# ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2014. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 1/ 257.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 216.

## A) Zadaci iz matematike

**3401.** Dokaži da je za svaki prirodan broj $n$ i svaki prirodan broj $a > 1$ broj

$$n(2n+1)(3n+1)\dots(an+1)$$

djeljiv sa svakim prostim brojem manjim od $a$.

**3402.** a) Dokaži da za svake realne brojeve $a$, $b$ i svake pozitivne brojeve $x$, $y$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}\,.$$

b) Dokaži da za svake realne brojeve $a_1, a_2\dots, a_n$ i svake pozitivne brojeve $x_1, x_2, \dots, x_n$, $n \geq 2$, vrijedi nejednakost

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\dots+\frac{a_n^2}{x_n}\geq\frac{(a_1+\dots+a_n)^2}{x_1+\dots+x_n}\,.$$

**3403.** Neka su $a$, $b$, $c$ pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=3$ i $abc=1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{ab}{(a^2+b)(a+b^2)}+\frac{bc}{(b^2+c)(b+c^2)}+\frac{ca}{(c^2+a)(c+a^2)}\leq\frac{3}{4}\,.$$

*Uputa.* Pokaži najprije da vrijedi nejednakost

$$(a^2+b)(a+b^2)\geq(a^2+a)(b^2+b)\,.$$

**3404.** Neka je $a > b > 1$, $A = \log_a(a-b)$ i $B = \log_b(a-b)$. Ako je $a^2+b^2 = 3ab$ dokaži $A+B = 2AB$.

**3405.** U četverokutu $ABCD$, $AD$ je paralelno s $BC$, $AD$ i $BC$ su okomiti na $CD$, dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točki $P$ i $Q$ je nožište okomice iz $P$ na $CD$. Dokaži jednakost

$$\frac{1}{|AD|}+\frac{1}{|BC|}=\frac{1}{|PQ|}\,.$$

**3406.** U kvadratu $ABCD$ dane su točke $M\in\overline{AB}$ i $N\in\overline{AD}$ tako da je $|AM| = |AN|$. Na dužini $\overline{BN}$ nalazi se točka $P$ takva da je $AP\perp BN$. Dokaži da je $MP\perp CP$.

**3407.** Neka je $k(O,r)$ upisana kružnica pravokutnom trokutu $ABC$ s pravim kutom u vrhu $C$. Dokaži jednakost

$$|AO|\cdot|BO|=\sqrt{2}|AB|\,.$$

**3408.** Pravac kroz vrh $A$ jednakostraničnog trokuta $ABC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki $F$, a opisanu mu kružnicu u $M$. Dokaži jednakost

$$\frac{1}{|MF|}=\frac{1}{|MB|}+\frac{1}{|MC|}\,.$$

**3409.** Ako su $a$, $b$, $c$ duljine stranica trokuta i $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ nasuprotni im kutovi takvi da vrijedi

$$a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta=c^2\cos^2\gamma\,,$$

koje vrijednosti mogu poprimiti kutovi tog trokuta?

**3410.** Nađi sva pozitivna cjelobrojna rješenja $x$, $y$, $z$ sustava jednadžbi

$$x+y-z=12$$
$$x^2+y^2-z^2=12\,.$$

**3411.** Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$12x+10y+15z=1\,.$$

**3412.** Odredi beskonačni produkt

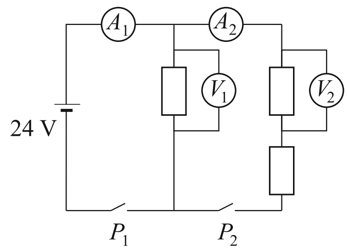
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)\,.$$

**3413.** Volumen pravilne četverostrane piramide je $V$, a $r$ je polumjer kružnice opisane oko njezine baze. Odredi udaljenost između središta te kružnice i središta sfere opisane oko piramide.

## B) Zadaci iz fizike

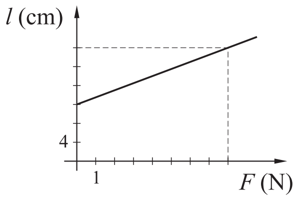
**OŠ – 370.** Hrvoje i Maja se pripremaju za natjecanje u atletici trčeći nekoliko krugova oko nogometnog igrališta koje je dugačko 80 metara i široko 55 metara. Krenuli su istovremeno u istom smjeru iz jednog kuta igrališta. Hrvoje trči prosječnom brzinom 5 m/s, a Maja brzinom 4 m/s. Dogovorili su se da će se odmoriti kad se nađu na istom mjestu. Gdje će to biti? Koliko dugo će trčati i koliki će put prijeći svaki od njih?

**OŠ – 371.** Svi otpornici na shemi su jednaki. Kad se zatvori prekidač $P_1$ ampermetar $A_1$ pokazuje 3 ampera. Koliko će pokazivati svi instrumenti kad se zatvori i prekidač $P_2$?



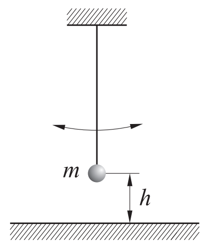

**OŠ – 372.** Najnovija otkrića o veličini protona pokazuju da je njegov promjer 4 posto manji nego što se donedavno smatralo. Po tim otkrićima je promjer protona $8.418 \cdot 10^{-16}$ m. Atom vodika čini samo jedan proton oko kojeg kruži jedan elektron. Koliko je puta gustoća protona veća od gustoće atoma vodika ako elektron kruži na udaljenosti $5.3 \cdot 10^{-11}$ m od jezgre? Masa protona iznosi $1.6726 \cdot 10^{-27}$ kg, a elektrona $9.109 \cdot 10^{-31}$ kg. Za proton i atom pretpostavite da su u obliku kugle.

**OŠ – 373.** Dijagram prikazuje promjenu duljine opruge u ovisnosti o sili koja djeluje na nju. Kada se na nju objesi uteg $X$ njena duljina iznosi 18 cm, a kad se objesi uteg $Y$ duljina je 21 cm. Utezima $X$ i $Y$ se želi uravnotežiti poluga zanemarive mase dugačka 30 cm. Ako utege postavimo na krajeve poluge na koju udaljenost od utega $X$ treba postaviti oslonac?




**1553.** Tijelo $A$ nalazi se na visini 15 m iznad tijela $B$. Tijelo $A$ pustimo da slobodno pada. Nakon 0.5 s pustimo i tijelo $B$ da slobodno pada. Tijela istovremeno padnu na tlo. Odredi vrijeme padanja tijela $A$ i visine pada obaju tijela. Otpor zraka je zanemariv.

**1554.** Malena kuglica mase 20 grama visi na niti (električnom izolatoru) na visini 5 cm iznad velike horizontalne metalne ravnine i oscilira malim oscilacijama perioda 0.6 s. Ako kuglicu nabijemo nabojem iznosa 200 nC (predznak nije bitan), koliki će biti novi period malih oscilacija?



