Anali, sv. 24—25/1987, str. 33—62

Izvorni znanstveni članak
UDK 51((091) »16«:929 Gradić
Članak primljen 24. II 1981.

Zdravko Faj
Osijek, N. Demonje 8

MIŠLJENJA STJEPANA GRADIĆA O NEKIM PITANJIMA MATEMATIKE

1. UVOD

Dubrovčanin Stjepan Gradić (1613—1683) primjer je erudita 17. stoljeća, velike širine interesa, od povijesnih pitanja, pjesništva, lingvistike i diplomacije, pa do filozofije, matematike, astronomije i fizike. Po završetku osnovnog školovanja u Dubrovniku od 1629. godine nastavlja studije u Rimu, gdje već 1634. godine na fakultetu »Sapienza« stječe doktorat filozofskih i prirodnih znanosti ([4], str. 139). Iz tog je vremena[1] i njegov prvi tiskani rad »Peripateticae philosophiae...« [1], u kojem izlaže Aristotelovu filozofiju, koja je, što se iz toga rada može zaključiti, bila temelj nastave isusovačkog zavoda u kojem se Gradić školovao. Zato se taj rad ne može smatrati pogodnim za procjenu Gradićeva osobnog stava u odnosu na shvaćanje u matematici i njegove prirodoslovne orijentacije, nego je odraz školskog sustava u kojem se Gradić školovao ([3], str. 485). Bez obzira na shvaćanja koja se javljaju u tom radu, a koja su već tada bila bitno poljuljana novim shvaćanjima što se javljaju u Galileievim radovima, on pokazuje Gradićev interes za probleme prirodnih znanosti i matematike. Po ponovnom dolasku u Rim na studij teologije (1638. god.) počinje se u krugu matematičara koji su se okupljali u Rimu baviti problemima geometrije. Nakon dolaska švedske kraljice Kristine u Rim i formiranja njezina znanstvenog kruga (1656. god.) bavi se i drugim prirodoznanstvenim problemima. Uz zastupanje Dubrovačke Republike, bavljenje latinskim pjesništvom i drugim, Gradić u spomenutom krugu raspravlja o mnogim prirodoznanstvenim problemima, sada već s potpuno izgrađenim osobnim stavovima, bitno novim, na temelju Galileieve nauke. Rezultat toga su i njegove četiri disertacije [5], koje su nastale, kako se to vidi iz korespodencije s H. Fabrijem i M. A. Riccijem, do 1660. godine. No, objavljene su tek 1680. godine (u Amsterdamu), te je zbog toga i njihov odjek bio slabiji. Područje Gradićeva interesa u fizici i matematici vrlo je široko. U mnoštvu rasprava i korespodenciji s tada najpoznatijim matematičarima i fizičarima, koja je sačuvana u Gradićevu manuskriptu [6], nalazimo njegova mišljenja o mnogim tada aktualnim problemima. Tako s M. A. Riccijem raspravlja o problemima analize i algebre, s A. Borellijem o problemima gibanja i upravljanja broda kormilom, s H. Fabrijem o slobodnom padu, indi-

[1] Rad nema naznačenu godinu izdanja. Đ. Kölbler pretpostavlja da je tiskan neposredno nakon što je Gradić završio filozofiju, tj. godine 1634. ([2], str. 4).

vizibilima, te o problemima probabilizma. I u moralno-teološke rasprave unosi svoja shvaćanja zasnovana na prirodoznanstvenim pogledima i matematici. S poznatim talijanskim matematičarom V. Vivianijem raspravlja o geometrijskoj metodi i restauraciji izgubljenih radova starogrčkog geometra Aristaeusa.

Osim svega toga, treba istaknuti da je rad S. Gradića na tom području malo poznat. Tako npr. J. E. Hofmann u radu u kojem analizira prinos M. A. Riccija [33] ističe da je Ricci svoju »Geometrica exercitatio« posvetio S. Gradiću, smatrajući ga sposobnim da o tom radu da svoj sud. Pri tome Hofmann ističe, prema Riccijevim pohvalama, velik ugled što ga je u to vrijeme uživao S. Gradić u znanstvenom krugu u kojem je djelovao. Međutim, J. E. Hofmann dodaje i svoj komentar, u kojem ističe da je Gradić na tom području mogao ipak imati samo periferan utjecaj ([33], str. 143—144).

U ovom radu analizirat ću samo neke stavove vezane uz Gradićev matematički rad, koji su ostali zabilježeni u njegovu rukopisu [6]. Taj rukopis nalazi se sačuvan u Vatikanskoj biblioteci.

2. MATEMATIČKI RAD STJEPANA GRADIĆA ZA STUDIJA TEOLOGIJE U RIMU

O Gradićevu matematičkom i prirodoznanstvenom radu sve do formiranja znanstvenog kruga švedske kraljice Kristine poznato je vrlo malo. No, neki detalji iz njegova manuskripta [6] upućuju na to da se, nakon ponovnog dolaska u Rim na studij teologije, bavio geometrijom. Vjerojatno se uključio u krug matematičara koji su se okupljali oko Rimskog kolegija.

2.1. **Odnos Torricelli-Prodanelli-Gradić i kvadratura parabole**

U Gradićevu manuskriptu ([6], str. 1d—5d) među mnogim rukopisima i pismima nalaze se dva broja koja su za ovu raspravu vrlo važna. Prvo je uputio Raffaello Prodanelli[2] nenavedenom primaocu (Fabriano, 30. srpnja 1640. god.), a drugo Torricelli Prodanelliju. Oba pisma spominje M. D. Grmek ([10], str. 184) u namjeri da pokaže kako se već i mladi Prodanelli interesirao za egzaktne znanosti. Grmek navodi da je u ljeto 1640. godine Prodanelli izmijenio nekoliko pisama sa slavnim znanstvenikom Torricellijem, koji mu odgovara iz Rima. U spomenutoj korespodenciji, navodi Grmek, taj dubrovački isusovac nije bio pravi poznavalac navedenog problema, već je bio posrednik između Torricellija i nekog »Signor Secretario«, čiji identitet, zaključuje Grmek, nije poznat. Međutim, neke činjenice upućuju na to da je R. Prodanelli svoje pismo otposlao S. Gradiću, koji se tada nalazio u Rimu, a ne Torricelliju. Na taj zaključak, između ostalog, upućuje i list papira iz manuskripta ([6], str. 7), vjerojatno omot pisma na kojem je Prodanelli ispisao Gradićevu adresu u Rimu. U tom pismu Prodanelli izražava zadovoljstvo što se rješenje problema koje je dao primalac sviđa nekoj trećoj osobi, koju Prodanelli imenuje kao »Signor Secretario«. Identitet te osobe može se odrediti iz jednog biografskog podatka o E. Torricelliju koji nalazimo u »Documenta alla vita« ([11], tom 4, str. 83).

[2] Dubrovačkog isusovca Rafu Prodanellija spominje i Ž. Dadić ([9], str. 42 i 48), navodeći da je u Gradićevu manuskriptu sačuvano jedno Prodanellijevo pismo. Spominje ga i u vezi s teleskopom koji je Prodanelli poslao u Dubrovnik.

Naime, iz tog se podatka može zaključiti da u navedeno vrijeme Torricelli nije bio u Rimu, nego u Fabrianu, gdje se nalazio i Prodanelli. Torricelli je bio od proljeća 1640. godine pa sve do veljače 1641. godine u Fabrianu u svojstvu sekretara, tj. »secretario di Mons. Ciampoli«. Drugo je pismo iz manuskripta ono pismo Torricellija upućeno Prodanelliju. O tome da je upućeno Prodanelliju nema sumnje jer je Torricelli na posebnom listu označio primaoca, na kraju pisma naveo i nadnevak 11. srpnja 1640. godine, ali ne i mjesto odakle je upućeno. Iz sadržaja pisma može se zaključiti da se ono preko Prodanellija odnosi na treću osobu, koju Torricelli ne imenuje. Radi se o određivanju sume beskonačno mnogo dužina koje se preslikavaju na konačnu dužinu, što se može iskoristiti za određivanje kvadrature parabole. To je, kako navodi Torricelli, nov postupak u odnosu na Arhimedovu kvadraturu, koji je svoj dokaz izveo svođenjem na apsurd. Torricelli ocjenjuje da je to jedna od varijanti rješenja, pa kao stimulans za nastavak rada prilaže i svoj dodatak u kojem postavlja još nekoliko sličnih problema za rješavanje. Iz pisma se može zaključiti da je Torricellijev odnos prema osobi na koju se pismo odnosi kao odnos učitelja prema učeniku. Po mojemu mišljenju navedene Torricellijeve primjedbe odnose se na Gradićev rad. Naime, u njegovu manuskriptu ([6], str. 7—11 i 227d) nalazimo više pokušaja rješavanja navedenog problema. Navedeni pokušaji ne zasnivaju se direktno na dodatnom Torricellijevu listu, te je vjerojatno da ih je Gradić uradio prije no što je dobio pismo od Prodanellija. Postoji mogućnost da je kopija Gradićevih rješenja bila i kod Torricellija, te da se Torricellijeve primjedbe odnose na taj dio Gradićeva rada. Naime, primjedbe koje spominje Prodanelli u pismu Gradiću što ih je dao »Signor Secretario«, a i Torricelijeve primjedbe upućene Prodanelliju, odnose se na isti problem. Te su primjedbe povoljne, i kao što Torricelli u pismu navodi, rješenje problema samo je jedna od mogućih varijanti rješenja. Torricellijevo pismo je datirano nekoliko tjedana prije od Prodanellijeva pisma Gradiću. To rješava i pitanje kako se Torricellijevo pismo Prodanelliju našlo u Gradićevu manuskriptu. Naime, može se pretpostaviti da se Prodanelli obratio Torricelliju u Gradićevo ime i dao mu Gradićeva rješenja. Torricelli je tada dao svoje primjedbe na taj rad, kao i dodatne upute, a Prodanelli je Torricellijevo pismo i dodatni list zajedno sa svojim pismom poslao Gradiću. Da su Prodanelli i Torricelli bili u prijateljskim odnosima, svjedoči i jedno Torricellijevo pismo nekom V. Renieriju u Pizi u kojem, pišući iz Firence 17. studenog 1646. godine, imenuje Prodanellija svojim prijateljem[3]. Poznanstvo i eventualno prijateljstvo Gradića i Prodanellija također je moguće. Mogli su se sprijateljiti još u Dubrovniku (naime Prodanelli je samo dvije godine mlađi od Gradića), a mogli su se i ponovno sresti na studiju u Rimu. Prodanelli je studirao filozofiju i retoriku u Collegiumu Romanumu od 1634. do 1639. godine ([10], str. 183—184), a Gradić se poslije završenog prava u Bolonji ponovo od 1638. godine našao na studiju teologije u Rimu. Iz istog je vremena interesantno i jedno Torricellijevo pismo upućeno matematičaru B. Castelliju u Rim ([11], tom III, str. 40—42), pisano u Fabrianu 11. lipnja 1640. godine. U njemu Torricelli spominje probleme koje rješavaju isusovci u Fabrianu, međutim, navodi Torricelli, oni neće da kažu otkud potječu ta rješenja ... a možda su se našla i kod vas (misli na Castellija). Taj podatak pokazuje da je Torricelli u službi svojega zaštitnika pomagao u rješavanju problema

[3] Torricelli piše: »Hebbi giovedi sera l'inclusa Proposta fattami dai Matematici del Collegio Romano per via di un loro P.re Raffaello Prodanelli mio amico« ([11], tom III, str. 421—423).

isusovcima u Fabrianu. Interesantno je da dva problema koja je Torricelli priložio pismu Castelliju nalazimo i u Gradićevu manuskriptu, doduše nešto drugačije riješena ([6], str. 45 d). Da je i Gradić poznavao Castellija, a možda i slušao njegova predavanja, može se zaključiti iz Gradićeva objavljenog rada ([12], str. 23), u kojem polemizira s H. Fabrijem o tzv. probabilizmu[4]. Naime, Gradić kao primjer navodi svoje sjećanje na odličnog geometra B. Castellija, koji je isticao razliku u dokazima koje izvode pravnici i matematičari (geometri). Ti potonji svoje dokaze grade na unaprijed propisanim definicijama koje su od svih prihvaćene[5] i iz kojih dalje, kako napreduje postupak dokazivanja, izvode zaključke, za razliku od pravnika, koji ih se ne pridržavaju (gaze ih).

