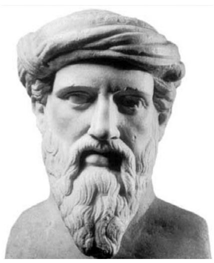
Pitagorine trojke

Ivan Soldo[1], *Ivana Vuksanović*[2]

Uvod



Pitagora, grčki filozof i znanstvenik, često se prikazuje kao prvi "pravi" matematičar. Rođen je na grčkom otoku Samosu, kao sin bogatog i zaslužnog trgovca s kojim je često putovao. Na tim se putovanjima susretao s raznim učiteljima i misliocima onog vremena, koji su ga poučavali filozofiji i znanosti. Jedan od njih bio je i glasoviti Tales iz Mileta. Njegova su otkrića utjecala na Pitagoru, pa se najviše zanimao za matematiku i astronomiju.

Ustanovio je matematičku školu koju danas nazivamo Pitagorejskom školom, a njegove sljedbenike Pitagorejcima. U Pitagorejskoj školi naglasak je bio na tajnosti i zajedništvu, tako da je danas teško odgonetnuti što je rad samoga Pitagore, a što njegovih učenika. Ono što je sigurno, Pitagora je vrlo važna osoba koja je doprinijela razvoju matematike i dala veliki doprinos matematici. No, Pitagorejci nisu radili matematiku u atmosferi kakvu mi danas imamo u školama i na fakultetima. Nije bilo zadataka koje bi trebalo riješiti, nije bilo otvorenih problema za razmatranje, niti su oni pokušavali formulirati dobivene rezultate kako to današnji matematičari rade. Njih su zanimale osnove matematike, pojam broja, trokuta i ostalih matematičkih likova, te apstraktna ideja dokaza. Pitagora je vjerovao da se sve relacije i odnosi mogu svesti na operacije s brojevima, da se sve oko nas i cijeli svemir može objasniti brojevima. Do tog je zaključka došao nakon mnogih opažanja u glazbi, matematici i astronomiji.

Danas Pitagoru pamtimo po poznatom Pitagorinom poučku: u pravokutnom trokutu zbroj kvadrata duljina kateta jednak je kvadratu duljine hipotenuze tog trokuta. To je posebice važno u trigonometriji i analitičkoj geometriji. Iako je poučak nazvan po Pitagori, on je bio poznat još i starim Babiloncima 1000 godina prije nego što se Pitagora rodio. Naime, Pitagora nije prvi otkrio Pitagorin poučak (kako to mnogi brzopleto govore), već je bio prvi koji je dokazao taj poučak i zato se on naziva Pitagorin poučak.

U ovom članku promatrat ćemo algebarski zapis Pitagorina poučka, okarakterizirati sve prirodne brojeve koji zadovoljavaju tvrdnju poučka i pokazati neke primjere i probleme koji se svode na rješavanje algebarskih jednadžbi dviju i više nepoznanica.

Jednadžba $x^2 + y^2 = z^2$

Definicija. Uređenu trojku prirodnih brojeva (x, y, z) zovemo Pitagorina trojka ako su x, y duljine kateta, a z duljina hipotenuze pravokutnog trokuta, tj. ako je

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

Ako su x, y, z u parovima relativno prosti brojevi, onda kažemo da je (x, y, z) primitivna Pitagorina trojka. Takav trokut zovemo (primitivni) Pitagorin trokut.

[1] Autor je na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku, e-pošta: isoldo@mathos.hr

[2] Autorica je studentica na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku, e-pošta: ivuksano@mathos.hr

Pitagora je zaključio da za neparni $k > 1$ brojevi

$$x = k, \quad y = \frac{k^2 - 1}{2}, \quad z = \frac{k^2 + 1}{2}$$

zadovoljavaju jednadžbu (1). Osim toga, Platon je u svojim istraživanjima došao do spoznaje da za $k > 1$ istu jednadžbu zadovoljavaju i brojevi

$$x = 2k, \quad y = k^2 - 1, \quad z = k^2 + 1.$$

Međutim, niti jednom od prethodnih formula nisu određene sve Pitagorine trojke (x, y, z). Primjerice, trojka $(20, 21, 29)$ nije niti jednog spomenutog oblika. Općeniti zapis Pitagorinih trojki prvi put se spominje u Diofantovom djelu *Aritmetika* i Euklidovom djelu *Elementi*.