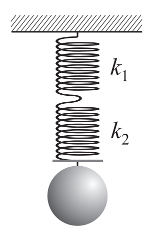

**1555.** Na dnu cisterne za vodu nalazi se otvor presjeka 2 cm$^2$. Presječna površina cisterne je 0.8 m$^2$, a visina vode je 0.5 m.

a) Kojom brzinom istječe voda? Koliko litara istekne u minuti?

b) Ako cisternu neprekidno punimo brzinom 1.2 litre u sekundi, do koje će se maksimalne visine voda podići?

**1556.** Da bismo naboj $q = 30$ nC približili dugačkoj žici jednolike linijske gustoće naboja, s 15 cm na 5 cm, potreban je rad $3 \cdot 10^{-4}$ J. Kolika je linijska gustoća naboja žice?

**1557.** Dvije opruge konstanta elastičnosti $k_1 = 480$ N/m i $k_2 = 120$ N/m spojene su jedna ispod druge, a ispod njih je uteg mase 0.25 kg. Odredi period malih oscilacija utega (gore-dolje).




**1558.** Gustoća obične vode je 1000, a leda 920 kg/m$^3$. Odredi gustoću "teške" vode i "teškog" leda (u teškoj vodi su atomi vodika zamijenjeni "teškim" izotopom vodika, deuterijem, atomske mase 2 g/mol ).

**1559.** Brzina valova na vodi (valne duljine veće od 1 m) ovisi o valnoj duljini na sljedeći način:

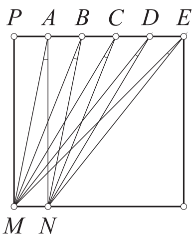
$$v(\lambda) = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}},$$

gdje je $g = 9.81$ m/s$^2$ ubrzanje sile teže. Odredi kojom se brzinom gibaju valovi duljine 3 m i kolika je valna duljina valova koji se kreću brzinom 1.8 m/s.

## C) Rješenja iz matematike

Zadatak **3369** iz MFL 2/254 se može riješiti puno elementarnije, koristeći samo poznato svojstvo paralelograma.

**3369.** *Na slici je prikazan kvadrat i točke $M$, $N$, $P$, $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ tako da je $|PA| = |AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |MN|$. Koliki je zbroj kutova $MAN$, $MBN$, $MCN$, $MDN$ i $MEN$?*




*Rješenje.* Svi četverokuti $MNAP$, $MNBA$, $MNCB$, $MNDC$, $MNED$ su paralelogrami i $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$, $\overline{ME}$, tim redom, su njihove dijagonale. Kako su kutovi s paralelnim kracima jednaki, redom imamo: $\sphericalangle MAN = \sphericalangle PMA$, $\sphericalangle MBN = \sphericalangle AMB$, $\sphericalangle MCN = \sphericalangle BMC$, $\sphericalangle MDN = \sphericalangle CMD$, $\sphericalangle MEN = \sphericalangle DME$. Sada imamo

$$\begin{aligned}&\sphericalangle MAN + \sphericalangle MBN + \sphericalangle MCN + \sphericalangle MDN + \sphericalangle MEN\\ &= \sphericalangle PMA + \sphericalangle AMB + \sphericalangle BMC + \sphericalangle CMD + \sphericalangle DME\\ &= \sphericalangle PME = 45^\circ.\end{aligned}$$

*Ur.*

**3375.** *Racionaliziraj razlomak*

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{1 + 5\sqrt[3]{2} + 7\sqrt[3]{4}}.$$

*Prvo rješenje.* Koristit ćemo identitet

$$\begin{aligned}&x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz\\ &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}x &= \sqrt[3]{1},\\ y &= 5\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{250},\\ z &= 7\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{1372},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{1372})\\ &\quad\cdot(\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{250^2} + \sqrt[3]{1372^2} - \sqrt[3]{1\cdot 250}\\ &\quad - \sqrt[3]{1\cdot 1372} - \sqrt[3]{250\cdot 1372})\\ &\quad = 1 + 250 + 1372 - 3\sqrt[3]{1\cdot 250\cdot 1372}\\ &\quad = 1623 - 3\sqrt[3]{70^3} = 1413.\end{aligned}$$

Dani razlomak postaje

$$\begin{aligned}&\Big[\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{250^2} + \sqrt[3]{1372^2} - \sqrt[3]{1\cdot 250}\\ &\quad - \sqrt[3]{1\cdot 1372} - \sqrt[3]{250\cdot 1372})\Big] \Big/ 1413\\ &= \frac{\sqrt[3]{2}(1 + 93\sqrt[3]{2} - 70 + 18\sqrt[3]{4})}{1413}\\ &= \frac{\sqrt[3]{2}(-69 + 93\sqrt[3]{2} + 18\sqrt[3]{4})}{1413}\\ &= \frac{\sqrt[3]{2}(-23 + 31\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4})}{471}\\ &= \frac{-23\sqrt[3]{2} + 31\sqrt[3]{4} + 12}{471}.\end{aligned}$$

*Halil Lačević (1),*
*Tursko-Bosanski Sarajevo College, Sarajevo*

*Drugo rješenje.* Odabrat ćemo cijele brojeve $a$, $b$, $c$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned}&(7\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{2} + 1)(a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c)\\ &\quad = 14a\sqrt[3]{2} + 10a + a\sqrt[3]{4} + 14b + 5b\sqrt[3]{4}\\ &\qquad + b\sqrt[3]{2} + 7c\sqrt[3]{4} + 5c\sqrt[3]{2} + c\\ &\quad = (14a + b + 5c)\sqrt[3]{2} + (a + 5b + 7c)\sqrt[3]{4}\\ &\qquad + (10a + 14b + c).\end{aligned}$$

Mora biti

$$\begin{aligned}14a + b + 5c &= 0\\ a + 5b + 7c &= 0.\end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe dobijemo

$$b = -5c - 14a$$

pa uvrštavanjem u drugu imamo

$$69a = -18c \quad \text{tj.} \quad a = -\frac{6}{23}c.$$

Sada iz prve jednadžbe imamo

$$b = \frac{23 \cdot 5}{6}a - 14a = \frac{31}{6}a$$

tj.