Problem kvadratura vrlo je stari problem. O tome kako je Arhimed došao do površine segmenta parabole saznajemo iz jednog Arhimedova pisma Eratostenu[6]. U njemu Arhimed navodi da su mnogi i prije njega pokušali odrediti (pronaći) pravocrtni lik koji je jednak površini kružnice, elipse itd., no misli da je prvi odredio površinu segmenta parabole dokazujući da je jednaka s 4/3 površine trokuta koji sa segmentom ima jednaku bazu i visinu ([13], str. 38). Do tog rezultata Arhimed je došao na dva načina. U prvom se koristi zakonima mehanike i shvaćanjem da je površina sastavljena od crta. U drugom, čisto geometrijskom, koristi se metodom iscrpljivanja, te dokazuje da razlika površine segmenta parabole i upisanog lika[7] u n-tom koraku može postati manja od unaprijed zadane veličine. Povećanjem broja koraka »n«, P_n se po volji malo razlikuje od $B = 4/3P_1$. Konačno, u posljednjem koraku Arhimed dokazuje, metodom svođenja na apsurd, da je površina segmenta parabole $P = B$ ([15], str. 103 i [14], vol. II, str. 679). Iz toga se može zaključiti da je površina segmenta parabole za Arhimeda jednaka sumi od beskonačno mnogo članova, no Arhimed to nije povezao sa sumom beskonačnog reda, jer beskonačni proces u njegovo vrijeme nije bio matematički korektan. Umjesto toga Arhimed je dokaz proveo dvostrukim »reductio ad absurdum«, tj. pokazao je da P ne može biti ni veća ni manja od 4/3 P_1 ([16], str. 142—143). Među Arhimedovim sljedbenicima istaknuto je mjesto imao L. Valerio, koji je između ostalog u Rimu 1606. godine objavio rad o kvadraturi parabole [17] upotrebljavajući istu metodu koju nalazimo već kod Arhimeda ([14], str. 685). E. Torricelli je u radu

---

[4] U toj raspravi Gradić se suprotstavlja probabilizmu koji su zastupali isusovci, a prema kojem ako se ne zna da li je nešto dopušteno ili nije, te se može slijediti i manje pouzdano mišljenje, samo ako se može opravdati, iako se protivno mišljenje može i bolje opravdati. Gradić ističe da u matematičkim dokazima ne postoji takva mogućnost, pa među matematičarima i ne dolazi do nesporazuma, koji su, naprotiv, kod pravnika vrlo česti.

[5] Već je i Aristotel postavio zahtjev da se znanstveni iskazi svedu na očigledne. Polazio je od mišljenja da u svim znanstvenim područjima postoje sudovi koji obrazloženje nose »sami u sebi« zbog svoje očiglednosti. Realizacija toga bili su Euklidovi »Elementi«, koji su još u Gradićevo vrijeme bili rijedak primjer aksiomatskog zasnivanja znanosti.

[6] Arhimedov rukopis, često navođen pod naslovom »Metoda«, otkrio je prof. Heiberg 1906. godine u Carigradu ([14], str. 681).

[7] Arhimed nad osnovicom segmenta parabole upisuje trokut ASB. Tangenta u točki S paralelna je s bazom AB. Ako se postupak ponovi, tj. stranice trokuta AS i SB raspolove i povuku dijametri itd., dobiju se dva trokuta AS_1S i SS_2B. Suma površina tih trokuta jednaka je četvrtini trokuta ASB itd. Ako površinu prvog trokuta označimo s P_1, tada je prema Arhimedu površina segmenta parabole jednaka sumi površina trokuta:

$$P_1 + \frac{1}{4} P_1 + (\frac{1}{4})^2 P_1 + \dots .$$

»De dimensione parabolae« ([11], tom I, sv. 1) dao čak 21 različit dokaz za kvadraturu parabole. Pritom se gotovo podjednako koristio metodom iscrpljivanja i u to vrijeme vrlo raširenom metodom indivizibila. Tako se u svojim kvadraturama parabole koristi i »per novam Indivisibilium Geometriam«, ističući prednosti te metode u odnosu na metodu »starih« (str. 139). Tako je jedno od rješenja vrlo slično s »mehaničkom kvadraturom«, koju nalazimo u spomenutom Arhimedovu rukopisu (Metoda), koji je pronađen tek 1906. godine. Inače, to Arhimedovo pismo dokazuje da se i Arhimed koristio tada nepriznatim metodama, a tek kada je doznao rezultat, tražio je i korektan geometrijski dokaz.

Među mnogima i Gradića je interesirao dokaz da je površina segmenta parabole jednaka s 4/3 površine trokuta s kojim ima jednaku bazu i visinu. Njegovi pokušaji rješavanja tog problema odnose se na primjenu beskonačnoga geometrijskog reda. Već je rečeno da je taj problem slično rješavao i Arhimed, no on to nije vezao sa sumom beskonačnog reda jer takav proces u njegovo vrijeme nije bio prihvatljiv. Slične probleme nalazimo i u radovima Oresmea, Viete, Torricellija, Gregoirea S. Vincenta i drugih. U Gradićevu manuskriptu nalazimo više primjera u kojima se bavi tom problematikom. Tako je npr. jedan od problema ([6], str. 11) dokaz da je suma beskonačno mnogo dužina koje počinju zadanom dužinom AB, a koje su zadane omjerom R:S i pritom je uvijek omjer veće dužine prema manjoj, jednaka jednoj konačnoj dužini. Neka su AB, CD, QE, IF ... beskonačno mnogo dužina koje su određene zadanom prvom dužinom i omjerom R:S, tj. AB:CD = CD:QE = ... = R:S. Ako se na pravcu BN u točki B podigne okomica AB, zatim od B nanese dužina BD = AB i u točki D podigne okomica CD, te spoji A s C i produži do presjecišta s pravcem BN u točki L, tada je, dokazuje Gradić, dužina BL jednaka traženoj sumi od beskonačno mnogo zadanih dužina. Dokaz izvodi transformacijama zadanog razmjera i razmjera koji slijedi iz sličnosti trokuta. Naime, ako je AB = BD, tada je i DE = CD, a zatim i QF = EF itd., te uvijek svakoj dužini iz zadanog niza AB, CD, EQ ... odgovara jednaka dužina, tj. BD, DE, EF ..., pa je i suma beskonačno mnogo dužina koje počinju zadanom dužinom AB i zadane su omjerom R:S jednaka konačnoj dužini BL. Ovdje se očito radi o sumi beskonačnoga geometrijskog reda.[8]

U dodatku Torricellijeva pisma Prodanelliju, koji je po našoj pretpostavci bio namijenjen Gradiću, nalazi se nekoliko zadataka za rješavanje, koji se također mogu svesti na određivanje sume beskonačnoga geometrijskog reda. Tako npr. u prvom ([6], str. 3) treba dokazati da je suma beskonačno mnogo dužina AB, CD, EF ..., ako je AB:CD = BG:GA = CD:EF = ..., jednaka dužini BG (BG = GA + AB). I u mnogim drugim radovima iz tog vremena nalazimo slične primjere. Tako u radu H. Fabrija »De maximis et minimis in infinitum ...«, objavljenom 1658/9. godine ([18], str. 52), nalazimo zadatak[9] koji Fabri rješava slično kao i Gradić. Naime, treba dokazati da je suma beskonačno mnogo dužina EF, KH ... jednaka dužini GQ. Fabri uzima da je EF = EG i EF postavlja okomito na EG. Spaja G s F i povlači paralele GF || EH || KL itd.

---

[8] BL = BD + DE + EF + ... Iz AB:CD = BD:DE = k slijedi da je $DE = \frac{1}{k}BD$, $EF = \frac{1}{k^2}BD$, itd., pa je $BL = AB \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^n}$, a budući da je $k > 1$ (zadan je omjer veće dužine prema manjoj), beskonačni geometrijski red konvergira.

[9] Prema bilješci E. Fellmanna ([18], str. 52) u Fabrijevu radu nalaze se četiri propozicije, koje se mogu svesti na beskonačni geometrijski red.

Dokaz da je suma svih dužina EF, KH, LM... jednaka GQ slijedi iz jednakosti EF = EG, KH = KE... itd. i zakretanja svake od beskonačno mnogo dužina za pravi kut (isto kao i u Gradićevu dokazu). I Gregoire S. Vincent, a slično ranije i Oresme, polazi od zadane dužine AK, koju dijeli točkama B, C, D..., tako da je $\frac{AB}{BK} = \frac{BC}{CK} = \frac{CD}{DK} = \ldots = k < l$. Dužine AB, BC, CD... čine geometrijski niz. Točke B, C, D... približavaju se točki K, a dužina AK jednaka je sumi svih beskonačno mnogo dužina. Takvo je shvaćanje matematičare 17. stoljeća samo upućivalo na sumu beskonačno mnogo veličina koja je unaprijed pretpostavljena i nije služilo kao obrazac za određivanje sume sličnih nizova ([15], tom 2, str. 133). Idući je problem iz Gradićeva manuskripta ([6], str. 7d, 8d i 227d) teorema na kojoj Gradić zasniva dokaz da je površina segmenta parabole jednaka s 4/3 površine trokuta. Taj je problem u manuskriptu izveden na tri mjesta s malim razlikama u dokazivanju. Zadano je beskonačno mnogo veličina (dužina) AB, CD, EF..., koje su u odnosu AB:CD = CD:EF = ... a omjer je veće dužine prema manjoj. Tvrdi se da se prva dužina AB odnosi prema svima koje dolaze poslije nje kao razlika AB—CD = AM prema drugoj, tj. CD.[10] Svaka od dužina AB, CD... podijeli se točkama M, N, O... tako da je donji dio svake koja prethodi jednak cijeloj onoj koja slijedi. Naime, iz uvjeta zadatka AB:CD = AB:MB = CD:ND = ... transformacijom razmjera (dividendo) dobiva se AM:MB = CN:ND, dakle je omjer pojedinog pretička (excessus) i ostatka stalan. Isti će omjer biti i ako se uzmu svi pretičci zajedno prema svim ostacima, tj. (AM + CN + EO + ...):(MB + ND + OF + ...) = AM:MB. No kako je u prethodnoj lemi pokazano da je suma svi pretičaka jednaka prvoj dužini, tj. AB, konačno se može napisati: AB:(CD + EF + ...) = (AB—CD):CD, što je trebalo dokazati. Ovaj se rezultat može prema potrebi i dalje transformirati. Torricelli ga postavlja u dodatku pisma Prodanelliju, dajući ga u nešto drugačijem obliku kao primjer za rješavanje.[11] Međutim, tek je P. Fermat uočio pravu vrijednost navedene teoreme ([19], str. 57) i na njoj zasnovao svoju metodu za određivanje kvadrature parabole i hiperbole. Taj je rad Fermat završio poslije 1657. godine, a objavljen je poslije njegove smrti, tj. 1679. godine.[12] U njemu ističe da je utvrdio kako je geometrijski niz vrlo koristan za određivanje kvadratura i parabole i hiperbole, a sav postupak osniva na navedenoj teoremi.[13] Primjena ove teoreme poznata je i kasnije. U sličnoj formulaciji primjenjuje je i Bošković, doduše u drugu svrhu ([20], str. 31).

