Matematičke restauracije Marina Getaldića, 2. dio

Marijana Borić[1]

Odrazi i recepcija Getaldićevih restauracija

Djelo *Oživljeni Apolonije* imalo je široki odjek u matematičkoj literaturi svog vremena, pa i kasnije. Značajno djelo u kojem se prenose Getaldićeve restauracije Apolonijeva djela *O nagibima* je knjiga francuskog matematičara Pierrea Herigonea *Cursus mathematicus* (Pariz, 1644.). Tu se prenose Getaldićeve formulacije Apolonijevih problema (paralelno je tiskan izvorni latinski tekst i francuski prijevod), dok je sav ostali sadržaj koji uključuje rješenja, konstrukcije i dokaze problema prikazan specifičnom

[1] Autorica dr. sc. Marijana Borić je s Odsjeka za povijest prirodnih i matematičkih znanosti Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti, e-pošta: `mbuljan@hazu.hr`

Herigonovom simbolikom.[15] Getaldićeva restauracija još je za njegova života imala odjeka i na tlu Engleske, o čemu svjedoči zapis Thomasa Harriota (1560.–1621.), unutar njegova rukopisa čuvanog u British museumu (Add. MSS 6784. f. 229). Harriot baveći se Apolonijevim djelom *O nagibima* navodi Getaldićevu restauraciju.[16] Kasnije u 18. stoljeću, dva su se engleska znanstvenika bavila Getaldićevom restauracijom Apolonijeva djela *O nagibima*.[17] Analizirajući Andersonove restauracije matematičar Samuel Horsly, autor djela *Apolonii Pergaei inclinationum libri duo* (Oxford, 1770.), dva puta je u svom tekstu spomenuo Getaldića. Prvi put kada tvrdi da se prije same konstrukcije u restauracijama služio algebarskom analizom koja je djelotvornija u traženju konstruktivnog rješenja (knjiga II, str. 103). Drugi put kada spominje Getaldića, obrazlaže okolnosti zbog kojih je njegova restauracija *Oživljeni Apolonije* ostala nedovršena, te prikazuje i analizira Andersonovu dopunu *Supplementum Apollonii redivivi* (knjiga II, str. 113–114). Budući da ne spominje Getaldićevu restauraciju *Oživljeni Apolonije*, knjiga druga, nameće se zaključak da mu to djelo vjerojatno nije bilo poznato. Horsly se i sam bavio restauracijama Apolonijevih djela. Međutim, njegov je pristup sasvim drugačiji od prethodnika. U to vrijeme algebarska je metoda već afirmirana i ima velik broj pristaša. Horsly se u rješavanju problema oslanja na Getaldićeve formulacije, ali dalje radi pomoću Viètove algebarske metode, koristeći algebarsku analizu i sintezu. Getaldića spominje u svom djelu i Reuben Burrow, engleski matematičar koji se i sam bavio restauracijama Apolonijevih djela. O tome je u Londonu 1779. godine objavio knjigu naslova *A restitution of the geometrical treatise of Apollonius Pergaeus on inclinations*. U predgovoru knjige piše da Apolonijevi problemi nigdje nisu prije bili razmatrani, sve do Getaldića i Horsleya. Za razliku od Horsleya koji se uglavnom služio Getaldićevim formulacijama s neznatnim izmjenama, Burrow na temelju vlastitih istraživanja Papova djela *Mathematicae collectiones*, samostalno formulira Apolonijeve probleme. Njegove se formulacije znatno razlikuju od Getaldićevih, tako da im se formulacije podudaraju tek u jednom problemu.[18] Getaldićev treći i četvrti problem, kod kojeg se uvodi romb, Burrow definira općenitije. Formulira ga pomoću dva pravca koja se sijeku i tako jednim problemom obuhvaća dva Getaldićeva. Rješavajući peti problem, koji je kod Burrowa znatno kompleksniji i sadrži više njih, samo jedan od formuliranih obuhvaća Getaldićev peti problem[19]. Ovo je prvi put da se daje nova formulacija problema i ne uzima se za polazište Getaldićeva formulacija Apolonijevih problema, onako kako ih je Getaldić shvatio iz Papova teksta u Comandinovu prijevodu.