$$a = \frac{6}{31}b.$$

Možemo uzeti

$$a = 6, \quad b = 31, \quad c = -23.$$

Sada je

$$\frac{\sqrt[3]{2}(6\sqrt[3]{4} + 31\sqrt[3]{2} - 23)}{(7\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{2} + 1)(6\sqrt[3]{4} + 31\sqrt[3]{2} - 23)}$$

$$= \left(12 + 31\sqrt[3]{4} - 23\sqrt[3]{2}\right) \Big/$$

$$\Big(84\sqrt[3]{2} + 60 + 6\sqrt[3]{4} + 434 + 155\sqrt[3]{4}$$

$$+31\sqrt[3]{2} - 161\sqrt[3]{4} - 115\sqrt[3]{2} - 23\Big)$$

$$= \frac{12 + 31\sqrt[3]{4} - 23\sqrt[3]{2}}{471}.$$

*Petar Orlić (2),*
*XV. gimnazija, Zagreb*

*Treće rješenje.* Stavimo

$$r = 1 + 5\sqrt[3]{2} + 7\sqrt[3]{4}.$$

Tada je

$$(r-1)^3 = (5\sqrt[3]{2} + 7\sqrt[3]{4})^3$$

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1$$

$$= 250 + 1050\sqrt[3]{2} + 1470\sqrt[3]{4} + 1372$$

$$= 1622 + 210(5\sqrt[3]{2} + 7\sqrt[3]{4})$$

$$= 1622 + 210(r-1)$$

$$= 1412 + 210r$$

$$r^3 - 3r^2 - 207r = 1413$$

$$r^2 - 3r - 207 = \frac{1413}{r}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{r^2 - 3r - 207}{1413} = \frac{r(r-3) - 207}{1413}$$

$$= \frac{(1+5\sqrt[3]{2}+7\sqrt[3]{4})(-2+5\sqrt[3]{2}+7\sqrt[3]{4})-207}{1413}$$

$$= \frac{-23 + 31\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4}}{471}.$$

Dakle, razlomak postaje

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{r} = \frac{-23\sqrt[3]{2} + 31\sqrt[3]{4} + 12}{471}.$$

*Ur.*

**3376.** *U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu*

$$\sqrt{x_1 - 1} + 2\sqrt{x_2 - 4} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2}$$
$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

*Rješenje.* Uvedimo supstitucije:

$$a_1^2 = x_1 - 1$$
$$\ldots$$
$$a_n^2 = x_n - n^2.$$

Sada je

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n$$

$$= \frac{a_1^2 + 1 + a_2^2 + 2^2 + \ldots + a_n^2 + n^2}{2} \quad \Big/ \cdot 2$$

$$a_1^2 - 2a_1 + 1 + a_2^2 - 4a_2 + 4 + \ldots + a_n^2 - 2na_n + n^2 = 0$$

$$(a_1 - 1)^2 + (a_2 - 2)^2 + \ldots + (a_n - n)^2 = 0.$$

Rješenje je

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$\ldots$$
$$a_n = n$$

tj.

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 2 \cdot 2^2$$
$$\ldots$$
$$x_n = 2n^2.$$

*Petar Orlić (2), Zagreb*

**3377.** *Riješi diofantsku jednadžbu*

$$5x + 7y = 8.$$

*Prvo rješenje.* Jedno partikularno rješenje je

$$x_0 = 3, \qquad x_0 = -1.$$

Jednadžba poprima oblik

$$5(x - x_0) + 7(x - x_0) = 0$$

$$5(x - 3) + 7(x + 1) = 0$$

$$\begin{matrix} x - 3 = 7t \\ x + 1 = -5t \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} x = 7t + 3 \\ x = -5t - 1 \end{matrix} \quad \text{za sve } t \in Z$$

*Petar Orlić (2), Zagreb*

*Drugo rješenje.* Svako rješenje diofantske jednadžbe zadovoljava konvergenciju

$$5x + 7y \equiv 8 \pmod 5$$

pa je $2y \equiv -2 \pmod 5$, odakle je $y \equiv -1 \pmod 5$ tj. $y = -1 + 5t$ za $t \in \mathbf{Z}$. Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu dobivamo

$$5x + 7(-1 + 5t) = 8$$

pa je $x = 3 - 7t$. Dakle, rješenje je $x = 3 - 7t$, $y = -1 + 5t$, gdje je $t$ proizvoljan cijeli broj.

*Ur.*

**3378.** *Riješi logaritamsku jednadžbu*

$$4^{\log_{10} x} - 32 + x^{\log_{10} 4} = 0.$$

*Rješenje.* Imamo: $x > 0$, $x \neq 1$ te

$$\log_{10} x = \frac{1}{\log_x 10} \quad \text{i}$$

$$\log_{10} 4 = \frac{\log_x 4}{\log_x 10} = \log_{10} x \cdot \log_x 4.$$

Dana jednadžba postaje

$$4^{\log_{10} x} - 32 + x^{\log_{10} x \cdot \log_x 4} = 0$$

$$4^{\log_{10} x} - 32 + (x^{\log_x 4})^{\log_{10} x} = 0$$

$$4^{\log_{10} x} - 32 + 4^{\log_{10} x} = 0$$

$$2 \cdot 4^{\log_{10} x} = 32 \; / \; : 2$$

$$4^{\log_{10} x} = 16 = 4^2$$

$$\log_{10} x = 2, \quad \text{a odavde}$$

$$x = 10^2 = 100.$$

*Amina Helać (4),*
*Peta gimnazija, Sarajevo, BiH*

**3379.** *Dokaži da za svake realne brojeve $x$, $y$, $z$ vrijedi nejednakost*

$$\frac{y^2 - x^2}{2x^2 + 1} + \frac{z^2 - y^2}{2y^2 + 1} + \frac{x^2 - z^2}{2z^2 + 1} \geq 0.$$

*Rješenje.* Dana nejednakost je ekvivalentna s

$$\begin{aligned} & y^2(2y^2+1)(2z^2+1)+z^2(2x^2+1)(2z^2+1) \\ & \quad +x^2(2x^2+1)(2y^2+1) \\ & \geqslant x^2(2y^2+1)(2z^2+1)+y^2(2x^2+1)(2z^2+1) \\ & \quad +z^2(2x^2+1)(2y^2+1) \\ & \Longleftrightarrow \; 4y^4z^2+2y^4+2y^2z^2+y^2+4x^2z^4+2x^2z^2 \\ & \quad +2z^4+z^2+4x^4y^2+2x^4+2x^2y^2+x^2 \\ & \geqslant 4x^2y^2z^2+2x^2y^2+2x^2z^2+x^2+4x^2y^2z^2 \\ & \quad +2x^2y^2+2y^2z^2+y^2+4x^2y^2z^2+2x^2z^2 \\ & \quad +2y^2z^2+z^2 \\ & \Longleftrightarrow \; 4y^4z^2+2y^4+4x^2z^4+2z^4+4x^4y^2+2x^4 \\ & \geqslant 12x^2y^2z^2+2x^2y^2+2x^2z^2+2z^2y^2. \qquad (1) \end{aligned}$$

Kako je zbog AG nejednakosti

$$y^4z^2 + x^2z^4 + x^4y^2 \geqslant 3\sqrt[3]{x^6y^6z^6} = 3x^2y^2z^2,$$

imamo

$$4(y^4z^2 + x^2z^4 + x^4y^2) \geqslant 12x^2y^2x^2,$$

pa iz (1) slijedi:

$$2y^4 + 2z^4 + 2x^4 \geqslant 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2z^2y^2$$

tj.

$$(y^2 - z^2)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^2 - z^2)^2 \geqslant 0$$

što vrijedi. Dakle, nejednakost je točna. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$.