Prelazeći na dokaz da je površina segmenta parabole jednaka s 4/3 površine trokuta s kojim ima jednaku bazu i visinu, Gradić prvo ističe poznate rezultate vezujući ih uz ime Arhimeda i L. Valerija. Naime, poznat je odnos između površina upisanih trokuta, a na temelju toga da je parabola suma od beskonačno mnogo površina koje su u stalnom odnosu 1:4. Tako ako je površina prvog trokuta P_1, tada površina druga dva trokuta upisana u parabolu,

---

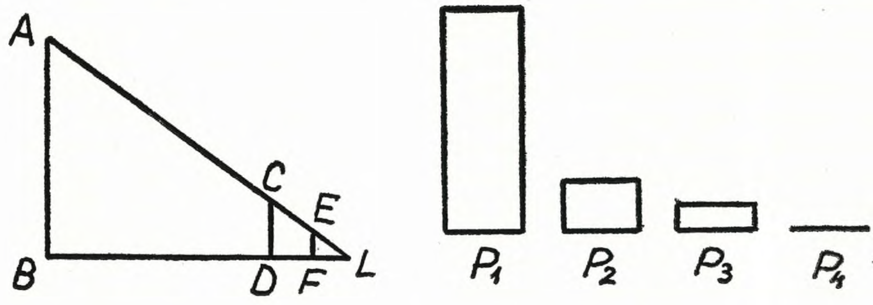
[10] Može se uočiti da se radi o preuređenoj i proširenoj 35. propoziciji iz IX. (devete) knjige Euklidovih »Elemenata«.

[11] »Quadratum primi termini divide differentiam inter primum et secundum, et quotus erit summa omnium terminorum.«

[12] Radi se u Fermatovu radu »De aequationum localum transmutatione... cui annectitur proportionis geometricae in quandrandis inf. parabolis et hyperbolis usus«, koji je objavljen u njegovim sabranim djelima 1679. godine

[13] Ako je zadan padajući beskonačni geometrijski niz, razlika između dva susjedna člana niza odnosi se prema manjem članu kao veći član prema sumi svih slijedećih članova.

s bazama koje su stranice prvog trokuta, iznosi 1/4 P_1 itd. Ako se sada nacrta isti lik kao i u prethodnom problemu, navodi Gradić ([6], str. 9d), tako da je prva dužina AB, druga CD = 1/4 AB, treća EF = $(1/4)^2$ AB itd. u beskonačnost, tada se iz omjera navedenih dužina može odrediti i površina segmenta parabole. Naime, prema navedenom može se napisati razmjer AB:CD = CD:EF =



Sl. 1.

= . . . = P_1:P_2 = P_2:P_3 = . . ., a to je prema prethodnom i dalje jednako = BD:DF = DF:FQ = . . ., a iz toga slijedi i $(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots):(P_2 + P_3 + P_4 + \ldots)$ = BL:DL = 4:1. Iz toga se konačno zaključuje da je tražena površina parabole P jednaka četverostrukoj razlici površine P i P_1, tj. $P = 4(P—P_1)$, i da je $P = 3/4P_1$, što je trebalo dokazati.

Ovaj dokaz formule za površinu parabole pokazuje da Gradić uočava mogućnost povezivanja dva beskonačna reda (geometrijska reda, kojima je $q = 1/4$) i mogućnost da odredi sumu jednoga na osnovi poznate sume drugoga. No, može se primijetiti da Gradić ne promatra problem općenito, nego ga rješava kao konkretan slučaj. Čak se nedovoljno koristi prethodno dokazanim teoremama. Treba također dodati da se ideja takva rješenja nalazi u Torricellijevu pismu Prodanelliju koje se nalazi u Gradićevu manuskriptu, pa se ne može sigurno ocijeniti koliko je Gradić originalan. No, Torricelli se u pismu pohvalno izražava o rješenju kvadrature parabole neke treće osobe, za koju se može pretpostaviti da je to upravo Gradić, koji je, kako navodi Torricelli, došao do rješenja kvadrature parabole drugačijim postupkom, postupkom koji se razlikuje od Arhimedova svođenja na apsurd.

Taj primjer pokazuje da se Gradić odmah po dolasku na studij teologije u Rim počeo baviti geometrijom, a primjena beskonačnoga geometrijskog reda na taj način predstavlja etapu prema općoj primjeni beskonačnoga geometrijskog reda, koju nalazimo kod Fermata pri određivanju kvadratura parabola i hiperbola.

2.2. Rješavanje geometrijskih problema i Gradićevo mišljenje o doprinosu Marina Getaldića

Na nekoliko mjesta u svojim objavljenim i neobjavljenim radovima Stjepan Gradić ističe vrijednost radova svojega zemljaka Marina Getaldića. Gradićev interes za rad M. Getaldića potječe vjerojatno još iz vremena školovanja u Dubrovniku, jer je tada Gradića poučavao vrlo ugledni isusovac Ignjat Tudišević, vrstan matematičar i prijatelj Marina Getaldića ([2], str. 2).

U rukopisu u kojem Gradić opisuje život svojega ujaka Petra Beneše ([21], str. 8d—9d) cijelu VI. glavu posvećuje M. Getaldiću u vezi s ujakom Benešom. Naime, upravo kad je Gradić završavao studij teologije, umire mu početkom svibnja 1642. godine ujak, i tada Gradić u tridesetoj godini života postaje zastupnikom Dubrovačke Republike u Rimu. Vjerojatno se odmah poslije toga i odužio pokojnom ujaku opisavši njegov život i rad ([2], str. 5).[14] Tako odmah na početku spomenutog poglavlja (str. 8d) ističe da je Beneša slušao Christ. Clavija uživajući zbog divljenja Marinu Getaldiću.[15] U daljem tekstu s mnogo pohvalnih riječi opisuje Getaldićev rad i doprinos napretku matematike, a posebno ističe važnost njegova kontakta s F. Vietom i prihvaćanje njegovih ideja, te kao rezultat toga »praeclarum opus de resolutione et compositione. . .«. Kad govori o tiskanju Getaldićeva djela »De resolutione et compositione mathematica«, koje je objavljeno poslije Getaldićeve smrti, spominje da se za tiskanje zalagao i ujak P. Beneša.[16] O istom Getaldićevu djelu s pohvalama piše Gradić i mnogo kasnije u svojem objavljenom radu u kojem s poznatim matematičarom i fizičarom H. Fabrijem raspravlja o probabilizmu ([12], cap. XXX, str. 96).[17] O Gradićevu zanimanju za konkretne probleme koje rješava M. Getaldić u svojim djelima vidi se iz mnogih bilježaka i zadataka koje Gradić rješava u svojem manuskriptu [6]. Tako npr. na str. 75d—76d rješava prvi problem iz Getaldićeva »Apollonius Redivivus seu Restituta Apollonii Pergaei Inclinationim Geometria«, koje je objavljeno u Veneciji 1607. godine. To je Getaldićevo djelo već i za njegova života bilo poznato. Tako ga poznaje u Engleskoj T. Harriot, a kasnije i R. Hook. Krajem 18. stoljeća dva engleska autora, S. Horsley i R. Burrow, ponovo se bave restauracijom Apolonijeva djela »O nagibima« ([22], str. 202—203). Getaldićeva je metoda rješavanja sintetička. Kasniji su autori od toga odstupili i davali rješenja primjenjujući metodu koja im se činila najzgodnijom, ne vodeći računa o tome da restauracija mora biti što vjernija originalu, pa čak i metodološki. Tako npr. Horsley rješava probleme u okviru Vietine metode, no pritom se drži Getaldićevih formulacija problema, a razlika je jedino u tome što prvi Getaldićev problem rastavlja u dva ([22], str. 204). Interesantno je da i Gradić prvi Getaldićev problem rastavlja i rješava odvojeno kao dva. Tekst Gradićeva problema[18] sadržajno se ne razlikuje od Getaldićeva ([23], str. 199), a i metoda rješavanja je ista, tj. sintetička. Razlika je samo u tome što Gradić pronalazi još jedan način konstruktivnog rješenja problema. Naime, prema zadanoj kružnici iz zadane točke izvan kružnice treba povući dužinu prema kružnici tako da dio dužine u kružnici bude jednak zadanoj dužini. I uvjet za tu konstrukciju koji navodi Gradić isti je kao i u Getal-

---

[14] Može se primijetiti da Đ. Körbler ne navodi naslov rukopisa ([2], str. 6) prema originalu [21], koji se nalazi među Gradićevim rukopisima u Vatikanu (Vat. lat. 6905).

[15] »Audivit etiam Christ. Clavium clarissimum tunc in urbe geometram, eiusdem Instituti Presbyterum, eius scientia studio praecipue delectatus propter admirationem Marini Ghetaldi civis sui, cuius nomen in eo genere studiorum inclitum esse coeparat.«

[16] ». . . qui liber post mortem demum eius, curante Benessa in publicum prodijt Francisco Barberino Cardinali nuncupatus. . .« ([21], str. 9).

[17] ». . . et nomina usurpant cetere Geometrarum, et Arithmeticorum disciplinae congruentia, idque scribendi genus compositionem appellant, cuius rei popularis meus Marinus Ghetaldus in praeclaro suo de Compositione et Resolutione opera pulcherrima praecepta, tradit.«

[18] »In dato circulo aptare rectam lineam magnitudine datam qui pertingat ad datam punctam extra circulum positum. Oportet autem datam inscribendam non esse maior diametro dati circuli. . .« ([6], str. 75d).

dića. Naime, zadana dužina ne smije biti veća od promjera zadane kružnice. Slično kao Getaldić, i Gradić poslije izvršene konstrukcije izvodi i dokaz. Na kraju Gradić zaključuje da to isto slijedi i iz »Marini Ghetaldi... Apollonius redivivus... lib. prim.«. Drugi problem koji zatim rješava Gradić zapravo je drugi dio prvog problema. Naime, sad je zadana točka unutar zadane kružnice, a zadana dužina, osim toga što ne smije biti veća od promjera zadane kružnice, ne smije biti ni manja od dužine koja je u danoj točki okomita na promjer kružnice.

