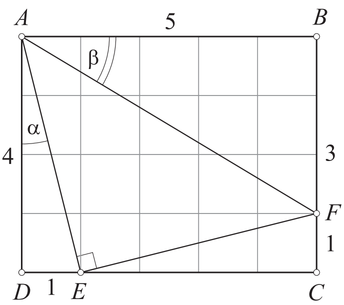
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{x+y}{1-xy}, \text{ tj. } \alpha+\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy} \overset{(3),(4)}{\iff} \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

□

Sada ćemo na primjerima pokazati kako se primjenjuje ova formula.

Primjer 1. Dokazati da je $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4} + \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5} = \frac{\pi}{4}$.

Rješenje. Neka je $ABCD$ pravokutnik sa stanicama duljina $|AD| = |BC| = 4$ i $|AB| = |CD| = 5$. Točke E i F su na stranicama $\overline{CD}$ i $\overline{BC}$ takve da je $|DE| = |CF| = 1$. Lako se pokazuje da je trokut AEF pravokutan i jednakokračan ($\sphericalangle E = 90°$, $|AE| = |EF|$). Neka je $\sphericalangle EAD = \alpha$ i $\sphericalangle BAF = \beta$ (vidi sliku 2). Tako je $\alpha + \sphericalangle FAE + \beta = 90°$ i odavde je $\sphericalangle FAE = 45°$ i $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.



Slika 2.

Dalje imamo, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$, tj. $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}$ i $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{5}$ tj. $\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5}$. Konačno je $\alpha + \beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4} + \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5}$ tj.

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4} + \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5} = \frac{\pi}{4}.$$

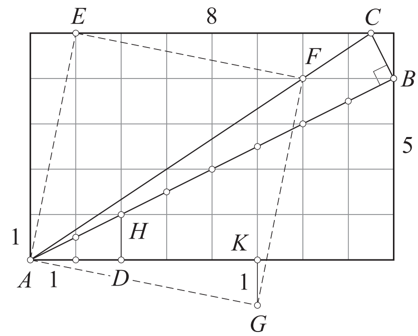
□

Primjer 2. Dokazati formulu $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Prvo rješenje. Ovu formulu je prvi dokazao austrijski matematičar Schulz von Strassnitzky (1803.–1852.), ali se često prisuje Zachariasu Daseu (1824.–1861.), poznatijem kao "čovjek-mašina za računanje". Tu formulu je koristio za izračunavanje broja π na 25 decimala.

Dokaz ćemo iznijeti u malo skraćenom obliku. Sa slike 3 vidimo

$$\operatorname{tg} \sphericalangle HAD = \frac{1}{2}, \quad \text{tj.} \quad \sphericalangle HAD = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2},$$
$$\operatorname{tg} \sphericalangle KAG = \frac{1}{5}, \quad \text{tj.} \quad \sphericalangle KAG = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5},$$
$$\operatorname{tg} \sphericalangle CAB = \frac{1}{8}, \quad \text{tj.} \quad \sphericalangle CAB = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8}.$$



Slika 3.

Nije teško dokazati da je četverokut $AGFE$ kvadrat, odakle slijedi $\sphericalangle FAG = \sphericalangle CAG = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$, pa je

$$\sphericalangle HAD + \sphericalangle KAG + \sphericalangle CAB = \frac{\pi}{4},$$

tj.

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

□

Drugo rješenje. Neka je $ABCD$ pravokutnik sa stranicama duljina $|AB| = |CD| = 16$ i $|AD| = |BC| = 13$. Točke E i F leže na stranici $\overline{BC}$ tako da je $|BF| = 3$, $|FE| = 2$, a G i K su na $\overline{AB}$ tako da je $|BG| = 1$, $|GK| = 2$. Osim toga, točka H je izabrana tako da je $BGHF$ pravokutnik.

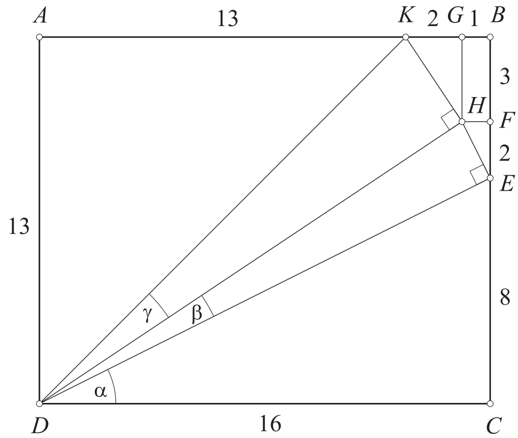
Povucimo dužine $\overline{DE}$ i $\overline{EH}$. Pravokutni trokuti DCE i EFH su slični i tako je $\sphericalangle DEH = 90^\circ$. Sada lako izračunamo $|DE| = 8\sqrt{5}$ i $|EH| = \sqrt{5}$ (Pitagorin poučak primijenjen na trokuta DCE i EFH).

Promarajmo dužinu $\overline{DH}$. U pravokutnom trokutu DEH nalazimo $|DH| = 5\sqrt{13}$. Povucimo još dužine $\overline{DK}$ i $\overline{HK}$. Dobivamo $|DK| = 13\sqrt{2}$ i $|HK| = \sqrt{13}$.

U trokutu DHK imamo: $|DH| = 5\sqrt{13}$, $|HK| = \sqrt{13}$, $|DK| = 13\sqrt{2}$, pa je zbog

$$|DH|^2 + |HK|^2 = 25 \cdot 13 + 13 = 26 \cdot 13 = 2 \cdot 13^2 = |DK|^2,$$

trokut DHK pravokutan.



Slika 4.

Neka je $\alpha = \sphericalangle EDC$, $\beta = \sphericalangle HDE$ i $\gamma = \sphericalangle KDH$. Iz pravokutnih trokuta ECD, HED i HKD dobivamo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} = \frac{1}{8}, \qquad \beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8},$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{13}}{5\sqrt{13}} = \frac{1}{5}, \qquad \gamma = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}.$$

Konačno, radi $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$, dobivamo

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

$\square$

Literatura

[1] Boris Pavković, Darko Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[2] David Miles, *Geometrical Proof of Machin, Rutheford and Dase in a Single Diagram*, (Mathematics in School, November 2010).

[3] Hasan Ünal, *A Visual Proof of Dase's formula*, (Mathematics in School, May 2011).

[4] Jens Carstensen, Alija Muminagić, *Arctan-nogle formler*, (Mathematik Magazinet, februar 2012).