Ako je (x, y, z) Pitagorina trojka i $nzd(x, y, z) = d$, onda je (a, b, c) primitivna Pitagorina trojka, gdje je $a = x/d$, $b = y/d$, $c = z/d$. Dakle, svaka Pitagorina trojka višekratnik je primitivne Pitagorine trojke. Stoga, da bi odredili općeniti zapis Pitagorinih trojki, potrebno je najprije okarakterizirati sve primitivne Pitagorine trojke.

Uočimo najprije da je u svakoj primitivnoj Pitagorinoj trojki točno jedan od brojeva x, y neparan. Zaista, ako bi x i y bili parni, onda trojka ne bi bila primitivna, a ako bi x i y bili neparni, onda bi iz $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$ i $z^2 \equiv 0 \pmod 4$ dobili kontradikciju.

Teorem. *Sve primitivne Pitagorine trojke (x, y, z) u kojima je y paran, dane su formulama*

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2, \tag{2}$$

gdje je $m > n$ i m, n su relativno prosti prirodni brojevi različite parnosti.

Dokaz. Neka je $y = 2c$. Tada su x i z neparni brojevi. Jednadžbu (1) možemo pisati u obliku

$$y^2 = (z + x)(z - x).$$

Brojevi $z + x$ i $z - x$ su parni, pa postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $z + x = 2a$, $z - x = 2b$. Sada je

$$4c^2 = y^2 = (z + x)(z - x) = 4ab,$$

pa je

$$c^2 = ab.$$

Budući je $z = a + b$, $x = a - b$ i $nzd(x, z) = 1$, zaključujemo $nzd(a, b) = 1$. To znači da postoje $m, n \in \mathbf{N}$, $nzd(m, n) = 1$, takvi da je $a = m^2$, $b = n^2$. Tada je

$$x = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2, \quad y = 2mn.$$

Jer je x neparan broj, brojevi m, n su različite parnosti. Lako se provjeri da brojevi x, y, z definirani s (2) zadovoljavaju jednadžbu (1). Potrebno je još provjeriti jesu li relativno prosti. Pretpostavimo da je $nzd(x, z) = d > 1$. Tada je d neparan i

$$d | (m^2 + n^2) + (m^2 - n^2) = 2m^2,$$
$$d | (m^2 + n^2) - (m^2 - n^2) = 2n^2.$$

No, ovo je u suprotnosti s pretpostavkom da su m i n, pa stoga i m^2 i n^2, relativno prosti. $\square$

Napomena. Iz teorema 1 slijedi da su sve Pitagorine trojke dane identitetom

$$[d(m^2 - n^2)]^2 + (2dmn)^2 = [d(m^2 + n^2)]^2. \tag{3}$$

Zadaci

U ovom poglavlju pokazat ćemo neke zanimljive probleme s Pitagorinim trojkama. Neke primjere preuzeli smo iz [2]. Osim toga, mnoga korisna svojstva, te niz riješenih primjera i zadataka, također se može naći u [1, 3].

1. Pokažite da jednadžba $3^n + 4^n = 5^n$ ima rješenje u prirodnim brojevima samo za $n = 2$.

Rješenje. Jer je $3 + 4 > 5$, očigledno $n = 1$ nije rješenje polazne jednadžbe. Jasno je da za $n = 2$ vrijedi jednakost. Pretpostavimo stoga da je $n > 2$. Tada je

$$5^n = 5^2 \cdot 5^{n-2} = 3^2 \cdot 5^{n-2} + 4^2 \cdot 5^{n-2} > 3^2 \cdot 3^{n-2} + 4^2 \cdot 4^{n-2} = 3^n + 4^n.$$

Dakle, za $n > 2$ vrijedi $3^n + 4^n \neq 5^n$.

2. Pronađite sve Pitagorine trojke koje se sastoje od

a) tri uzastopna parna prirodna broja;

b) tri uzastopna prirodna broja djeljiva s 5.

Rješenje. a) Neka je $(2n, 2n+2, 2n+4)$ tražena Pitagorina trojka. Vrijedi:

$$(2n)^2 + (2n+2)^2 = (2n+4)^2,$$

odnosno $n^2 - 2n - 3 = 0$. Imajući u vidu uvjet zadatka, slijedi $n = 3$. Prema tome, jedina Pitagorina trojka s traženim svojstvom je $(6, 8, 10)$.

b) Neka je $(5n, 5(n+1), 5(n+2))$ tražena Pitagorina trojka. Tada je

$$(5n)^2 + (5n+5)^2 = (5n+10)^2.$$

Slijedi $n^2 - 2n - 3 = 0$, pa je $n = 3$. Tražena Pitagorina trojka je $(15, 20, 25)$.