Među mnoštvom različitih problema koje nalazimo u Gradićevu manuskriptu nalaze se i problemi iz Getaldićeve knjige »Variorum problematum collectio«, koja je objavljena u Veneciji 1607. godine. To je djelo u metodološkom smislu vrlo zanimljivo jer se u njemu nalaze tri skupine problema koji su rješavani na metodološki različite načine. Naime, Getaldić se koristi posve sintetičkim geometrijskim postupkom, zatim analitičko-sintetičkim postupkom koji je već upotrebljavao Pappus i konačno postupkom u kojem se dodaje tzv. posljedica [24]. Tako u Gradićevu manuskriptu ([6], str. 13d—14d) nalazimo rješenje posljednjeg 42. Getaldićeva problema. U tom problemu zadanu dužinu treba presjeći na dva dijela tako da pravokutnik načinjen od dijelova ima zadani odnos prema kvadratu razlike istih dijelova. U rješavanju tog problema i Gradić kao i Getaldić primjenjuje sintetički postupak, tj. najprije izvodi konstrukciju, a zatim dokaz. Rješava ga na dva različita načina, oba različita od rješenja koje daje Getaldić. Interesantan je i problem[19] koji Gradić rješava u manuskriptu ([6], str. 88—92) nekoliko puta, a za koji navodi da ga je slično riješio, između ostalih, i M. Getaldić u »lib. variorum problematum p^a 23«. Razlika u formulaciji zadatka je u tome što kod Getaldića treba konstruirati pravokutnik iz zadane razlike dijagonale i stranica, dok je u Gradićevu problemu zadana razlika stranica i razlika dijagonale i veće stranice. Rješenje problema je sintetičko, tj. izvodi se konstrukcija, a zatim se izvodi dokaz. Međutim, na jednom listu koji se nalazi nešto dalje uložen u manuskriptu (str. 100) nalazi se provedena algebarska analiza tog problema. Vrlo je vjerojatno da je Gradić prvo proveo algebarsku analizu, a onda, koristeći se tim rezultatom, proveo konstrukciju i dokaz, tj. dao rješenje problema sintetičkom geometrijskom metodom. U rješavanju mnogih drugih zadataka Gradić se uglavnom poziva na stavke iz Euklidovih elemenata, ali i na stavke iz Getaldićevih radova. Tako se npr. na nekoliko mjesta poziva i na Getaldićevo djelo »De resolutione et compositione mathematica« ([6], str. 94). O Gradićevu interesu za djelo M. Getaldića svjedoči i to što je Gradić u svom manuskriptu ([6], str. 103d—104d) sačuvao jedno pismo švicarskog matematičara P. Guldina upućeno M. Getaldiću. Pismo je vrlo interesantno jer među ostalim potvrđuje pretpostavku da se M. Getaldić koristio algebarskim rješenjem da bi odredio ograničenja i pojedine slučajeve problema, ali da je, vodeći računa da restauracija mora biti jednaka originalu čak i metodološki, naveo samo sintetičko rješenje ([25], str. 89).

Vrlo je vjerojatno da se S. Gradić navedenim geometrijskim problemima bavio za studija teologije u Rimu. Na to upućuje i Torricellijevo pismo upućeno B. Castelliju u Rim 11. lipnja 1640.[20] godine, u kojemu mu prilaže rješenja

---

[19] »Data differentia laterum inter se item differentia inter maius latus et diametrum alicuas rectanguli, invenire rectangulum.«

[20] U isto je vrijeme Gradić raspravljao preko Prodanellija s Torricellijem o kvadraturi parabole.

dvaju problema. Ta su Torricellijeva rješenja u duhu starogrčke sintetičke metode, a oba se nalaze i u Gradićevu manuskriptu ([6], str. 46d i 50d—51), riješena vrlo slično kao i u Torricellija.

Iz navedenoga možemo zaključiti da se Gradić već u mlađim danima pod utjecajem sredine u kojoj se nalazio te, s druge strane, po ugledu na zemljaka M. Getaldića zanimao za geometriju, rješavajući niz geometrijskih problema. Dobro je poznavao Getaldićeve radove, te je pokušavao, slično kao i mnogi drugi u to vrijeme, koristeći se Getaldićevim formulacijama problema, doći do rješenja na drugačiji način, a često je unosio i promjene u samu formulaciju problema. Pritom se Gradić najčešće koristi i istom metodom, tj. sintetičkom, ali je iz više primjera koje nalazimo u njegovu manuskriptu očito da je često do rješenja dolazio algebarski, a tek onda dao i sintetičko rješenje.

3. RAD S. GRADIĆA KAO NASTAVLJAČA I ZAGOVARAČA ALGEBARSKIH SHVAĆANJA F. VIETE I M. GETALDIĆA TE SURADNJA S M. A. RICCIJEM

M. A. Ricci u posveti S. Gradiću[21] u djelu »Geometrica« [27] ističe da je već i ranije sa S. Gradićem raspravljao o zakonima opće »Artis analyticae«, o metodi s malo riječi i većom brzinom i lakoćom dokazivanja, kao i o metodi lakšeg uočavanja grešaka u djelima mnogih autora. Ovdje naziv »Artis analiyticae«[22] treba shvatiti kao algebra. Naime, Vieta je odbijao naziv algebra ([16], str. 365—66 i [14], vol. II, str. 392), smatrajući da on nije u duhu jezika, te je predlagao »analiytica«. U nastavku posvetnog pisma naslovljenog na S. Gradića Ricci se obvezuje da će objaviti već prikupljeni materijal iz tog područja, što je preporučio već i Torricelli, u kojem će »integram doctrinam triginta propositionum Archimedis, Luca Valerij, et aliorum, una complecitur«. M. A. Ricci je i napisao »Algebru« [29], koja je ostala u rukopisu. Jedan rukopis »Algebre« nalazi se u Matematičkom institutu Sveučilišta u Genovi ([28], str. 105). To Riccijevo djelo pisano je potpuno u duhu Vietine algebre i predstavlja školski priručnik nove algebre. Ono je vrlo interesantno i stoga što Ricci osim Viete i Claviusa spominje još samo neke probleme iz radova M. Getaldića i što raspravlja o njima [28]. Može se primijetiti da osim spomenutog Riccijeva rukopisa postoje u Vatikanskoj biblioteci prijepisi Riccijeve »Algebre«. Tako se jedan prijepis nalazi među rukopisima koji većinom pripadaju S. Gradiću ([29], Vat. lat. 6901), i na njemu je označeno da je to »Algebra« M. A. Riccija. Taj je prijepis pisan talijanskim jezikom (kao i izvor), ima ukupno 40 stranica, a sadržaj je dan u 24 leme. Drugi prijepis pisan je nešto čitkije, ali je bez naslova i bez naznake autora, a priložen je uz tiskano Riccijevo djelo »Geometrica exercitatio« i obuhvaća dio od str. 9d—63d ([29], Vat. lat. 6965). Za razliku od prvoga, ovaj rukopis ima jednu lemu više. Postoji mogućnost da je prvi prijepis bio u Gradićevu vlasništvu, te se zbog toga i našao među svescima koji uglavnom pripadaju njemu. No, sigurno je da ga je Gradić poznavao jer se u manuskriptu ([6], str. 106d) pri rješavanju jednog algebarskog problema poziva na Riccijevu algebru.[23]

[21] M. A. Ricci posvetio je svoje djelo »Geometrica exercitatio« Stjepanu Gradiću: »Abbati Stephano Gradio Michael Angelus Riccius S. P. D.«.

[22] Sličan naslov ima i djelo engleskog matematičara T. Harriota »Artis analyticae praxis«, izdano posthumno, tj. 1631. godine ([16], str. 335).

[23] Gradić navodi: »in sua algebra demonstrat Michael Angelus Riccius«.

Da su algebra i algebarska analiza bile predmet Gradićeva zanimanja, vidi se po mnogobrojnim bilješkama koje su ostale sačuvane u manuskriptu [6]. Tako se npr. na str. 282d—283 nalaze pribilješke o računskim operacijama s posebnim naglaskom na općenitost u računanju i operiranju specijesima ili oblicima stvari, kao npr. slovima abecede, koji mogu imati i predznak.[24] Konkretne primjere računanja nalazimo i na str. 284d, a operacije, kao npr. razliku kvadrata, na str. 43d. Sve su te bilješke u vezi sa sadržajem iz Riccijeve algebre, a Gradiću su poslužile pri sastavljanju vlastitog rada ([6], str. 105d—111d) bez naslova, koji predstavlja pokušaj algebarske interpretacije problema vezanih uz pravokutni trokut i primjenu Pitagorina poučka.

Geometrijska je analiza odigrala vrlo važnu ulogu u razvoju matematike. Ona je zapravo bila jezgra iz koje su se razvile i druge analize, pa i algebarska. Problem analize, posebno geometrijske, interesirao je i Gradića. Vjerojatno potaknut proučavanjem Getaldićevih radova,[25] a kasnije i istraživanjem geometrijskog rada u to vrijeme manje poznatog matematičara (geometra) Aristaeusa,[26] i sam bilježi svoja zapažanja o analizi i sintezi.[27] Logistika, praktična matematika, koja je već postojala u staroj Grčkoj, prvi put je shvaćena kao teorijska aritmetika u Diofantovim djelima. On je uveo pisanje riječi kraticama, što je bila velika promjena u odnosu na grčko retoričko izlaganje, te se takva algebra često naziva i sinkopatskom. No ni kod Diofanta kao ni kod srednjovjekovnih i renesansnih matematičara nije učinjen bitan korak koji se sastoji u apstrahiranju operacija od njihovih objekata. Naime, još uvijek operacija i objekti na koje se ona odnosi čine nerazdvojnu cjelinu. Posljedica je toga bila da se u to vrijeme nije nikad izvlačila formula, jer je za nju bilo potrebno da upotrijebljena kratica postane simbol, koji može poprimiti karakter bilo čega ([30], str. 13—14). U analitičkom se postupku uzima da su i tražene veličine zadane, pa čak i crtežom predočene, ali, naravno, ne u svojoj pravoj veličini. Odlučan korak u prerastanju geometrijske analize u algebarsku učinio je Vieta. On promatra veličine nazvane »specijes«, koje su sasvim općenite i predstavljaju opće veličine primjenjive i na brojeve i na geometrijske veličine. Ovdje kratice dobivaju potpuno novo značenje, one postaju simboli, koji će jednom moći poprimiti jedan, a drugi put drugi sadržaj ([31], str. 117).

O algebarskoj analizi Gradić pravi bilješke na nekoliko mjesta u svojem manuskriptu. Tako se na str. 281d u prvom koraku analize, tzv. zetetičkom postupku, postavlja odnos ili jednadžba između zadanih i traženih veličina. Idući je korak da se uz pomoć algebarskih operacija, koje Gradić nabraja kao zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje ([6], str. 238 i 239d), dođe do rješenja. Interesantno je Gradićevo uočavanje da zbrajanju i množenju u analizi odgova-

---

[24] »... litterae species significatae... quam signis negativis aut affirmativis affectae.«

[25] Naime, i Getaldić pored sintetičke metode neke probleme u »Zbirci različitih problema« rješava metodom analiza-sinteza, koja je bila najjasnije upotrijebljena u 7. knjizi Pappusova »Matematičkog zbornika« ([24], str. 105).

[26] U manuskriptu [6] nalazi se više bilježaka o geometru Aristaeusu, o čijem je radu Gradić raspravljao s talijanskim matematičarom V. Vivianijem, a posebno o njegovoj metodi analize, tj. geometrijske analize.