*Halil Lačević (1), Sarajevo, BiH*

**3380.** *Neka je $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ aritmetički niz. Dokaži da za svaki $n$ vrijedi jednakost*

$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = \frac{(a_n a_{n+1})^2 - (a_1 a_0)^2}{4d},$$

*gdje je $d$ razlika niza.*

*Rješenje.* Dokazat ćemo tvrdnju matematičkom indukcijom.

*Baza indukcije.* Za $n=1$ tvrdnja vrijedi:

$$\frac{(a_1a_2)^2-(a_1a_0)^2}{4d}=a_1^2\cdot\frac{(a_2-a_0)(a_2+a_0)}{4d}$$
$$=a_1^2\cdot\frac{2d\cdot 2a_1}{4d}=a_1^3.$$

*Pretpostavka indukcije.* Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neko $n=k$, tj.

$$a_1^3+a_2^3+\ldots+a_k^3=\frac{(a_ka_{k+1})^2-(a_1a_0)^2}{4d}.$$

*Korak indukcije.* Za $n=k+1$ je

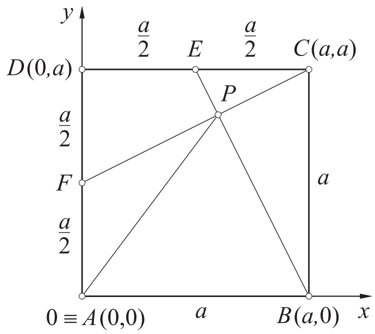
$$a_1^3+a_2^3+\ldots+a_k^3+a_{k+1}^3$$
$$=\frac{(a_ka_{k+1})^2-(a_1a_0)^2}{4d}+a_{k+1}^3$$
$$=\frac{(a_ka_{k+1})^2-(a_1a_0)^2+4da_{k+1}^3}{4d}$$
$$=\frac{a_{k+1}^2(a_k^2+4d(a_k+d))-(a_1a_0)^2}{4d}$$
$$=\frac{a_{k+1}^2(a_k+2d)^2-(a_1a_0)^2}{4d}$$
$$=\frac{(a_{k+1}^2a_{k+2})^2-(a_1a_0)^2}{4d},$$

što je tražena tvrdnja za $k+1$. Stoga po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj $n$.

*Petar Orlić (2), Zagreb*

**3381.** *Točke $E$ i $F$ su polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ kvadrata $ABCD$. Pravci $BE$ i $CF$ sijeku se u točki $P$. Dokaži da je $|AP|=|AB|$.*

*Prvo rješenje.* Upotrijebit ćemo koordinatnu metodu. Neka je $O\equiv A(0,0)$, $Ox\equiv AB$, $Oy\equiv AD$.




Tada imamo: $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,a)$, $D(0,a)$, $E\left(\frac{a}{2},a\right)$, $F\left(0,\frac{a}{2}\right)$, te su jednadžbe pravaca

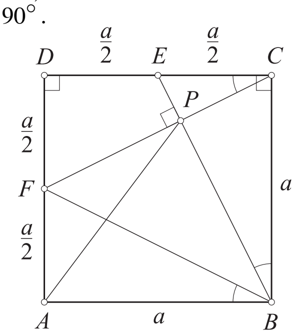
$$FC:\ y-\frac{a}{2}=\frac{a-\frac{a}{2}}{a-0}(x-a)$$
$$y=\frac{1}{2}x+\frac{a}{2},$$
$$BE:\ y-0=\frac{a-0}{\frac{a}{2}-a}(x-a)$$
$$y=-2x+2a.$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobivamo koordinatne točke $P$: $x=\frac{3}{5}a$, $y=\frac{4}{5}a$ tj. $P\left(\frac{3}{5}a,\frac{4}{5}a\right)$. Tada je

$$|AP|=\sqrt{\left(\frac{3}{5}a-0\right)^2+\left(\frac{4}{5}a-0\right)^2}=a=|AB|.$$

*Halil Lačević (1), Sarajevo, BiH*

*Drugo rješenje.* $\triangle CFD\cong\triangle BEC \implies \sphericalangle PEC=\sphericalangle PFD \implies FPED$ tetivan $\implies FPE=90^\circ$.




$ABPF$ tetivan

$$|EB|=|BF|=|CF|=\frac{\sqrt{5}}{2}a$$
$$\triangle CPE\sim\triangle BCE \text{ po KK}$$
$$\frac{|EB|}{|BC|}=\frac{|EC|}{|CP|}$$
$$|PC|=\frac{a}{\sqrt{5}},\quad |EP|=\frac{a}{2\sqrt{5}}$$
$$|FP|=\frac{\sqrt{5}}{2}a-\frac{a}{\sqrt{5}}$$
$$|BP|=\frac{\sqrt{5}}{2}a-\frac{a}{2\sqrt{5}}$$

po Ptolomejevom poučku:

$$|AB||PF| + |BP||AF| = |BF||AP|$$

$$a^2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)=|AP|\cdot a\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$a\left(\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+a\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)=|AP|\sqrt{5}/:\sqrt{5}$$

$$a\left(1-\frac{2}{5}\right)+a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)=|AP|$$

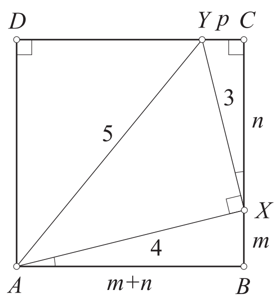
$$|AP| = a = |AB|.$$

*Petar Orlić (2), Zagreb*

**3382.** *Na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ dane su redom točke $X$ i $Y$ tako da je $|XY| = 3$, $|AX| = 4$, $|AY| = 5$. Odredi duljinu stranice kvadrata.*

*Rješenje.* Iz pravokutnog trokuta $CXY$ imamo

$$n^2 + p^2 = 9. \qquad (1)$$




Iz sličnosti trokuta $ABX$ i $XCY$ dobivamo

$$\frac{4}{m} = \frac{3}{p} \implies m = \frac{4}{3}p$$

$$\frac{m+n}{m} = \frac{n}{p} = \frac{n}{\frac{3}{4}m}$$

$$\implies n = 3m = 4p,$$

tj. $p = \frac{n}{4}$. Iz (1) imamo

$$\frac{17}{16}n^2 = 9 \quad \text{tj.} \quad n = \frac{12}{\sqrt{17}}$$

$$|AB| = n + m = \frac{16}{\sqrt{17}}.$$

*Petar Orlić (2), Zagreb*

**3383.** *Dan je pravokutan trokut $ABC$ s pravim kutom u vrhu $A$. S vanjske strane kateta konstruirani su kvadrati $AEDB$ i $ACFG$. Pravci $CD$ i $BF$ sijeku stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom u točkama $P$ i $Q$. Dokaži da je $|AP| = |AQ|$.*