---

[15] Premda to iz samih naslova nije odmah vidljivo, Pierre Herigone u djelu *Cursus mathematicus* (Pariz, 1644.) prikazuje ne samo Getaldićevu restauraciju o nagibima, nego i Getaldićeve restauracije Apolonijeva djela *O dodirima*, ali zajedno s Viètovim. Objavljene su u *Cursus mathematicus* pod naslovom *Apollonii Pergaei tactionum geometria* (svezak I, str. 915–934), ali su sve pripisane Viète u, dok su Getaldićeve restauracije Apolonijeva djela *O nagibima* nalaze pod naslovom *Apollonii Pergaei inclinationum geometria* (str. 905–914). Premda u Herigonovoj knjizi Getaldićeve restauracije nisu niti pretiskane, niti prevedene, nego zapisane u simboličkoj formi, u tom su obliku postale mnogo poznatije nego da su samo ostale u izvornom izdanju. Opširnije o tome vidi u knjizi Ž. Dadić *Hrvati i egzaktne znanosti u osvit novovjekovlja*, Zagreb, 1994., str. 179–180.

[16] Rosalind C. H. Tarner, Thomas Harriot (1560.–1621.), u Ž. Dadić, (ur.), *Marin Getaldić, Sabrana djela I*, vidi[5], str. 163.

[17] Tada je i Johan Lawson preveo na engleski, u nešto izmijenjenom obliku, Getaldićevu restauraciju Apolonijeva djela *O dodirima* i objavio u svom djelu *The two books of Apollonius Pergaeus concerning tangencies as have been restored by Franciscus Vièta and Marinus Ghetaldus* (prvo izdanje Cambridge 1764., drugo London 1771.)

[18] To je kod Getaldića problem II, a kod Burrowa problem I.

[19] O tome detaljno piše Ž. Dadić, *Oživljeni Apolonije ili obnovljena geometrija nagiba Apolonija Pergejca*, u Ž. Dadić, (ur.), *Marin Getaldić, Sabrana djela I*, vidi[5], str. 203–204). "Ostali se uzimaju općenitije, jer točka kroz koju prolazi presječni pravac ne mora biti na jednoj od zadanih kružnica i istodobno na spojnici središta tih kružnica, kao što je to kod Getaldića, nego može imati razne položaje, a i za sam presječni pravac mogu se postaviti razni uvjeti, pa i takav da bude usporedan sa zadanim pravcem".

Papov tekst o problemima bio je tako teško i nerazumljivo sročen, da je očito imao mogućnost različitih interpretacija[20]. Pored toga važno je naglasiti da se i Burrow metodološkim pristupom razlikuje od prethodnih restauracija. On uočava da Horslyeva primjena algebarske metode nije primjerena restauraciji antičkog matematičkog djela. Svjestan važnosti odabira metode kojom će se pisati djelo, Burrow se odlučuje za starogrčku geometrijsku analitičko-sintetičku metodu. Kako Getaldić, tako i on odabranu metodu dosljedno provodi tijekom pisanja čitavog djela, koje u tom smislu predstavlja cjelinu, načinjenu u okvirima antičke matematike. Getaldić i Burrow jedini su autori koji su zadovoljili kriterije potpune restauracije budući se ona, pored sadržaja, mora i metodološki približiti izvorniku. U tom smislu svi restauratori koji su odabrali metodu po kriteriju jednostavnijeg puta do rješenja, te ukoliko metoda nije pripadala okvirima antičke matematike i kao takva dosljedno provođena tijekom restauriranja, nisu u punom smislu ostvarili cilj. Getaldić je poznavajući tradiciju antičke matematike i njenih metoda, te na temelju sačuvanih Apolonijevih djela i zapisa o zagubljenim djelima, za korektnu restauraciju Apolonijeva spisa *O nagibima* imao mogućnost izbora između sintetičke ili geometrijske analitičko-sintetičke metode. Budući nema čvrstog dokaza kojom se od tih dviju metoda Apolonije koristio pišući djelo o nagibima, obje su podjednako prikladne, pa je izbor jedne od njih stvar osobne sklonosti i prosudbe samog restauratora.