[27] »Resolutio geometrica nihil aliud est quam progressio quaedam ratiocinandi a quaesito ad concessam per legitimae consequentes expedior...«. Slično i o sintezi (compositio) ([6], str. 273d). Taj dio Gradićeva teksta vrlo je sličan Getaldićevu uvodu u »Liber primus« djela »De resolutione et compositione mathematica« ([23], str. 365).

raju oduzimanje i dijeljenje u sintezi a i obratno, pa su to suprotne operacije.[28] Dodaje da se pored tih operacija »in operationibus Algebrae« primjenjuju operacije i »ad proportionem« i »ad aequalitatem«. Taj dio Gradićevih razmišljanja nja sigurno se osniva na proučavanju Getaldićeva djela »De resolutione et compositione mathematica« i na Getaldićevim »Conspectus resolutionis et compositionis«, kojima Getaldić vrlo jasno prezentira ulogu Vietine algebre u tretiranju geometrijskih problema i vrlo precizno određuje odnos analize (resolutio) i sinteze (compositio) s vrlo jasnom naznakom da su analiza i sinteza dva matematičko-logička procesa obrnutih smjerova ([32], str. 6—9). Gradić vrlo jasno uočava da u analizi postoji određen karakterističan redoslijed u zaključivanju, kao što postoji i redoslijed u sintezi. Pritom posebno ističe uzajamni odnos analize i sinteze preko operacija koje se u njima izvode.

Iz početne se jednadžbe navedenim transformacijama dolazi do neke istine, koja se naziva porizam, a iz njega se određuje tražena veličina. Iz porizma se može odrediti tražena veličina s pomoću sinteze, ali porizam može poslužiti da se dođe i do drugih novih istina, u vezi s drugim principima ([6], str. 238d). Primjenjujući to i praktično, Gradić na više mjesta u manuskriptu vrši i algebarsku analizu. U mnogim primjerima koje rješava sintetičkom metodom u duhu grčke geometrije, on sa strane ili na posebnom listu papira izvodi algebarsku analizu, kojom se zatim rukovodi u sintetičkom rješavanju. Može se primijetiti da talijanski matematičari tog vremena nisu baš skloni Vietinoj algebarskoj analizi i mnogi je izbjegavaju. Tako je npr. Riccijev učitelj E. Torricelli, za razliku od svog učenika Riccija, veliki obožavatelj stare Grčke metode i nije pristalica algebarskog formalizma. Često ističe »bez algebre«, na što je čak i vrlo ponosan ([33], str. 170). U tom je smislu vrlo interesantno već spomenuto Torricellijevo pismo upućeno rimskom matematičaru B. Castelliju, kojem Torricelli prilaže rješenje dvaju problema ([11], tom III, str. 40—42). U prvom problemu treba zadanu dužinu presjeći na dva dijela tako da razlika kvadrata dijelova ima zadani omjer prema pravokutniku načinjenom od istih dijelova. U drugom pak, slično, treba zadanu dužinu presjeći na dva dijela tako da pravokutnik načinjen od cijele dužine i manjeg dijela ima zadani omjer prema razlici kvadrata dijelova. Rješenja tih zadataka, koja Torricelli prilaže, u duhu su starogrčke sintetičke metode. Oba zadatka s vrlo sličnim rješenjem s pomoću sintetičke geometrijske metode ima i Gradić ([6], str. 46d i 50d—51). Razlika je jedino u formulaciji drugog problema. Naime, Gradić prvo rješava zadatak u kojem treba podijeliti zadanu dužinu na dva dijela tako da prvo uzima pravokutnik načinjen od cijele dužine i većeg dijela. Uočava da je rješenje moguće ako je zadan omjer većeg prema manjem. Zadatak u kojem je pravokutnik načinjen od cijele dužine i manjeg dijela (tako ga formulira Torricelli) rješava na isti način, samo što nije potrebna nikakva determinacija, jer pravokutnik konstruiran od cijele dužine i manjeg dijela može biti i veći i manji i jednak s razlikom kvadrata dijelova. Vrlo je interesantno da se oba zadatka nalaze i u dodatku pisma[29] koje je V. Viviani uputio S. Gradiću ([6], str. 244d i 245). Vivianijeva rješenja navedenih problema dana su u duhu grčke geometrije, tj.

---

[28] »Animadverti autem facile potest quod additio posita in resolutione respondet in compositione subtractione et e contra quae alteri alterius conversa est. Ita multiplicatio posita in resolutione respondet divisione in compositione et e contra quae similiter altera alterius conversa est.« ([6], str. 239d).

[29] U vezi s ovim sadržajem nalaze se u manuskriptu [6] dva Vivianijeva pisma upućena Gradiću, oba pisana u svibnju 1663. godine.

sintetičkom metodom. Usporedba pokazuje da su rješenja koja daje Viviani vrlo slična Torricellijevim rješenjima, dok je drugi problem gotovo identično riješen. Razlika je samo u upotrijebljenim oznakama. Prije nego što postavlja i rješava prvi problem, Viviani navodi: »Problema quod tibi erudissime Gradi mihi proponere placuit fuit ni fallor huiusmodi«, iz čega se može zaključiti da su o tom problemu već i prije raspravljali. Isti problem na drugom mjestu u manuskriptu ([6], str. 230d) Gradić rješava i algebarski, tj. provodeći algebarsku analizu. Naime, zadanu dužinu koju treba presjeći označava s B, a manji dio s A. Zadani omjer razlike kvadrata dijelova i pravokutnika nad istim dijelovima je B:C. Prema slici, uvodeći pomoćnu dužinu E, koja je jednaka razlici dijelova dužine B, određuje razliku kvadrata dijelova $E^2 + 2AE = B(B-2A)$, a zatim i površinu pravokutnika $(B-A)A$. Te rezultate uvrštava u zadani razmjer, koji transformira tako da se iz njega može odrediti nepoznata dužina A. Što se tiče takvog rješenja, Torricelli u pismu Castelliju primjećuje: »Quia vero aliqui existimarunt haec Problemata per regulam Algebrae solvi non posse, nos per simplicem Aritm. illa absolvemus.« Poslije toga Torricelli daje i rješenja za oba primjera koja bi slijedila iz jednadžbi, no daje ih u retoričkom obliku. To pokazuje da Torricelli, a slično i Viviani, pri rješavanju problema strogo vode računa i o metodi rješavanja, dajući prednost sintetičkoj metodi.

Gradićev algebarski rad u kojem rješava 33 problema u vezi s pravokutnim trokutom ([6], str. 105d—111d) vjerojatno nije potpuno originalan. S jedne strane, on je pod utjecajem M. Getaldića i Riccijeve algebre a, s druge strane, Gradić je posjedovao i jedan rad H. Fabrija ([6], str. 112d—120).[30] Taj se Fabrijev rad zasniva na nekoliko postulata, teorema i korolara iz kojih se dokazuju, čak istim redom, 33 problema, kao i u radu S. Gradića. No, bitna razlika između ta dva rada jest u metodi rješavanja. U Fabrijevu radu problemi se rješavaju sintetičkom metodom i po uzoru na Euklidove elemente. Naime, utvrđuje se kako konstruktivno odrediti trokut, a u dokazu se primjenjuju prethodno dokazane teoreme. Tekst je retorički, bez formula, i ne razlikuje se od mnogih drugih tekstova sličnog sadržaja iz ranijih perioda, kao npr. sličan tekst u manuskriptu ([6], str. 166—169),[31] prepisan iz jednog rada F. Maurolica iz 16. stoljeća. Čini se da ih je oba i prepisao isti prepisivač. Gradićev rad koji je istog sadržaja kao i spomenuti Fabrijev pisan je potpuno u duhu Vietine algebre, a i Getaldićeva rada »De resolutione et compositione mathematica«.[32] Naime, u svakom problemu poslije postavljanja zadatka dolazi algebarska analiza, kojom se analizira odnos zadanih i traženih veličina. Na osnovi analize postavlja se jednadžba. Ona se zatim algebarskim operacijama, o kojima Gradić raspravlja na nekoliko mjesta u manuskriptu, svodi na oblik iz kojega se može izraziti tražena veličina (tzv. kanonski oblik). Iza toga slijedi porizam, kojim se, zapravo riječima, izražava rezultat rješenja jednadžbe i veza između zadanih i traženih veličina. U nekim problemima porizam služi i za postavljanje novog problema ([6], str. 111d). Time se problem smatra riješenim jer je na osnovi porizma poznat traženi trokut i može se izvesti konstrukcija, pa i izračunavanje, ako je to potrebno. No, Gradić to u ovom radu ne izvodi. Ako se taj

---

[30] Da se radi o Fabrijevu radu, pisanom rukom nekog prepisivača, upozorava sam Gradić napomenom na početku rada: »Patris Honorat. Fabri (?) Soc. Jesu« ([6], str. 112d).

[31] Theodosij sphaericos elementorum ex Traditioni Maurolici, Liber primus«.

[32] Tako se npr. u problemu 28, slično kao i u Getaldićevu djelu, upotrebljava »Conspectus resolutionis« ([6], str. 111d).

Gradićev rad analizira, može se zaključiti da je on pokušaj reinterpretacije jednog geometrijskog problema na osnovi Vietine algebre. Time se i Gradić uključuje u tijek stremljenja svog vremena. Može se primijetiti da u to vrijeme još uvijek nisu baš brojni takvi pokušaji, što je vjerojatno, na neki način, posljedica toga što su algebru odbijali veliki autoriteti, kao što je npr. bio Torricelli. Iz prethodnoga se vidjelo da ni Viviani, pa ni Fabri, nisu baš skloni algebri, za razliku od nekih francuskih matematičara toga vremena ili npr. Huygensa, nizozemskog matematičara i fizičara koji je živio u Parizu.[33] Da bismo uočili razliku u rješavanju istih problema koje nalazimo i u Fabrijevu i u Gradićevu radu, navodimo rješenja koja se u oba rada nalaze pod brojem šest. U Fabrijevu radu ([6], str. 115d) problem i njegovo rješenje glase: »Dato latere et ratione basis ad latus, invenire triangulum. Vel est ratio basis, ad latus datum vel ad aliud, si primum assumpta AE ad libitum, descriptoque supra AE semicirculo, cui applicatur AF ita ut ratio basis ad latus datum sit AE ad AF productaque AF indefinite, et facto ACB, angulo rect^0: habetur triangulum quesitum, si vero ratio basis sit ad aliud latus non data sitque AE ad EF, haec applicatur descripto semicirculo fiat (?) ut supra sive latus datum sit maius, sive minus«. Isti problem rješava Gradić ([6], str. 106). Njegov tekst dat ćemo u slobodnom prijevodu s komentarom. Zadana je stranica i omjer baze (hipotenuze) prema stranici u pravokutnom trokutu. Treba odrediti trokut. Taj problem ima dva slučaja, naime, ili je zadan odnos hipotenuze prema zadanoj stranici ili prema onoj drugoj. Prvi slučaj se rješava prema prethodnom problemu.[34] U drugom slučaju, neka je zadana stranica B, nepoznata stranica C i hipotenuza A. Zadan je omjer hipotenuze i nepoznate stranice, i neka je A:C = R:S. Iz Pitagorina poučka za pravokutni trokut slijedi jednakost: $B^2 + C^2$ // A^2. Ako se na obje strane oduzme C^2, preostaje jednakost (restat aequatio) B^2 // A^2—C^2, a to je A—C in A + C, jer kako navodi Gradić, produkt sume i razlike jednak je razlici kvadrata, kako je to pokazao u svojoj algebri M. A. Riccius. Dakle je B^2 // A—C in A + C. U daljem izvodu[35] dobije se konačno B^2:(A—C)^2 = = (R + S):(R—S). Iz tog se razmjera može izračunati (A—C)^2, pa i korjen A—C. No, kako je prema prethodnom B^2 = (A—C) (A + C), može se izračunati i suma, tj. A + C, a iz toga i hipotenuza A i stranica C. Naime, ako je A + C = F, a A—C = D, tada je 2C + D = F itd.