*Rješenje.* Prema Talesovom teoremu imamo:

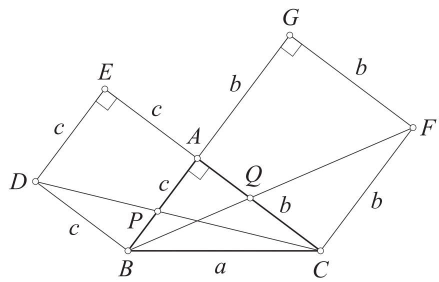
$$\frac{|BA|}{|BG|} = \frac{|AQ|}{|GF|} \implies \frac{c}{b+c} = \frac{|AQ|}{b}$$

$$\implies |AQ| = \frac{bc}{b+c} \qquad (1)$$

i

$$\frac{|AC|}{|CE|} = \frac{|AP|}{|ED|} \implies \frac{b}{b+c} = \frac{|AP|}{c}$$

$$\implies |AP| = \frac{bc}{b+c}. \qquad (2)$$




Sada iz (1) i (2) dobijemo $|AP| = |AQ|$.

*Halil Lačević (1), Sarajevo, BiH*

**3384.** *Riješi sustav jednadžbi*

$$2\sin x + 3\cos y = 3$$
$$3\sin y + 2\cos x = 4.$$

*Rješenje.* Kvadriranjem obiju jednadžbi i zbrajanjem dobiva se

$$4(\sin^2 x + \cos^2 x) + 9(\cos^2 y + \sin^2 y)$$
$$+12(\sin x\cos y + \sin y\cos x) = 25,$$

tj.

$$13 + 12\sin(x+y) = 25.$$

Dakle,

$$\sin(x+y) = 1 \quad \text{i} \quad x + y = (4k+1)\frac{\pi}{2}$$

za $k \in \mathbf{Z}$. Slijedi

$$\sin x = \cos y \quad \text{i} \quad \sin y = \cos x.$$

Uvrštavanjem u polazne jednadžbe dobivamo
$$\sin x = \cos y = \frac{3}{5}, \quad \sin y = \cos x = \frac{4}{5},$$
dakle, $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg} y = \frac{4}{3}$. Kako su $\sin x$, $\cos x$, $\sin y$, $\cos y$ svi pozitivni, imamo
$$x = \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4} + 2k\pi,\ y = \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3} + 2l\pi,\ k, l \in \mathbf{Z}.$$

*Ur.*

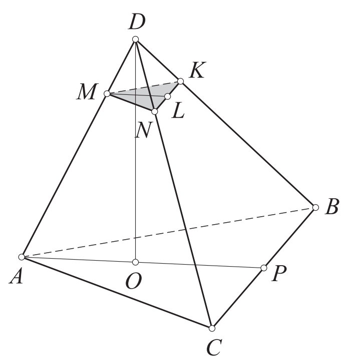
**3385.** *Na koliko se načina u skupu* $\{n : 1 \leq n \leq 100\}$ *mogu izabrati tri broja čiji je zbroj djeljiv s 3.*

*Rješenje.* Zbroj tri cijela broja je djeljiv s 3 samo u ovim slučajevima: ili svi imaju isti ostatak pri diobi s 3 ili svi daju različite ostatke. Među brojevima 1, 2,...,100 ima 33 djeljiva s 3; nadalje 34 ih ima ostatak 1 i 33 ih ima ostatak 2. Dakle, ukupan broj mogućih izbora je
$$\binom{33}{3} + \binom{34}{3} + \binom{33}{3} + 33 \cdot 34 \cdot 33 = 53\,922.$$

*Petar Orlić (2), Zagreb*

**3386.** *Duljina brida tetraedra ABCD je* $a$. *Na bridu* $\overline{AD}$ *dana je točka* $M$ *takva da je* $|AM| : |MD| = 3 : 1$. *Odredi površinu presjeka tetraedra ravninom koja prolazi točkom* $M$ *i okomita je na brid* $\overline{AD}$.

*Rješenje.* Neka je $|AD| = a$, $|AM| : |MD| = 3 : 1$ i $AD \perp MKN$. Tada je $|AM| = \frac{3}{4}a$, $|MD| = \frac{1}{4}a$.




$\triangle DMN$ i $\triangle DMK$ su pravokutni, pri čemu je $\sphericalangle DMN = 90^\circ$, $\sphericalangle DMK = 90^\circ$. Štoviše, $\triangle DMN \cong \triangle DMK$ jer je $\sphericalangle MDN = \sphericalangle MDK = 60^\circ$, a $\overline{MD}$ je zajednička stranica. Slijedi $|MN| = |MK|$, $|DN| = |DK| = |KN|$ i $KN \| BC$.

Iz $\triangle DMN$ je:
$$|MN| = |MD| \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a}{4}\sqrt{3},$$
$$|DN| = |MD| : \cos 60^\circ = \frac{a}{4} : \frac{1}{2} = \frac{a}{2},$$
$$|KN| = \frac{a}{2},$$
$$DP \perp BC \quad \text{i} \quad DL \perp NK.$$
Iz $\triangle DLN$ je
$$|NL| = \frac{1}{2}|KN| = \frac{a}{4},$$
a iz $\triangle MNL$
$$|ML| = \sqrt{|MN|^2 - |LN|^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{16} - \frac{a^2}{16}}$$
$$= \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$
$$P_{MNK} = |NL| \cdot |ML| = \frac{a}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a^2\sqrt{2}}{16}.$$

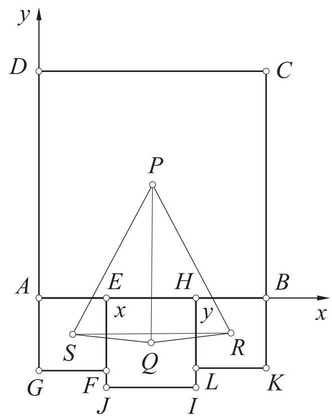
*Ur.*

**3387.** *Na stranici* $\overline{AB}$ *kvadrata* $ABCD$ *dane su točke* $E$ *i* $H$, *tim redom. Zatim su konstruirani kvadrati* $AEFG$, $EHIJ$ *i* $HBKL$ *sa središtima* $S$, $Q$ *i* $R$. *Ako je* $P$ *središte kvadrata* $ABCD$, *dokaži da je* $PQ \perp RS$ *i* $|PQ| = |RS|$.

