Neka su a, b, c od nule različiti realni brojevi takvi da je $a+b+c=0$ i $a^3+b^3+c^3=a^5+b^5+c^5$. Odredi $a^2+b^2+c^2$.

Prvo rješenje. Kvadriranjem jednakosti $a+b=-c$, nakon sređivanja dobijemo

$$a^2+b^2=c^2-2ab. \tag{1}$$

Kubiranjem jednakosti $a+b=-c$, nakon sređivanja dobiva se

$$a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b). \tag{2}$$

Iz pete potencije jednakosti $a+b=-c$, nakon sređivanja imamo

$$a^5+b^5+c^5=-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3). \tag{3}$$

Iz (2), (3) i (1) dobivamo

$$\begin{aligned}
-3ab(a+b)&=-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)\\
3(a+b)&=5[a^2(a+b)+b^2(a+b)+ab(a+b)]\\
a^2+b^2+ab&=\frac{3}{5}\\
a^2+b^2&=\frac{3}{5}-ab\ =\ c^2-2ab\\
c^2&=\frac{3}{5}+ab.
\end{aligned}$$

Odavde imamo

$$a^2+b^2+c^2=\frac{3}{5}-ab+\frac{3}{5}+ab=\frac{6}{5}.$$

Drugo rješenje. Iz $a+b+c=0$ dobivamo $a^3+b^3+c^3=3abc$ i $a^5+b^5+c^5=5abc(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$.

Iz ovih jednakosti imamo

$$3abc=5abc(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca),$$

tj.

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{3}{5},$$

jer su a, b, c brojevi različiti od nule. Odavde dobivamo

$$\frac{1}{2}[(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2]=\frac{3}{5},$$

i na kraju ponovo zbog $a+b+c=0$ imamo $a^2+b^2+c^2=\dfrac{6}{5}$.

Knjigom su nagrađeni rješavatelji:

1. *Sara Džebo* (2), Peta gimnazija, Sarajevo, BiH; 2. *Amina Helać* (4), Peta gimnazija, Sarajevo, BiH; 3. *Halil Lačević* (1), Tursko-bosanski Sarajevo College, Sarajevo, BiH; 4. *Petar Orlić* (2), XV. gimnazija, Zagreb; 5. *Zlatko Petolas* (1), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb.

Riješili zadatke iz br. 4/252

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Sara Džebo* (2), Peta gimnazija, Sarajevo, BiH, 3376, 3379, 3383; *Amina Helać* (4), Peta gimnazija, Sarajevo, BiH, 3376–3378, 3383; *Halil Lačević* (1), Tursko-Bosanski Sarajevo College, Sarajevo, BiH, 3375–3377, 3379, 3381–3383, 3387; *Petar Orlić* (1), XV. gimnazija, Zagreb, 3375–3377, 3379–3383, 3385, 3387.

b) Iz fizike: *Klara Dorešić* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 362–365; *Lucija Matić* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 362–365.

Nagradni natječaj br. 206

Odredi sve prirodne brojeve a i b takve da je broj $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ racionalan.