O vrijednosti algebarske analize nalazimo Gradićeve bilješke na još nekoliko mjesta u manuskriptu. Tako, npr., vjerojatno u jednom pismu bez naznake primaoca ([6], str. 193—195) ističe doprinos Pitagore, a zatim za Vietu kaže: »patrum nostrae memoriae Franciscus Vietae quae numeros aequae ac species comprehendit . . .«. Dalje ističe dobitak koji je rezultat primjene algebre zbog lakoće demonstracije, kratkoće izlaganja, za razliku od prethodnih metoda, gdje su isti dokazi zauzimali više prostora, tj. bili vrlo opširni.

---

[33] Tako u Huygensovim sabranim djelima ([34], knj. XI, str. 26) nalazimo da on i zadatak »Datum triangulum, ex puncto in latere dato, bifariam secare« rješava algebarski. Isti zadatak rješava i Gradić ([6], str. 100d), ali samo konstruktivno uz dokaz.

[34] U problemu br. 5 riješen je slučaj kad je zadana jedna stranica i omjer stranica.

[35] U daljem izvodu, ako upotrijebimo današnje oznake proširivanjem razmjera se dobije: (A—C) : (A + C) = (A—C)^2 : (A—C) (A + C). Ako se u taj razmjer uvrsti prethodno dobivena jednakost, dobije se B^2 : (A—C)^2 = (A + C) : (A—C). Iz razmjera A:C = R:S (koji je zadan) slijedi primjenom poznatih operacija: (A + C) : (A—C) = = (R + S) : (R—S), a iz toga i konačni razmjer iz kojeg se mogu izračunati nepoznate stranice.

Vjerojatno zbog odbijanja algebre, kao što smo već istakli, algebra u Italiji u prvoj polovici 17. stoljeća, pa i nešto poslije toga, nije uhvatila dublji korijen. Čini se da je djelo našeg Marina Getaldića »De resolutione et compositione...« dugo vremena na tom području bilo usamljeno, te nije čudo da je npr. M. A. Ricciju još i u drugoj polovici 17. stoljeća bilo vrlo pogodno za analizu [28]. Upravo vodeći računa o ovoj činjenici i polazeći od nje, treba cijeniti rad M. A. Riccija, a jednako tako i našega Stjepana Gradića, koji je, potaknut radom svog zemljaka Marina Getaldića, našao u M. A. Ricciju istomišljenika s kojim je raspravljao o mnogim pitanjima algebre,[36] a i poticao ga je da rezultate svojega rada, tj. algebre, i objavi.

4. SURADNJA S. GRADIĆA S TALIJANSKIM MATEMATIČAROM V. VIVIANIJEM NA RESTAURACIJI RADOVA STAROGRČKOGA GEOMETRA ARISTAEUSA

U 16. i 17. stoljeću postojao je velik interes mnogih matematičara za antička matematička djela, a posebno za ona koja su bila izgubljena, a o kojima pojedine podatke daju neki drugi autori. Oni ih spominju ili na osnovi toga što su ih poznavali i njima se služili ili pak citiraju mišljenje o njima nekih drugih starijih autora. Tako su npr. djela starogrčkog matematičara Apolonija iz Perge bila većim dijelom izgubljena, i za njih je postojao velik interes. Proučavaju ih i restauriraju mnogi veliki matematičari, počevši od F. Viete, našeg M. Getaldića, Snelliusa, Vivianija i drugih.[37] Glavni izvor za restauraciju Apolonijevih djela nalazi se u Pappusovu djelu »Matematički zbornik«.[38] Problemi navedeni kod Pappusa često su slabo razumljivi, što npr. spominje Getaldić kad kaže da mu je probleme koje restaurira bilo teže shvatiti nego riješiti. To ujedno vrlo dobro pokazuje da oni dopuštaju različite interpretacije ([22], str. 204). Slično kao i druge matematičare, i S. Gradića zanimaju Apolonijevi radovi, pa i Pappusov »Zbornik«, koji je zapravo osnova, a ponekad i jedini izvor za poznavanje grčke matematike. U Gradićevu manuskriptu nailazimo na više mjesta na zadatke koji su riješeni slično kao u Apolonijevim radovima. Tako npr. ([6], str. 228) Gradić konstruira tangentu na kružnicu dijeleći dijametar kružnice izvana, u istom omjeru u kojem je podijeljen nožištem okomice iz točke kroz koju je povučena tangenta iznutra. Drugim riječima, za konstrukciju tangente

---

[36] Između ostalog, Ricci u svojoj »Algebri« razmatra i različite tipove geometrijskih zadataka primjenjujući algebarsku analizu. Interesantni su tzv. nemogući problemi ([29], Vat. lat. 6965, str. str. 48), za koje pokazuje da se svode na jednadžbe koje su apsurdne. U vezi s tim u Gradićevu manuskriptu ([6], str. 258) nalazi se nekoliko problema, od kojih je jedan i riješen. Problem glasi: »Invenire duo quadrato quadrata in rationibus quo (?) differentia sit aequalis differen. laterum«. U dokazu Gradić pokazuje da problem spada u nemoguće jer iz analize slijedi da je dio veći od cijeloga. Pritom svakako polazi od tada uobičajenih shvaćanja.

[37] Među mnoge koje su zanimala Apolonijeva djela spada i P. Fermat. Tako M. D. Grmek navodi da francuski matematičar P. de Fermat piše u uvodu izdanja (oko 1630. god.) Apolonijeva djela »De locis planis« da je ono neka protuteža ili dopuna francuskom, holandskom i ilirskom Apoloniju ([26], str. 119).

[38] Pappus Aleksandrijski (druga polovica 3. st.), grčki matematičar, autor je većim dijelom sačuvanog matematičkog zbornika »Collectiones«, koji predstavlja sistematski pregled grčke matematike s komentarima i izvacima iz najvažnijih tadašnjih matematičkih djela.

koristi se tzv. harmonijskom četvorkom točaka, odnosno teorijom harmonijskog dijeljenja. Sličan problem za elipsu riješen je u drugoj knjizi Apolonijevih »Konika« ([16], str. 167).

Grčki matematičari dijelili su krivulje u tri kategorije: prva — »plane loci«, u koju spadaju pravac i kružnica; druga — »solid loci«, a to su presjeci stošca; i treća — »linear loci«, u koju spadaju ostale krivulje ([16], str, 164). U kritičkom prikazu nekog rada o »konikama« ([6], str. 293d) Gradić primjećuje da je autor trebao problem shvatiti općenitije, pa kao presjek stošca uzeti i kružnicu. U vezi s tim, kad razmatra presjeke stošca ([6], str. 229), dokazuje da ako vrijedi da je $LH^2 = LB^2—BH^2$ (odnosno $y^2 = r^2—x^2$), tada je točka L na kružnici. Dokaz provodi tako da pokaže da su dužine LI, DI i IE u odnosu »continue proportionales«, tj. da je $LI^2 = DI \cdot IE$.

Pored Apolonijevih radova Gradića zanimaju i Euklidovi radovi. Euklid je osim »Elemenata« napisao i više drugih radova, a među njima i »Data«, tj. »ono što je dano«. Tu je Euklid u 95 stavaka utvrdio ako su zadane neke geometrijske veličine, da su tada na osnovi njih dane i neke druge veličine. Drugim riječima, to Euklidovo djelo sadržava zapravo primjenu algebre u geometriji, ali pritom je ta primjena izložena strogo geometrijskim jezikom ([35], str. 76). U Gradićevu manuskriptu nalazi se dio navedenog Euklidova rada, naime 30 propozicija, vjerojatno u Gradićevu prijevodu na latinski jezik, zatim i nekoliko na grčkom jeziku ([6], str. 170d—176d). Tako je npr. na str. 172d druga propozicija: »Si data magnitudo ad aliam aliquam magnitudinem habet rationem datam, datur et haec alia magnitudina«, odnosno: »Ako se dana veličina nalazi u danom odnosu prema drugoj veličini, onda je dana i ona druga veličina«.[39] Ovim prijevodom Gradić pokazuje, s jedne strane, svoj interes a, s druge strane, uvrštava se među mnoge koji, počevši od 15. stoljeća, Euklidova djela (a i druga) prevode na latinski jezik.

Već je spomenuto da je Pappusov »Zbornik« bio izazov za mnoge matematičare da restauriraju radove koji se u njemu spominju i komentiraju, a s vremenom su izgubljeni. Gradića je vjerojatno potaknuo V. Viviani da se zainteresira za rad jednog u to vrijeme gotovo nepoznatog grčkog matematičara, koga Pappus spominje u sedmoj knjizi svog »Zbornika«. Gradić ga, pišući o njemu, naziva »de Aristeo Geometra, qui senior apellatur«,[40] jer, naime, Pappus spominje još jednog Aristaeusa, koga naziva »junior«. Podaci koje navodi Pappus bili su vrlo oskudni, tako da je bilo puno spornih pitanja. Pitanje je bilo kada je živio, koja je djela napisao, tko je bio Aristaeus »junior« itd. Na osnovi škrtih podataka Viviani i Gradić pokušavaju odgovoriti na ta pitanja, a posebno s obzirom na Aristaeusove radove koje Pappus navodi, a koji su bili izgubljeni. Vjerojatno je upravo na osnovi tog Vivianijeva i Gradićeva rada taj restauratorski posao bio okrunjen Vivianijevim izdanjem Aristaeusova rada »Loci solidi«. Naime, Viviani je 1701. godine objavio rad s naslovom »De locis solidis Aristaei senioris secunda divinatio geometrica, opus conicorum«.[41] Rad je, čini se, dosta rijedak. Nema ga ni Vatikanska biblioteka, a u literaturi se vrlo rijetko

[39] Prijevod te propozicije je prema Bilimovićevu komentaru Euklidovih »Elemenata« ([36], knj. prva, str. 65).

[40] U literaturi ga nalazimo pod imenom Aristaeus ([16], str. 698. i [14], vol. I, str. 573).