Getaldićev rad na matematičkoj analizi i sintezi

Getaldić je ne samo u restauracijama već u svim svojim djelima veliku važnost pridavao odabiru matematičke metode. Nakon što je Viète uveo algebarsku metodu u matematiku, Getaldić je među prvima prihvatio i razvijao algebarsku analizu koja je omogućavala nove vidike u matematici i pomoću nje rješavao pojedine geometrijske probleme. Međutim primjenjivao je obje metode, svjestan da koliko god bila korisna nova algebarska metoda, nije mogla poreći vrijednost dotadašnjoj geometrijskoj metodi.[21] Težio je da njegov rad na Apolonijevim djelima u metodološkom smislu predstavlja homogenu cjelinu. O tome svjedoči i činjenica da kada je na petom problemu iz Apolonijeva djela o nagibima iskušavao novu algebarsku metodu, vlastito algebarsko rješenje petog problema nije tiskao u restauraciji, *Oživljeni Apolonije*, već u svom glavnom djelu *De resolutione et compositione mathematica* (*O matematičkoj analizi i sintezi)* objavljenom u Rimu 1630. To je djelo osmislio kao prvi cjeloviti priručnik nove algebarske metode. U njemu primjenjuje Vièteovu algebarsku analizu na raznorodnoj građi. Cilj mu je bio da prikaže snagu i dosege nove metode te tako doprinese njenoj afirmaciji. Rješavajući neobrađene probleme Getaldić je došao do novih rezultata kojima se približio utemeljenju područja analitičke geometrije.[22]

[20] Sam Getaldić kaže kako mu je bilo teže shvatiti probleme nego ih riješiti.

[21] Tijekom 17. stoljeća mnogi su matematičari smatrali da se samo algebarskom i analitičkom metodom mogu dobiti novi rezultati u analitičkoj geometriji i nisu bili skloni geometrijskom istraživanju krivulja. Usprkos općem vjerovanju francuski matematičar Girard Desargues (1593.–1662.) istraživao je krivulje koje se dobiju okomitim ili kosim projekcijama na ravninu. Uočio je da premda se pritom mijenja oblik krivulje, ostaju sačuvana neka njena svojstva. Zbog brojnosti pristaša algebarske metode njegov rad u to vrijeme nije imao sljedbenika, ali se kasnije pokazalo da se i u sklopu stare geometrijske metode mogu dobiti, ne samo novi matematički rezultati nego i nova područja kao projektivna geometrija.

[22] Uvođenje algebarske analize snažno je obilježilo matematiku s početka novovjekovlja. Dotad algebarske operacije nisu bile apstrahirane i odvojene od konkretnih objekata. Viète uvodi opće veličine i slovni račun, koje se plodonosno spajaju s antičkom tradicijom. Simbolička algebra se razvila uvođenjem općih veličina u već

Autor je i jednog fizikalnog djela *Promotus Archimedes* (Rim, 1603.), u kojem uvodi matematiku u fizikalna istraživanja, te se višestruko služi matematičkom metodologijom, ne samo pri istraživanju i dokazivanju činjenica, nego i pri izlaganju dobivenih zaključaka. Tako je cjelokupno djelo koncipirao po uzoru na Euklidove *Elemente*. Getaldićev stil izlaganja fizikalne građe geometrijskom metodom rani je nagovještaj širenja geometrijske metode na različita područja filozofije 17. stoljeća.[23]