*Prvo rješenje.* Postavimo koordinatni sustav sa središtem u $A$:
$$A(0,0),\ B(a,0),\ C(a,a),\ D(0,a),$$
$$P\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right),\ E(x,0),\ H(y,0),\ S\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right),$$
$$Q\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right),\ R\left(\frac{a+y}{2}, \frac{y-a}{2}\right).$$
Tada je
$$|PQ| = \sqrt{\frac{(x+y-a)^2}{4} + \frac{(x-y-a)^2}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + a^2 - 2ax}{2}},$$

$$|RS| = \sqrt{\frac{(a+y-x)^2}{4} + \frac{(x+y-a)^2}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{x^2+y^2+a^2-2ax}{2}},$$

tj. $|PQ| = |RS|$.




Neka pravac $p$ prolazi točkama $P$ i $Q$, a $q$ točkama $R$ i $S$

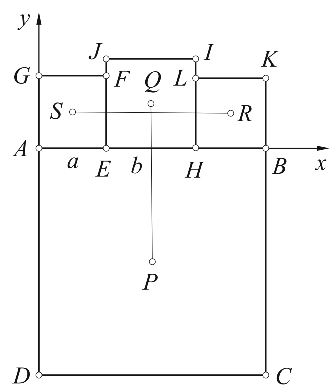
$$p \dots y = m_1 x + n_1$$
$$P \dots \frac{a}{2} = m_1 \frac{a}{2} + n_1$$
$$Q \dots \frac{x-y}{2} = m_1 \frac{x+y}{2} + n_1$$
$$\frac{a}{2} - m_1 \frac{a}{2} = \frac{x-y}{2} - \frac{x+y}{2} m_1$$
$$a + y - x = m_1(a - x - y)$$
$$m_1 = \frac{a+y-x}{a-x-y}$$
$$q \dots y = m_2 x + n_1$$
$$R \dots \frac{y-a}{2} = m_2 \frac{a+y}{2} + n_2$$
$$S \dots -\frac{x}{2} = m_2 \frac{x}{2} + n_2$$
$$\frac{y-a}{2} - m_2 \frac{a+y}{2} = -\frac{x}{2} - \frac{x}{2} m_2$$
$$x + y - a = m_2(a + y - x)$$
$$m_2 = -\frac{a-x-y}{a+y-x}.$$

Kako je $m_1 m_2 = -1$, smjerovi pravaca su okomiti tj. $PQ \perp RS$.

*Petar Orlić (2), Zagreb*

*Drugo rješenje.* Možemo uzeti da je $|AB| = 1$ i sve stavimo u kompleksnu ravninu s ishodištem u točki $A$. Tada točkama redom pripadaju kompleksni brojevi:

$$A \dots z_A = 0$$
$$B \dots z_B = 1$$
$$P \dots z_P = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$
$$E \dots z_E = a$$
$$H \dots z_H = a + b$$
$$F \dots z_F = a + ai$$
$$I \dots z_I = a + b + bi$$
$$K \dots z_K = 1 + (1 - a - b)i$$
$$S \dots z_S = \frac{z_A + z_F}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}ai$$
$$Q \dots z_Q = \frac{z_E + z_I}{2} = \frac{a+a+b+bi}{2}$$
$$= a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}i$$
$$R \dots z_R = \frac{z_H + z_K}{2} = \frac{a+b+1+(1-a-b)i}{2}$$
$$= \frac{a+b+1}{2} + \frac{1-a-b}{2}i.$$




Dužinama $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ pripadaju kompleksni brojevi:

$$\overline{PQ} \dots z_{PQ} = z_Q - z_P = a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}i - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)$$
$$= \left(a + \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{b+1}{2}i,$$

$$\overline{RS}\ldots z_{RS}=z_S-z_R=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}ai$$
$$-\left(\frac{a+b+1}{2}+\frac{1-a-b}{2}i\right)$$
$$=-\frac{b+1}{2}+\left(a+\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\right)i,$$
$$z_{PQ}\cdot i=-\frac{b+1}{2}+\left(a+\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\right)i=z_{RS}$$
$$\Longrightarrow z_{PQ}\perp z_{RS}\quad \text{i}\quad |PQ|=|RS|.$$

*Ur.*

## D) Rješenja iz fizike

**OŠ – 362.** *Učenik je u metalnu posudu ulio 5 $cm^3$ 70-postotnog alkohola i zapalivši ga zagrijao 2 decilitra vode u vatrostalnoj čaši zanemarive mase. Voda se ugrijala od 20 °C na 28 °C. Izgaranjem jednog grama alkohola oslobodi se 30 kJ topline. Gustoća alkohola je 800 $kg/m^3$, a vode 1000 $kg/m^3$. Kolika je korisnost ovakve "grijalice"? Specifični toplinski kapacitet vode je 4200 $J/kg\,°C$.*

*Rješenje.*

$V_{alk}=0.7\cdot 5\text{ cm}^3=3.5\text{ cm}^3$

$V_{vode}=2\text{ dl}=0.2\text{ l}=200\text{ cm}^3$

$t_p=20\,^\circ\text{C}$

$t_k=28\,^\circ\text{C}$

$q=30\text{ kJ/g}$

$\rho_{alk}=800\text{ kg/m}^3$

$\underline{\rho_{vode}=1000\text{ kg/m}^3}$

$\eta=?$

$\Delta t=t_p-t_k=8\,^\circ\text{C}$

$$\begin{aligned}m_{alk}&=\rho\cdot V\\&=0.8\text{ g/cm}^3\cdot 3.5\text{ cm}^3\\&=2.8\text{ g}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_{uk}&=m\cdot q\\&=2.8\text{ g}\cdot 30\text{ kJ/g}=84\text{ kJ}=84\,000\text{ J}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_v&=\rho\cdot V\\&=1\text{ g/cm}^3\cdot 200\text{ cm}^3=200\text{ g}=0.2\text{ kg}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_k&=c\cdot m\cdot\Delta t\\&=4200\text{ J/kg}\,^\circ\text{C}\cdot 0.2\text{ kg}\cdot 8\,^\circ\text{C}=6720\text{ J}\end{aligned}$$

$$\eta=\frac{Q_k}{Q_u}=\frac{6720\text{ J}}{84\,000\text{ J}}=0.08=8\%.$$

*Lucija Matić (8),*
*OŠ Mate Lovraka, Zagreb*

**OŠ – 363.** *Bronca je legura bakra i kositra, ali može sadržavati i druge metale. Tvrđa je od bakra i otpornija na koroziju pa je zahvaljujući tome poznati kip Apoksiomena, otkriven 1998. godine, "preživio" boravak pod morem koji je trajao više od 2000 godina. Masa Apoksiomena je oko 300 kilograma. Pretpostavimo da bronca od koje je napravljen sadrži 90 posto bakra i 10 posto kositra. Zamislimo da su bakar i kositar od kojih se pravila bronca za izradu kipa bili u obliku kocke. Koliki bi bili bridovi tih kocki? Gustoća bakra je 8920 $kg/m^3$, a gustoća kositra 7280 $kg/m^3$.*