3. Pronađite sve Pitagorine trojke takve da je x+ y+ z= 40.

Rješenje.
Neka je (x, y, z) tražena trojka. Iz uvjeta zadatka imamo $z = 40 - x - y$. Slijedi,

$$x^2 + y^2 = (40 - x - y)^2 = x^2 + y^2 + 1600 - 80(x + y) + 2xy.$$

Nakon pojednostavnjivanja dobivamo

$$x + y - 20 = \frac{xy}{40}.$$

Iz gornje jednakosti zaključujemo da umnožak xy mora biti višekratnik od 40. Dakle, jedan od brojeva x i y mora biti višekratnik broja 5, a drugi višekratnik broja 8. Nadalje, primijetimo da je $x + y > 20$. Kako z mora biti veći od x i y, zaključujemo da je $x + y < 27$.

Jedina Pitagorina trojka koja zadovoljava uvjete zadatka je $(8, 15, 17)$.

4. Ako je (x,y,z) Pitagorina trojka, dokažite da je xyz djeljivo sa 60.

Rješenje. Pokažimo najprije da je duljina barem jedne katete djeljiva s 3. Pretpostavimo suprotno, tj. neka x, y nisu djeljivi s 3. Tada su oni oblika $3k \pm 1$ i $3l \pm 1$, gdje su k i l prirodni brojevi. Stoga su x^2, y^2 oblika

$$(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1 \quad \text{i}$$
$$(3l \pm 1)^2 = 9l^2 \pm 6l + 1 = 3(3l^2 \pm 2l) + 1,$$

pa zaključujemo da $z^2 = x^2 + y^2$ pri dijeljenju s 3 daje ostatak $1 + 1 = 2$ što nije moguće jer kvadrat prirodnog broja pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0 ili 1. Prema tome, duljina barem jedne katete djeljiva je s 3.

Nadalje, pokažimo da je duljina barem jedne katete djeljiva s 5. Kvadrat prirodnog broja pri dijeljenju s 5 daje ostatke 0, 1 ili 4. Zaista,

$$(5k)^2 = 25k^2, (5k \pm 1)^2 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1 \ \text{ i } \ (5k \pm 2)^2 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4.$$

Ako pretpostavimo da x i y nisu djeljivi s 5, x^2 i y^2 pri dijeljenju s 5 daju ostatke 1 ili 4. To znači da $x^2 + y^2 = z^2$ pri dijeljenju s 5 daje ostatak 2, 3 ili 0. Kako je z^2 kvadrat cijelog broja, on pri dijeljenju s 5 ne može dati ostatak 2 ili 3, pa zaključujemo da je z^2, a time i z, djeljiv s 5.

Preostaje pokazati djeljivost s 4. Dovoljno je pokazati da to vrijedi za primitivne Pitagorine trojke. Kako je u primitivnim trojkama točno jedan od brojeva x, y paran, pretpostavimo da je to y. Tada prema teoremu 1 slijedi $y = 2mn$, gdje su m i n različite parnosti. Prema tome, y je djeljiv s 4, a time i xyz sa 60.

5. Pronađite sve Pitagorine trojke kojima je jedna stranica duljine 12.

Rješenje. Sve Pitagorine trojke dane su identitetom $[d(m^2 - n^2)]^2 + (2dmn)^2 = [d(m^2 + n^2)]^2$, gdje je $d \in \mathbf{N}$, $nzd(m, n) = 1$, $m > n$ i različite su parnosti. Promatramo tri slučaja:

1° Neka je $2dmn = 12$, tj. $dmn = 6$. Iz ovog vidimo da je $d \in \{1, 2, 3, 6\}$.
Za $d = 1$ imamo:
$mn = 6 \cdot 1$, tj. $m = 6$, $n = 1$, što daje Pitagorinu trojku $(12, 35, 37)$, ili
$mn = 3 \cdot 2$, tj. $m = 3$, $n = 2$, što daje Pitagorinu trojku $(5, 12, 13)$.
Za $d = 2$ imamo:
$mn = 3 \cdot 1$, tj. $m = 3$, $n = 1$, što ne može biti jer su m i n različite parnosti.
Za $d = 3$ imamo:
$mn = 2 \cdot 1$, tj. $m = 2$, $n = 1$, što daje Pitagorinu trojku $(9, 12, 15)$.
Za $d = 6$ imamo:
$mn = 1 \cdot 1$, tj. $m = 1$, $n = 1$, što ne može biti jer je $m > n$.