Kako je to razvidno iz njegove sačuvane korespondencije, Getaldić je tijekom života istovremeno radio na nekoliko djela različitih metodoloških pristupa. Istražujući Apolonijeva djela postupao je kao antički matematičari te u restauracijama geometrijske probleme rješava konstrukcijom u kojoj je polazio od zadanih veličina i slijedom zaključivanja dobivao tražene veličine, a zatim tu konstrukciju dokazivao.[24] Da bi jednostavnije pronašao put složenih konstrukcija, Getaldić je mogao koristiti i geometrijsku analizu, kojom ne bi prelazio okvire antičke matematike. Ona bi mu olakšala postupak i poslužila da na temelju zaključaka o zadanim i traženim veličinama izvede konstrukciju problema, odnosno sintezu. Analiza teče obrnutim putem od sinteze. Polazi se od traženih veličina koje se uzimaju kao poznate, pa se onda zaključuje o određenim odnosima između danih i traženih veličina. Budući je Apolonije u nekim djelima označavao analizu, a u nekima samo sintezu, Getaldić je imao mogućnost izbora jednog ili drugog geometrijskog postupka. Vjerojatno se odlučio da izgubljeno djelo restaurira čisto sintetičkom metodom, budući je prije koristio sačuvano Apolonijevo djelo o čunjosječnicama koje je bilo sintetičko, te mu je ono moglo poslužiti kao neka vrsta uzora. U prilog tome svjedoči činjenica da su sve tri Getaldićeve restauracije Apolonijevih djela čisto sintetičke, bez naznačene analize, te kao takve u metodološkom smislu predstavljaju ujednačenu cjelinu. Naravno to ne osporava mogućnost da se Getaldić u istraživanju rješenja problema paralelno koristio i analizom, ali ju nije naznačio u sklopu postupka restauracije. Štoviše, budući je istovremeno radio na restauracijama i pisao svoje glavno djelo *O matematičkoj analizi i sintezi* gdje je, pored ostalih, metodom algebarske analize obrađivao i pojedine probleme iz Apolonijevih restauracija, nameće se zaključak da je vrlo moguće da se u traganju za složenim rješenjima iz restauracija, možda ponekad i nesvjesno, koristio kao vodiljom rezultatima analize koji su mu bili poznati.[25]

---

poznate metode analize i sinteze. Time metode analize i sinteze iz geometrijskog prelaze u algebarsko područje. Uvođenje nove metode imalo je presudnu ulogu u daljnjem razvitku znanosti. Postupno dolazi do oblikovanja pojma formule. Omogućila je nastanak jednostavnijih i egzaktnijih interpretacija rezultata istraživanja i bila preduvjet pojave novih matematičkih područja u 17. stoljeću. Getaldić je u promatranju neodređenih problema bio vrlo blizu zaključku da se sve točke koje udovoljavaju problemu nalaze na nekoj krivulji. Tu posljedicu uočio je Descartes nekoliko godina kasnije, a njegov zaključak smatra se početkom i utemeljenjem analitičke geometrije. Što je Getaldiću nedostajalo do njezinog zasnivanja, tumači se u radu Marijane Borić, *Getaldić, Descartes i analitička geometrija*, Prilozi za istraživanje hrvatske filozofske baštine, Zagreb, 2012., god. XXXVII, br. 2(76), str. 167–196.

[23] Opširnije o značaju tog djela vidi u radu Marijane Borić, *Prinos Marina Getaldića preobrazbi novovjekovne znanosti*, HUM – časopis Filozofskog fakulteta Sveučilišta u Mostaru, 2012., br. 9, str. 269–290.

[24] Za jednostavne slučajeve lagano se dolazi do konstrukcije rješenja. Međutim složeniji problemi traže vrlo komplicirane konstrukcije, koje je znatno lakše pronaći ako se prije ispita odnos zadanih i traženih veličina. Vjerojatno su i stariji antički matematičari koristili taj način u pronalaženju konstrukcije, ali postupak njenog traženja nisu bilježili u svojim tekstovima. Tek pod utjecajem Aristotela taj se postupak počinje zapisivati u matematičkim tekstovima. Sam Apolonije u nekim je djelima naznačavao analizu, a u nekima nije.

[25] Žarko Dadić u knjizi *Hrvati i egzaktne znanosti u osvitu novovjekovlja*, (Zagreb, 1994.), str. 171, piše o Getaldićevoj metodi i kaže da Samuel Horsley iznosi zanimljive tvrdnje u djelu *Apollonii Pergaei inclinationum libri duo*, Oxonii, 1770, str. 103. Horsley tu naime tvrdi da je Getaldić do svojih rješenja došao algebarskim putem, a da je tek nakon toga primijenio geometrijsku konstrukciju. Tu njegovu tvrdnju prenosi kasnije i A. Favaro, povjesničar znanosti u *Amici e correspondenti di Galileo Galilei XXIV* – Marino Ghetaldi, Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, Anno accademico 1909.–1910., Tomo LXIX – parte seconda, str. 317.