*Rješenje.*

$m=300\text{ kg}$

$m_b=0.9\cdot 300\text{ kg}=270\text{ kg}$

$m_k=0.1\cdot 300\text{ kg}=30\text{ kg}$

$\rho_b=8920\text{ kg/m}^3$

$\underline{\rho_k=7280\text{ kg/m}^3}$

$a_b,\ a_k=?$

$$V_b=\frac{m_b}{\rho_b}=\frac{270\text{ kg}}{8920\text{ kg/m}^3}=0.03\text{ m}^3$$

$$a_b=\sqrt[3]{\frac{V_b}{\rho_b}}=0.31\text{ m}=31\text{ cm}$$

$$V_k=\frac{m_k}{\rho_k}=\frac{30\text{ kg}}{7280\text{ kg/m}^3}=0.00412\text{ m}^3$$

$$a_k=\sqrt[3]{\frac{V_k}{\rho_k}}=0.16\text{ m}=16\text{ cm}$$

*Klara Dorešić (8),*
*OŠ Mate Lovraka, Zagreb*

**OŠ – 364.** *Na jednoj strani nepomične koloture je drveni kvadar dimenzija 10 cm × 25 cm × 4 cm koji kliže po stolu, a na drugoj uteg mase 200 grama koji pada stalnom brzinom. Koliki je faktor trenja između kvadra i stola? Gustoća drva je 800 $kg/m^3$.*

*Rješenje.*

$a = 10$ cm

$b = 25$ cm

$c = 4$ cm

$m_u = 200$ g $= 0.2$ kg

$v =$ konst.

$\underline{\rho = 800 \text{ kg/m}^3}$

$\mu = ?$

$V_k = a \cdot b \cdot c$

$V_k = 10 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 1000 \text{ cm}^3$

$$\begin{aligned} m_k &= \rho \cdot V_k \\ &= 0.8 \text{ g/cm}^3 \cdot 1000 \text{ cm}^3 = 800 \text{ g} = 0.8 \text{ kg} \end{aligned}$$

$v = \text{konst.} \implies F_{tr} = G_u$

$\mu \cdot m_k \cdot g = m_u \cdot g$

$$\mu = \frac{m_u}{m_k} = \frac{0.2 \text{ kg}}{0.8 \text{ kg}} = 0.25.$$

*Klara Dorešić (8), Zagreb*

**OŠ – 365.** *Izračunaj pad napona na svakom od tri serijski spojena otpornika kojima su otpori* 10 Ω, 20 Ω *i* 30 Ω *kad su oni spojeni na izvor napona 15 volti.*

*Rješenje.*

$R_1 = 10\ \Omega$

$R_2 = 20\ \Omega$

$R_3 = 30\ \Omega$

$\underline{U = 15 \text{ V}}$

$U_1,\ U_2,\ U_3 = ?$

$R = R_1 + R_2 + R_3$

$R = 10\ \Omega + 20\ \Omega + 30\ \Omega = 60\ \Omega$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{15 \text{ V}}{60\ \Omega} = 0.25 \text{ A}$$

$I = I_1 = I_2 = I_3$

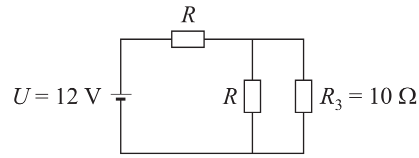
$U_1 = I \cdot R_1 = 0.25 \text{ A} \cdot 10\ \Omega = 2.5 \text{ V}$

$U_2 = I \cdot R_2 = 0.25 \text{ A} \cdot 20\ \Omega = 5 \text{ V}$

$U_3 = I \cdot R_3 U_3 = 0.25 \text{ A} \cdot 30\ \Omega = 7.5 \text{ V}.$

*Lucija Matić (8), Zagreb*

**1539.** *Dva jednaka otpornika nepoznatog otpora $R$ spojena su s trećim $R_3 = 10\ \Omega$ u strujni krug na slici. Odredi $R$ ako kroz $R_3$ teče struja 0.2 A. Kolika maksimalna struja može teći kroz $R_3$ u ovisnosti od $R$?*




*Rješenje.* Kako struja $I_3 = 0.2$ A teče kroz otpornik $R_3 = 10\ \Omega$ daje napon $U_3 = I_3 R_3 = 2$ V. Tada su naponi na otpornicima $R$ redom 10 V i 2 V, pa kroz gornji otpornik teče pet puta jača struja nego kroz drugi. Imamo dakle:

$$\begin{aligned} I_1 &= 5I_2 \\ I_1 &= I_2 + 0.2 \text{ A}. \end{aligned}$$

Odatle je $4I_2 = 0.2$ A, $I_2 = 0.05$ A, što iz $R = U_2/I_2$ daje $R = 40\ \Omega$. Ako smanjujemo $R$, struja kroz $R_3$ raste:

$$I_3 = \frac{6 \text{ V}}{R/2 + R_3},$$

pa je najveća za $R \to 0$, što za bateriju daje kratak spoj, a struja kroz $R_3$ iznosi 0.6 ampera.

*Ur.*

**1540.** *Element tehnecij nema niti jedan stabilan izotop. Najdulje živući, $^{97}Tc$ ima vrijeme poluraspada 4.21 milijun godina. Odredi aktivnost (u raspadima u sekundi = Bq) jednog miligrama tog izotopa.*

*Rješenje.* Broj neraspadnutih atoma ovisno o proteklom vremenu određen je zakonom radioaktivnog raspada:

$$N(t) = N_0 2^{-\frac{t}{T}},$$

gdje je $T$ vrijeme poluraspada, a $N_0$ broj atoma u trenutku $t = 0$. Promjena broja atoma je

$$dN(t) = N_0 2^{-\frac{t}{T}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{-1}{T}\, dt,$$

Što određuje aktivnost kao kvocjent

$$A = \frac{-dN}{dt} = \frac{N}{T} \cdot \ln 2.$$

Uvrštavanjem

$$\begin{aligned} N &= \frac{m}{M} N_A = \frac{0.001\text{g}}{97\text{g/mol}} 6.022 \cdot 10^{23} \text{mol}^{-1} \\ &= 6.208 \cdot 10^{18} \text{ atoma} \end{aligned}$$

i

$$T = 4.21 \cdot 10^6 \cdot 365.25 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}$$
$$= 1.3286 \cdot 10^{14} \text{ s}$$

dobijemo

$$A = 32\,390 \text{ Bq} \quad (\text{raspada}/\text{s}).$$

*Ur.*

**1541.** *U volumenu 2 litre nalazi se mješavina 2 grama kisika i 1 grama helija. Srednja brzina atoma helija veća je za 787 m/s od srednje brzine molekula kisika. Odredi temperaturu i tlak mješavine.*