2° Neka je sada $d(m^2 + n^2) = 12$. Tada je $d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
Za $d = 1$ imamo $m^2 + n^2 = 12$, što je nemoguće jer su m i n različite parnosti i $m^2 + n^2$ pri dijeljenju s 4 daje ostatak 1. Slično se zaključi i za $d = 2, 3, 4, 6$.
Za $d = 12$ imamo $m^2 + n^2 = 1$, ali ta jednadžba nema rješenja u prirodnim brojevima.

3° Neka je $d(m^2 - n^2) = 12$. Zaključujemo $d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
Za $d = 1$ imamo $m^2 - n^2 = 12$, a to nije moguće jer $m^2 - n^2$ pri dijeljenju s 4 daje ostatak 1 ili 3. Slično zaključujemo za $d = 2, 3, 6$.
Za $d = 4$ imamo $m^2 - n^2 = 3$, tj. $(m + n)(m - n) = 3$, što daje trojku $(12, 16, 20)$.
Za $d = 12$ imamo $m^2 - n^2 = 1$, ali ta jednadžba nema rješenja u prirodnim brojevima.

Dakle, tražene Pitagorine trojke su: $(12, 35, 37)$, $(5, 12, 13)$, $(9, 12, 15)$, $(12, 16, 20)$.

6. Pronađite sve Pitagorine trojke kojima je najveći broj jednak 481.

Rješenje. Iz (3) slijedi $d(m^2 + n^2) = 481$. To povlači $d \in \{1, 13, 37, 481\}$.
Za $d = 1$ imamo:
$m^2 + n^2 = 481 = 20^2 + 9^2 = 16^2 + 15^2$, što nam daje trojke $(319, 360, 481)$ i $(31, 480, 481)$.
Za $d = 13$ slijedi:
$m^2 + n^2 = 37 = 6^2 + 1^2$, tj. $m = 6$, $n = 1$, pa imamo trojku $(455, 156, 481)$.
Za $d = 37$ imamo:
$m^2 + n^2 = 13 = 3^2 + 2^2$, tj. $m = 3$, $n = 2$, a to daje trojku $(185, 444, 481)$.

Za $d = 481$ dobivamo $m^2 + n^2 = 1$, ali ta jednadžba nema rješenja u prirodnim brojevima.

7. Pronađite sve pravokutne trokute s cjelobrojnim duljinama stranica čija je površina jednaka opsegu trokuta.

Rješenje. Neka su x, y, z duljine stranica Pitagorina trokuta. Sve Pitagorine trojke (x, y, z) su oblika (3). Uvjet zadatka daje jednadžbu $xy = 2(x + y + z)$, odnosno $d^2mn(m^2 - n^2) = d(2m^2 + 2mn)$. Dijeljenjem obje strane s $dm(m + n)$ dobivamo $dn(m - n) = 2$.
Ako je $d = 1$ imamo:
$n = 1$, $m - n = 2$ što daje $m = 3$, pa zbog iste parnosti od m i n ovaj slučaj nije moguć; ili vrijedi
$n = 2$, $m - n = 1$, pa $m = 3$, što daje trojku $(5, 12, 13)$.
Ako je $d = 2$ imamo:
$n(m - n) = 1$, tj. $n = 1$, $m = 2$, pa dobivamo trojku $(6, 8, 10)$.

8. Neka je $k \geq 3$. Dokažite da postoji Pitagorin trokut čija je jedna duljina stranice jednaka k.

Rješenje. Pretpostavimo najprije da je k neparan broj, tj. $k = 2l + 1 = (l + 1)^2 - l^2$, $l \in \mathbf{N}$. Ukoliko u (2) uvrstimo $m = l + 1$ i $n = l$, dobivamo da je k član primitivne trojke $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$.

Neka je sada k paran broj i $k = 2^t u$, gdje je t prirodan i u neparan prirodan broj. Ukoliko je $t \geq 2$ uzimamo $m = 2^{t-1}u$ i $n = 1$ i dobivamo da je k član primitivne trojke $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$. Ako je $t = 1$, tada je $k = 2u$. Kako je u neparan, iz prethodno dokazanog postoji primitivna trojka (x, y, z), gdje je $x = u$. Dakle, $(2x, 2y, 2z)$ je trojka čiji je prvi član jednak k.