[41] Rad je naveden u »Graesse Tresor de livres rares et precieux« VI, II parte T—Z, Berlin 1922, str. 381, a spominje ga i Poggendorff ([37], pod Viviani).

spominje i analizira.[42] O vremenu kad Gradić i Viviani raspravljaju o Arastaeusovu geometrijskom radu možemo zaključiti po jednom pismu Vivianija upućenom Gradiću 1. kolovoza 1773. iz Firence. Pismo je sačuvano u Gradićevu manuskriptu ([6] str. 290d—292). Ono je rezultat prethodnih rasprava, a Viviani u njemu spominje podatke iz Pappusova rada, koji je 1588. godine objavio Comandino u Pasariju.[43] Međutim, ističe Viviani, bilo bi vrijedno usporediti ga s grčkim tekstom koji se nalazi u Vatkanskoj biblioteci. Iz Gradićeva rukopisa ([6], str. 255—258) saznajemo za niz podataka i pohvala na račun Aristaeusova geometrijskog rada.[44] Tako saznajemo da ga je Pappus istakao kao jednog od grčkih matematičara, geometra koji je poznavao geometrijsku analizu i služio se njome. Nadalje Gradić ističe vrijednost priređivanja (restauracije) Aristaeusova traktata »Loci solidi«.[45] U istom rukopisu ističe i opću vrijednost restauracija Apolonijevih radova, koje su s uspjehom uradili F. Vieta i M. Getaldić.[46] O geometrijskoj analizi nalazimo Gradićeve pribilješke na nekoliko mjesta u manuskriptu, tako na str. 273. navodi da se u analizi pretpostavi da je problem riješen, a zatim se traži veza između zadanih i traženih veličina, kao i sam postupak koji vodi prema rješenju. U tom napredovanju primjenjuju se propozicije, sve do aksioma, a taj se konačni rezultat onda primjenjuje u sintezi. O istome se govori i u »Povijesti matematike« ([16], str. 210), s time da se ističe da je metodu analize i sinteze upotrijebio autor čiji radovi čine »Treasury of Analysis« s ciljem da se dobije metoda za rješavanje problema u vezi s krivuljama. Među navedenima su rasprave »o konikama« Aristaeusa, Euklida i Apolonija. O Aristaeusu ima podataka još u nekim dijelovima Gradićeva manuskripta. Tako je vrlo interesantan rukopis na talijanskom jeziku s naslovom »Aristeo« ([6], str. 290d—291). Taj je rukopis prijepis, pisan rukom nekog prepisivača. Problem o kojem se raspravlja sličan je kao u Vivianijevu pismu. Naime, Pappus je Aristaeusu pripisao da je napisao pet knjiga »Loci solidi« (o mjestima tijela) i pet knjiga »Elementi conici«. Postoji i dilema je li Aristaeus napisao rad »O pet pravilnih tijela«, a zatm se postavlja i pitanje koliko Euklid duguje Aristaeusu itd. Slične dileme nalazimo i u današnjim povijestima matematike. Tako npr. Smith ([14], str. 94) smatra da Euklid mnogo duguje Aristaeusu pri pisanju 13. knjige »Elemenata«, te dodaje da je Aristaeus bio jedan od onih matematičara 4. st. p. n. e. koji je, inspiriran Platonom, mnogo pridonio nastanku Euklidovih i Apolonijevih radova. I u povijesti matematike Vaščenka i Zaharčenka ([13], str. 53) navodi se kako se iz prve Hypsiclove knjige »O pet pravilnih tijela« saznaje da je Aristaeus napisao sličan rad o jednakosti tih tijela. No, kako se taj Aristaeusov rad posljednji put našao kod Euklida, može se pretpostaviti da je sadržan u 13. knjizi »Elemenata«. To je čak i vrlo vjerojatno, zaključuje pisac povijesti matematike, jer je Euklid preradio i jedan drugi Aristaeusov rad, »Presjeci konika«. Slična nagađanja nalazimo i u povijesti matematike M. Cantora ([38], str. 245). Naime, on vrlo podrobno raspravlja o Aristaeusovim radovima, utvrđujući da je mogao živjeti negdje oko 320. god. p. n. e., a zatim navodi da je potpuno nepoznato tko je bio Aristaeus

[42] Kratka analiza tog rada nalazi se u ([13], str. 53).

[43] Isto izdanje je navedeno i u ([33], str. 152).

[44] Tekst rukopisa pisan je tako kao da ima namjenu predgovora nekom radu.

[45] »Loci solidi« je grčki naziv za presjeke stošca, vjerojatno iz stereometrijske definicije krivulja, kako je to učinjeno u jednom Menaechmusovu radu ([16], str 112).

[46] U dosta nečitkom tekstu navodi se: »Franciscus Vieta in suo Apollonio Gale de inclinationi... et quae a M. Ghetaldo de tactationibus in suo subtili opera tradido..., quo titules est Apollon. redi....«

mlađi. Cantor nadalje raspravlja o tvrdnji da je Aristaeus napisao dva različita rada sličnog sadržaja, jedno o »presjecima stošca«, a drugo o »mjestima tijela«. Smatra da se to može prihvatiti ako je prvom bio cilj da se istraže svojstva presjeka stošca, a drugom da se rješavaju problemi koji se mogu riješiti uz pomoć presjeka stošca. Na sličan su način o ovim problemima razmišljali Viviani i Gradić. Tako su restaurirajući Aristaeusov rad »Loci solidi« rješavali probleme primjenjujući svojstva presjeka stošca. Tako npr. u manuskriptu ([6], str. 246) nalazimo riješen ovaj problem[47]: Danu dužinu AB treba točkom C podijeliti na nejednake dijelove tako da diferencija kvadrata AC i CB prema pravokutniku istih dijelova ima zadani odnos AB:D. U tom problemu, a slično i u idućem (str. 248d—249), rabe se svojstva parabole, koja se prije no što se prijeđe na rješavanje navedenih problema dokazuju. Tako se npr. dokazuje ([6], str. 245): ako se zadana dužina AB podijeli točkom C na jednake dijelove i oko osi CB opiše parabola s fokusom u B, te ako se iz neke točke na paraboli, npr. D, spusti okomica na CB, tada za nožište te okomice F, koje dijeli dužinu AB na nejednake dijelove, uvijek vrijedi da je $AF^2—FB^2$ jednako kvadratu ordinate, tj. FD^2. Dokaz ovog stavka izvodi se iz svojstva parabole. Naime, dužina BD povučena iz fokusa B jednaka je AF, pa navedena tvrdnja slijedi iz pravokutnog trokuta FDB.

Gotovo je potpuno sigurno da je restauracija izgubljenih radova grčkog matematičara Aristaeusa bila vrlo težak problem. Podaci koje navodi Pappus i više su nego oskudni, te su se pri restauraciji uglavnom morale praviti pretpostavke. Vjerojatno je Aristaeusov rad, slično kao i neki Euklidovi radovi o »konikama«, zauvijek izgubljen, i to upravo zato što su bili nadomješteni Apolonijevim radom istog sadržaja, koji je svojim sadržajem sigurno nadvisio radove prethodnika. Restauracija koju je objavio Viviani ima samo značenje pokušaja da se, kako to navodi Gradić ([6], str. 255d), vrati u sjećanje rad zaboravljenog geometra, kome mnogo dugujemo za uvođenje predivne metode, metode, metode analize. Ujedno niz primjera navedenih u Gradićevu manuskriptu pokazuju interes S. Gradića za različite probleme geometrije.

5. GEOMETRIJSKO RJEŠAVANJE PROBLEMA EKSTREMA

Problem ekstrema bio je, pored problema određivanja tangente i problema kvadrature, jedan od važnijih poticaja istraživanjima koja su dovela do infinitezimalnog računa. Takve probleme nametnula su matematička i fizička istraživanja, a i tehnička praksa. Torricellijev učenik M. A. Ricci, kao dobar poznavalac francuskog jezika, bio je posrednik u dopisivanju s M. Mersennom. Preko Mersenna talijanski matematičari su se upoznali i s mnogim neobjavljenim radovima Fermata i Robervala, a posebno s novim metodama rješavanja ekstremnih vrijednosti. M. A. Ricci posebno se zainteresirao i s velikim oduševljenjem angažirao na rješavanju Fermatovih zadataka o ekstremnim vrijednostima, koje je Fermat rješavao računski, dok su talijanski matematičari davali prednost rješavanju geometrijskim postupkom u smislu starogrčkih metoda ([33], str. 140).[48] Naime, Fermatov postupak vodio je razradi jedinstve-

[47] U naslovu je navedeno »Problema primum (?) locos solidos«, a pisan je Vivianijevim rukopisom.

[48] J. E. Hofmann smatra da je i geometrijski postupak talijanskih matematičara jednako vrijedan.

ne metode rješavanja problema o ekstremima, dok je geometrijsko rješenje često dugotrajnije i svaki zadatak traži tom zadatku prilagođenu metodu. Međutim, ni geometrijsko rješenje nije bez vrijednosti, jer sam postupak, prije svega, čini rezultat razumljivijim, te je sigurno da su i takvi zadaci, riješeni posve geometrijskim putem, mogli pripomoći u pronalaženju opće metode, metode rješavanja ekstrema infinitezimalnim računom.

U Gradićevu manuskriptu nalazimo na nekoliko mjesta i takve zadatke, tj. zadatke u kojima se traži maksimum ili minimum. O njima je Gradić raspravljao s M. A. Riccijem, a i s H. Fabrijem. Rješenja koja daje Gradić u okviru su geometrijske metode. Ovdje ćemo spomenuti samo neke, kao npr. na str. 51d—53d manuskripta [6], gdje se rješava jedan vrlo stari problem. Naime, iz zadanih točaka A i B, koje se nalaze iznad pravca p, treba povući dužine do neke točke C na pravcu p, tako da je suma AC + CB minimalna.[49] Zakon refleksije svjetlosti bio je poznat Euklidu i Aristotelu (vjerojatno i Platonu), ali je Heron prvi dao geometrijski dokaz za jednakost kutova upadanja i odraza, kao posljedice Aristotelova principa »da se u prirodi ništa ne dešava dužim putem« ([16], str. 192). Vrlo sličan dokaz izveden je u Gradićevu manuskriptu. Međutim, ovdje je posebno interesantno to da rješavatelj proširuje problem na taj način ([6], str. 52d) što uzima da su zadane dvije točke A i C nad horizontalnom ravninom i konop zadane dužine. Na konop, koji visi između točaka A i C, treba postaviti uteg tako da bude u nekoj točki H, koja se nalazi na konopu, u najnižem mogućem položaju prema horizontalnoj ravnini. Zadatak se rješava konstruktivno, tako da se produži okomica AB prema G, zatim se od točke C prenese dužina konopa tako da siječe produženu okomicu AB u točki G, a zatim od točke A dužinu AH, tako da je kut kod A jednak kutu kod C. Tvrdi se da je točka H, koja je dobivena tako da je dužina CG presječena dužinom AH, u najnižem mogućem položaju i da je ujedno i točka ravnoteže za uteg koji po konopu može slobodno kliziti. Dokaz se prvo provodi geometrijski. Točkom H povuče se paralela s horizontalnom ravninom i dokazuje se da su trokuti ABH i GHB sukladni. Iz toga slijedi da je $AH = GH$, pa i dužina konopca $CG = AH + HC$. Budući da su kutovi upadanja i odraza jednaki, tj. $\sphericalangle AHB = \sphericalangle CHD$,[50] iz prethodnog slijedi da je $AH + HC$ minimum. To ke dokazuje i tako da se na dužini BD uzme bilo koja druga točka, npr. L, tad je $GL + LC = AL + LC$, no kako je $GL + LC > CG$, to je i $AL + LC > AH + HC$. Time je geometrijski dokaz proveden, a zatim slijedi i provjera pokusom. Na konop se postavlja uteg koji može slobodno kliziti. Pokus pokazuje da se uteg uvijek zaustavlja u najnižem položaju. Ako se uteg pomakne iz tog položaja (tako da se odmakne iz svog prirodnog položaja), ponovo se vraća u najniži položaj, i ne događa se, tvrdi Gradić, da se uteg podignut uvis u tom položaju zaustavi, nego se uteg zaustavlja u najnižoj točki H. Kad bi se, zaključuje Gradić, našao u nekoj drugoj točki na crti BD, npr. u L, to bi bilo moguće samo za duži konop od zadanog. Ovaj je zadatak, što se tiče geometrijskog rješenja i provjere rezultata pokusom, potpuno u duhu Galileieve metode. Naime, konkretan problem rješava se teoretski, a zatim se provjerava i pokusom, te je tek sklad jednog i drugog rješenje problema.