*Rješenje.* U idealnom plinu srednje brzine molekula ovise o temperaturi i molekulskoj masi:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Zadana razlika srednjih brzina je

$$787 \text{ m/s} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi}} \left( \frac{1}{\sqrt{M_{He}}} - \frac{1}{\sqrt{M_{O_2}}} \right)$$
$$787^2 = \frac{8RT}{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{0.004}} - \frac{1}{\sqrt{0.032}} \right)^2.$$

Odatle (uz $R = 8.314 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$) imamo $T = 280$ K. Množine kisika i helija iznose

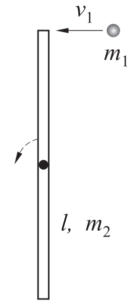
$$n_{O_2} = \frac{m}{M} = \frac{2 \text{ g}}{32 \text{ g/mol}} = 0.0625 \text{ mol}$$
$$n_{He} = \frac{1 \text{ g}}{4 \text{ g/mol}} = 0.25 \text{ mol},$$

pa je ukupna množina $n = 0.3125$ mola. Tlak odredimo iz plinske jednadžbe (volumen izrazimo u $\text{m}^3$):

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{0.3125 \cdot 8.314 \cdot 280}{0.002}$$
$$= 363\,760 \text{ Pa}.$$

*Ur.*

**1542.** *Kuglica mase $m_1 = 0.4$ kg brzinom $v_1 = 1.2$ m/s udara u jedan kraj štapa mase $m_2 = 2$ kg duljine $l = 80$ cm koji je učvršćen u težištu tako da može slobodno rotirati. Sudar je idealno elastičan. Odredi kutnu brzinu štapa i brzinu kuglice nakon sudara.*




*Rješenje.* Ako s $\omega$ označimo kutnu brzinu štapa, a s $u_1$ brzinu kuglice nakon sudara, očuvanje energije u sudaru daje uvjet:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

gdje je $I = m_2 l^2/12$ moment tromosti štapa oko težišta. Očuvanje zamaha (momenta impulsa) oko težišta štapa daje

$$m_1 v_1 \frac{l}{2} = m_1 u_1 \frac{l}{2} + I\omega.$$

Preuredimo jednadžbe:

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = I\omega^2$$
$$m_1(v_1 - u_1) = \frac{2I\omega}{l}.$$

Dijeljenjem dobivamo

$$v_1 + u_1 = \frac{l\omega}{2}.$$

Iz druge jednadžbe je

$$u_1 = v_1 - \frac{2I\omega}{m_1 l}.$$

Dakle

$$2v_1 = \frac{l\omega}{2} + \frac{2I\omega}{m_1 l}$$
$$2v_1 = \omega\left(\frac{l}{2} + \frac{2I}{m_1 l}\right).$$

Konačno

$$\omega = \frac{2v_1}{\frac{l}{2} + \frac{2I}{m_1 l}} = 2.25 \text{ rad/s},$$
$$u_1 = \frac{l\omega}{2} - v_1 = -0.3 \text{ m/s}.$$

*Ur.*

**1543.** *Pri mjerenju temperature i vlage, izmjereno je $T = 15\,^\circ C$ i relativna vlažnost 60%. Odredi tlak vodene pare i temperaturu rosišta. Povezanost tlaka zasićene vodene pare*

*(100% relativne vlažnosti) i temperature dana je izrazom (Antoineova jednadžba)*

$$p = 10^{(A-B/(C+T))},$$

*gdje je $p$ tlak u Pascalima, $T$ je temperatura u Celzijevim stupnjevima, a konstante $A$, $B$ i $C$ iznose*

$$A = 10.1932,\ B = 1730.63,\ C = 233.426.$$

*Rješenje.* Za $T = 15\,^\circ\mathrm{C}$ uvrštavanjem u $p = 10^{(A-B/(C+T))}$ dobivamo da je tlak zasićene vodene pare $p = 1685.86$ Pa. Uz relativnu vlažnost 50% izmjereno stanje daje tlak $p = 842.93$ Pa. Da bi odredili temperaturu rosišta, temperaturu na kojoj taj tlak čini zasićenu vodenu paru, uvrstimo $p = 842.93$ Pa na lijevu stranu Antoineove jednadžbe i riješimo ju po $T$. Dobivamo $T = 4.71\,^\circ\mathrm{C}$.

*Ur.*

**1544.** *Mikroskop uvećava sliku 150 puta, uz objektiv jačine +150 dpt i okular žarišne daljine 4 cm. Odredi udaljenost objektiva i okulara (duljinu tubusa). Za daljinu jasnog vida oka uzimamo 25 cm.*

*Rješenje.* Uvećanje okulara određuje omjer daljine jasnog vida i njegove žarišne daljine:

$$m_o = \frac{25\ \mathrm{cm}}{4\ \mathrm{cm}} = 6.25.$$

Dijeljenjem ukupnog uvećanja s uvećanjem okulara dobivamo uvećanje objektiva:

$$m_{obj} = \frac{M}{m_o} = \frac{150}{6.25} = 24.$$

Jednadžba leće i izraz za uvećanje nam tada određuju udaljenost predmeta i slike od objektiva:

$$J_1 = 150 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}$$

$$b_1 = 24a_1.$$

Rješavanjem dobivamo $a_1 = 1/144$ m i $b_1 = 1/6$ m. Duljina tubusa mora biti jednaka zbroju $b_1$ i $a_2$, to jest $b_1 + a_2 = 16.67 + 4 = 20.67$ cm.

*Ur.*

**1545.** *Odredi ubrzanje sile teže na Jupiterovom ekvatoru i na polovima. Koristi sljedeće podatke: masa Jupitera iznosi $1.8986 \cdot 10^{27}$ kg, radijus na ekvatoru 71 492 km, radijus prema polu 66 854 km, period rotacije 9.925 sati.*

*Rješenje.* Uz aproksimaciju izotropnog gravitacijskog polja, ubrzanje na polovima je

$$g_p = \frac{Gm_J}{r_p^2} = 28.334\ \mathrm{m/s^2}.$$

Analogno, gravitacijsko polje na ekvatoru je

$$g_e = \frac{Gm_J}{r_e^2} = 24.777\ \mathrm{m/s^2},$$

no od toga još valja oduzeti centrifugalno ubrzanje. Ono iznosi

$$a_c = \omega^2 r_e = \frac{4\pi^2}{T^2} r_e = 2.211\ \mathrm{m/s^2},$$

pa je ukupna sila teže na ekvatoru jednaka

$$g_e' = g_e - a_c = 22.566\ \mathrm{m/s^2}.$$

*Ur.*