9. Neka je (x, y, z) primitivna Pitagorina trojka. Može li $x - y$ biti kvadrat prirodnog broja koji je veći od 1?

Rješenje. Pretpostavimo da je y paran. Tada je $x = m^2 - n^2$ i $y = 2mn$, gdje su m i n različite parnosti i $nzd(m, n) = 1$. Nadalje je $x - y = (m - n)^2 - 2n^2$. Mi želimo dobiti $(m - n)^2 - 2n^2 = t^2$. Faktorizacijom dobivamo $(m - n - t)(m - n + t) = 2n^2$. Neka je $m - n - t = 2$ i $m - n + t = n^2$. Oduzimanjem ove dvije jednadžbe dobivamo $2t = n^2 - 2$. Npr. ako je $n = 4$, $t = 7$, onda je $m = 13$, te je $x = 153$, $y = 104$ i $x - y = 7^2$. Dakle, $x - y$ može biti kvadrat prirodnog broja koji je veći od 1.

10. Neka je $r = a^2 - b^2$, $s = 2ab$ i $t = a^2 + b^2$, gdje su a i b prirodni brojevi i $a > b$. Neka je $d = nzd(a, b)$ i $A = a/d$, $B = b/d$.

a) Ako je točno jedan od A i B neparan, dokažite da je Pitagorina trojka (r, s, t) oblika (d^2x, d^2y, d^2z), gdje je (x, y, z) primitivna trojka u kojoj je y paran broj.

b) Ako su A i B neparni, dokažite da je (r, s, t) oblika $(2d^2x, 2d^2y, 2d^2z)$, gdje je (x, y, z) primitivna trojka u kojoj je x paran broj.

Rješenje. a) Primijetimo da je (r, s, t) Pitagorina trojka. Zapišemo li r, s, t pomoću A i B, dobivamo $r = d^2(A^2 - B^2)$, $s = d^2(2AB)$, $t = d^2(A^2 + B^2)$. Kako su A i B različite parnosti i $nzd(A, B) = 1$, tada je $(x, y, z) = (A^2 - B^2, 2AB, A^2 + B^2)$ primitivna Pitagorina trojka.

b) Kako su A i B neparni, $x = (A + B)/2$ i $y = (A - B)/2$ su cijeli brojevi. Nadalje, $nzd(x, y) = 1$, jer ako bi postojao neki prost broj p koji dijeli x i y, tada bi on dijelio i $x + y$ i $x - y$, što bi značilo da dijeli i A i B, a to nije moguće jer je $nzd(A, B) = 1$. Osim toga, x i y su suprotne parnosti, jer je $x + y = A$ i A je neparan. Kako je $nzd(x, y) = 1$, a x i y su različite parnosti, prema teoremu slijedi $(2xy, x^2-y^2, x^2+y^2)$ je primitivna Pitagorina trojka. Primijetimo da je $4xy = A^2 - B^2$, a iz $A = x+y$, $B = x-y$ dobivamo $2AB = 2(x^2-y^2)$ i $A^2+B^2 = 2(x^2+y^2)$. Stoga je $r = d^2(A^2-B^2) = 2d^2(2xy)$, $s = d^2(2AB) = 2d^2(x^2-y^2)$ i $t = d^2(A^2+B^2) = 2d^2(x^2+y^2)$.

Zadaci za vježbu

1. Odredite primitivne Pitagorine trokute čije sve tri duljine stranica leže između 1000 i 2000.

2. Nađite Pitagorine trojke u kojima je jedan od elemenata jednak 15.

3. Dokažite ili opovrgnite: Postoji Pitagorin trokut s hipotenuzom 77.

4. Odredite Pitagorine trojke (x, y, z), sa $x < y$ i $z = 377$.

5. Nađite Pitagorine trokute čiji opseg iznosi najmanje 56, a površina najviše 210.

Literatura

[1] A. Adler, J. E. Coury, *The theory of numbers*, Jones and Bartlett Publishers, London 1995.

[2] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, Skripta, PMF-matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 2006.

[3] W. Sierpinski, *Elementary theory of numbers*, North-Holand Mathematical Library, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa 1988.