Primijenivši planski u tiskanom djelu isključivo sintetičku metodu, Getaldić je postigao da njegov *Oživljeni Apolonije* bude restauracija srodnija izvornim Apolonijevim djelima, od nekih drugih, kasnijih restauracija.

Primjer Getaldićeva rada na restauracijama

Da bi se predočio stil Getaldićeva izlaganja, koji je bio karakterističan za matematiku na prijelazu iz 16. u 17. stoljeće izložit će se problem I preuzet iz prijevoda Getaldićeva djela *Oživljeni Apolonije ili obnovljena geometrija nagiba Apolonija Pergejca*, tiskan u Ž. Dadić, (ur.), *Marin Getaldić, Sabrana djela I*, vidi[5], str. 207–210.

Problem I

U zadanoj kružnici opisati dužinu zadane veličine koja dopire do zadane točke.[26]

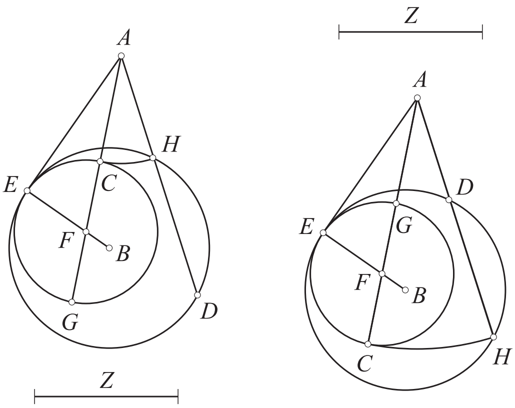
Ovaj problem ima dva slučaja i to jedan ako je zadana točka izvan kružnice (slika 1), a drugi (slika 2) ako je ona unutar nje. U prvom slučaju zadana dužina ne smije biti veća od promjera kružnice, ali isto tako ne smije biti manja od one dužine u kružnici koja u zadanoj točki siječe promjer pod pravim kutom.

Konstrukcija prvog slučaja

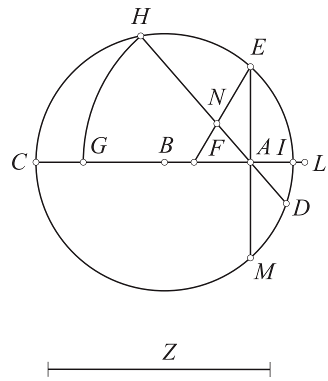
Zadana je kružnica DHE čije je središte B; zadana točka A je izvan kružnice, dok zadana dužina Z ne smije biti veća od promjera kružnice. U kružnici DHE treba upisati dužinu jednaku dužini Z i ona treba doprijeti do točke A. Ako je promjer kružnice DHE jednak dužini Z, povucimo od točke A promjer i tako ćemo učiniti ono što se traži. Ako je pak dužina Z manja od promjera, povucimo AE tako da dodiruje kružnicu DHE u točki E, zatim spojimo BE. Dakle kut AEB bit će pravi. Zatim na dužini EB oduzmimo EF koja je jednaka polovici dužine Z, pa onda spojimo također i AF, te oko središta F razmakom FE opišimo kružnicu CEG koja siječe produženu dužinu AF u točkama C i G. Ovu će kružnicu dodirivati dužina AE u točki E. Naime kut AEF je pravi kut. Zatim oko središta A razmakom AC opišimo drugu kružnicu koja siječe kružnicu DHE u točki H i kroz točku A povucimo dužinu AHD koja siječe istu kružnicu još u točki D. Budući da su jednaki pravokutnici HAD i CAG – naime jednom i drugom je jednak kvadrat AE[27] – dužina AH je jednaka dužini AC, bit će i AD jednaka dužini AG, pa će stoga oduzimanje jednakih jednakima, ostatak HD biti jednak ostatku CG. Međutim, CG je jednak upravo dužini Z – naime, jedna i druga je dvostruko veća od same FE – pa će zato i HD biti jednaka upravo dužini Z. Dakle, u zadanoj kružnici DHE upisana je dužina DH jednaka zadanoj dužini Z i ona dopire do točke A. A to je trebalo učiniti.

[26] U originalu se u ovom problemu, kao i u drugima koji slijede, upotrebljava izraz *recta linea*, koji jednom znači dužinu, a drugi put *pravac*. Zbog toga je vrlo teško ispravno prevesti formulaciju ovog problema. U prvom dijelu formulacije ovog problema *recta linea* znači dužinu, budući da joj se zadaje *duljina*, dok u drugom dijelu znači pravac na kojem ta dužina leži i koji dopire do zadane točke na toj dužini ili na njezinom produžetku. Sasvim slobodno problem bi trebalo formulirati ovako: Zadanoj kružnici upisati dužinu zadane veličine tako da ona ili njezin produžetak prolazi zadanom točkom.

[27] Pravokutnik HAD znači $|AH|\cdot|AD|$, a kvadrat AE znači $|AE|^2$, prema tadašnjoj notaciji.



Slika 1. (Sabrana djela, str. 208)



Slika 2. (Sabrana djela, str. 209)

Konstrukcija drugog slučaja

Uzmimo da je sve zadano kao prije. Neka A bude u kružnici, a Z ne smije biti veća od promjera zadane kružnice DHE, niti manja od one dužine u kružnici koja u točki A siječe promjer pod pravim kutom. Treba učiniti ono što se traži. Povucimo kroz A promjer CAI kružnice. Ako je, dakle, taj promjer jednak zadanoj dužini Z, već je učinjeno što se tražilo. Ako je pak veći, povucimo kroz A na dužinu CI dužinu EAM pod pravim kutom. Ako je dužina EM jednaka zadanoj Z, opet je već učinjeno što se tražilo; a ako je manja, postavimo na AC dužinu EF jednaku polovici Z. Međutim polovica dužine Z je veća od EA (katkad se postavlja veća od cijele EM, koja je dvostruko veća od same dužine EA). Zatim neka dužini FE bude jednaka FG, pa oko središta A razmakom AG opišimo kružnicu koja siječe DHE u točki H te onda spojivši HA produžimo je do točke D, i onda oduzmimo FL koja je jednaka dužini FG ili FE. Budući da je, dakle dužina GL tako razdijeljena točkom F na jednake dijelove i točkom A na nejednake, bit će zbroj pravokutnika GAL i kvadrata FA jednak kvadratu FG, odnosno FE. Međutim, kvadrat FE je jednak zbroju kvadrata FA i EA, pa će stoga i zbroj pravokutnika GAL i kvadrata FA biti jednak zbroju kvadrata FA i EA. Odbijmo im zajednički kvadrat FA, pa će dakle preostali pravokutnik GAL biti jednak preostalom kvadratu EA. Međutim kvadrat EA, odnosno pravokutnik EAM jednak je pravokutniku HAD, pa će i pravokutnik GAL biti jednak pravokutniku HAD. Ali i GA je jednaka dužini HA po konstrukciji, pa će i AL biti jednaka dužini AD, a dodavanjem jednakih jednakima bit će cijela HD jednaka cijeloj GL. Međutim, GL je jednaka upravo dužini Z – naime, GF i FL jednake su dužini FE, odnosno polovici dužine Z, pa će stoga i HD biti jednaka dužini Z. Dakle u zadanoj kružnici DHE upisali smo dužinu DH jednaku zadanoj dužini Z i ona prolazi točkom A. To je ono što smo trebali učiniti.

Rekli smo pak da zadana dužina Z ne smije biti veća od promjera CI niti manja od same dužine EM, jer je u kružnici najveća dužina promjer, a EM je najmanja od svih koje idu kroz točku A.

Povucimo, naime, neku drugu dužinu HAD i raspolovimo je na dva dijela u točki N. Dakle, budući da je kvadrat HN jednak zbroju pravokutnika HAD i kvadrata NA, a kvadrat EA, odnosno pravokutnik EAM, jednak pravokutniku HAD, kvadrat EA bit će manji od kvadrata HN. Stoga će i dužina EA biti manja od HN, a dosljedno EM će biti manja od HD. Naime, dužine EM i HD dvostruko su veće od dužina EA i HN. Na sličan ćemo način dokazati da je EM manja od svih dužina povučenih kroz točku A, pa je stoga ograničenje sasvim jasno.