O mnogim drugim problemima iz ovog područja Gradić je raspravljao s H. Fabrijem. U Gradićevu manuskriptu nalazimo probleme (bez rješenja)

---

[49] Ovaj zadatak nalazimo vrlo slično riješen u radu V. Devidea ([39], str. 175).

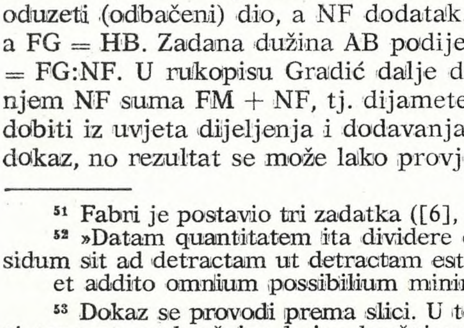
[50] Obično se pri izražavanju zakona refleksije uzimaju njihovi komplementi.

koje je postavio Fabri.[51] Jednog od njih Gradić rješava[52] ([6], str. 77d—78d) slično kao i u spomenutom primjeru, geometrijskom metodom, tj. konstruktivno. Zadatak je da se zadana dužina podijeli i ostatku doda neka druga dužina, tako da je ostatak prema odbačenom dijelu u istom omjeru kao isti odbačeni dio prema dodanoj dužini i da pritom suma ostatka i dodanog dijela bude minimalna. Pri rješavanju se prvo konstruira pomoćni jednokračni pravokutni trokut CDE i dužina CL kao suma njegovih stranica. Zadana dužina AB podijeli se tako da je CL:AB = CD:HB. Zatim se konstruira trokut FGI, sličan prvome, kojem je jedna od jednakih stranica HB (FI = FG = HB). Stranicom GI, kao polumjerom oko točke I, opiše se polukružnica i FI produži do M i N, tako da je MN dijametar. Prema uvjetu zadatka MF je ostatak, FG oduzeti (odbačeni) dio, a NF dodatak. Iz konstrukcije slijedi da je FM = AH, a FG = HB. Zadana dužina AB podijeljena je tako kako se traži, tj. FM:FG = = FG:NF. U rukopisu Gradić dalje dokazuje da je tim dijeljenjem i dodavanjem NF suma FM + NF, tj. dijameter NM najmanji od svih koji se mogu dobiti iz uvjeta dijeljenja i dodavanja.[53] Daje samo konstruktivno rješenje i dokaz, no rezultat se može lako provjeriti i diferencijalnim računom.[54] Iz toga

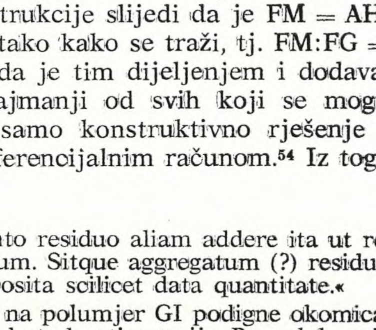
[51] Fabri je postavio tri zadatka ([6], str. 80).

[52] »Datam quantitatem ita dividere et segmento residuo aliam addere ita ut residum sit ad detractam ut detractam est ad additum. Sitque aggregatum (?) residuo et addito omnium possibilium minimum, suposita scilicet data quantitate.«

[53] Dokaz se provodi prema slici. U točki G se na polumjer GI podigne okomica, tj. tangenta na kružnicu, koja s kružnicom čini dva kuta kontingencije. Prvo dokazuje da je suma GF + FM veća od svih drugih kombinacija za točke na kružnici koje su iznad i ispod G. Tako za neku točku Q dokazuje da je QS + SM < GF + FM, jer je FS > QV. Naime, u pravokutnom trokutu QVG, kut QVG je unutar kuta od 45°, pa je manji od 45°, dok je kut kod Q komplement) veći od 45°. Iz toga slijedi da je stranica pravokutnog trokuta GV, koja koja leži nasuprot većem kutu, uvijek veća od stranice QV. Potpuno je isto, tvrdi Gradić, i za točke ispod G, npr. za točku R. Iz ovog (pomoćnog) dokaza može se pokazati da ako je AB podijeljena nekom drugom točkom, različitom od H, npr. u X, tada uvijek slijedi da je promjer nove polukru-



Sl. 3.



Sl. 4.

žnice (to je suma ostatka i dodanog dijela) uvijek veći od promjera prve, tj. NM. Ovaj se dokaz provodi tako da se nad dužinom AX podigne okomica XB (obje dužine zajedno su AB), spoji se zatim A s B i na njoj podigne okomica BR. Trokutu ABR opiše se polukružnica. Iz točke D, koja raspolavlja kvadrant, spusti se okomica DM. Iz (pomoćnog) dokaza slijedi da je DM + MA maksimum, dakle veće i od zadane sume BX + XA (tj. zadane dužine AB, koja je u rješenju jednaka GF + FM), pa je stoga i promjer prve polukružnice NM uvijek manji od promjera ove posljednje, tj. NF + FM < RX + XA.

[54] Ako zadanu dužinu AB = ZM označimo s »a«, a polumjer kružnice GI = ZG = r, tada iz trokuta ZIG slijedi da je $2r^2 = (a—r)^2$, pa je NM = 2a ($\sqrt{2}$—1). Do istog dolazi-

se može zaključiti o ispravnosti konstruktivnog rješenja, ali i uočiti razlika u složenosti i dužini izvođenja. I ovaj, a i slični problemi koje rješava Gradić, a i Fabri u svom objavljenom radu »De maximis et minimis in infinitum propositionem centuria« ([18], str. 51), rješavani su sintetičkom geometrijskom metodom, te u odnosu na radove npr. francuskog matematičara P. Fermata [86], što se tiče metode, zaostaju. Ipak, i oni znače neki prinos jer se postavljaju problemi koji traže nove metode rješavanja. Taj je rad čak i ispod razine rada M. A. Riccija, koji također geometrijski rješava slične probleme, ali je on zajedno sa svojim učiteljem E. Torricellijem pronašao općenitiju metodu određivanja ekstrema, koju dosljedno provodi u svojem radu »Geometrica exercitatio«.[55]

6. DOPRINOS S. GRADIĆA RICCIJEVOJ »EXERCITATIO GEOMETRICA«

O zajedničkom radu s M. A. Riccijem i drugima na mnogim prirodoznanstvenim problemima govori Gradić u posveti svojih disertacija [5] švedskoj kraljici Kristini.

M. A. Ricci, vrlo istaknuti matematičar toga vremena, napisao je nekoliko radova. Međutim, tiskan je samo jedan i to njegova »Geometrica exercitatio« [27]. Taj Riccijev rad bio je već i za njegova života izvanredno primljen. Tako su mišljenja J. Gregoryja (1638—1675), koji je tada živio u Padovi, i J. Collinsa (1625—1683) pridonijela da je Riccijev rad ponovo tiskan dvije godine kasnije, tj. 1668, i to kao dodatak vrlo značajnom radu N. Mercatora (1620—1687). Kasnije se taj Riccijev rad rijetko spominje, a pravu njegovu vrijednost istakao je Jos. E. Hofmann [33]. Za nas je vrlo važno da je Ricci svoj rad posvetio našemu S. Gradiću, ističući njegove sposobnosti i smatrajući ga sposobnim da o tom radu dade svoj sud. U posvetnom pismu Ricci, slično kao i Gradić, ističe svoje česte i vrlo ozbiljne i važne rasprave sa Stjepanom Gradićem, te vjeruje u njegovo vrlo strogo ispitivanje i moli ga za konačno mišljenje. Ako Gradićevo a i ostala mišljenja budu povoljna, nastojat će da se iznese na vidjelo i sve ostalo o čemu su raspravljali, a posebno o pravilima analitike, gdje će tridesetak propozicija Arhimeda, L. Valerija i drugih biti sadržano samo u jednoj. Ovo djelce, navodi Ricci, tiskano je samo u tolikom broju primjeraka da bi ga i ostali u Italiji i izvan nje mogli ocijeniti, te ističe svoje prijateljske veze i ulogu S. Gradića u njegovu nastajanju.[56] Sadržaj posvetnog pisma[57] ukazuje kako je S. Gradić u to vrijeme uživao velik ugled među matematičarima. Ovu činjenicu ističe i J. E. Hofman, ali kao svoj komentar dodaje da je Gradić na tom području ipak mogao samo osrednje utjecati ([33], str. 143—144).

---

mo i traženjem ekstrema diferencijalnim računom Ako je $AH = MF = x$ i $NF = b$, tada je $NM = x + b$. Iz uvjeta zadatka $x : (a—x) = (a—x) : b$ može se odrediti b, pa je $NM = y = x + \frac{(a—x)^2}{x}$. Ako se prva derivacija izjednači s nulom, tada je ekstrem za $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, pa se za NM dobije isti rezultat koji slijedi i iz Gradićeva konstruktivnog rješenja.

[55] Diferencijalnim metodama je već i Arhimed određivao ekstreme, ali ne znamo da li su već i u antici te metode imale primjenu. Njih su s upjehom obnovili i primijenili u 17. stoljeću A. A. Ricci i E. Torricelli. Torricelli je razradio metodu za određivanje ekstrema funkcija oblika $x^p (a—x)^q$ za $0 \leq x \leq a$ ([15], I dio, str. 128).

[56] »Interim hunc amicitia nostrae iampridem instituae, et literario praecipue commercio nunquamcoli intermissae, fructum iucundissimum feram . . .«

[57] Pismo je datirano u Rimu »Idus julij 1666«.

Ricci je na tom području počeo raditi mnogo prije nego što je objavio svoju »Geometrica exercitatio«. Tu činjenicu J. E. Hofmann dokazuje analizom mnogobrojnih pisama iz bogate korespondencije Riccija s Torricellijem. Naime, Toriccelli je bio Riccijev učitelj i on je Riccija zainteresirao za matematiku. Iz spomenutih pisama može se zaključiti da je Torricelli svog učenika vrlo cijenio. O mnogim pitanjima iz Riccijeva objavljenog rada već se raspravljalo u spomenutoj korespondenciji. Ricci je sebi postavio zadatak da prikaže metodu određivanja tangente na parabolu i hiperbolu i da pokaže kako se ista metoda (postupak) može proširiti i na elipsu i kružnicu. Naime, razvitak mehanike i astronomije u 16. i 17. stoljeću istakao je u prvi plan probleme integralnog istraživanja, kao npr. određivanje težišta, kvadratura, rješavanje mehaničkih problema kao što je istraživanje gibanja i sl., tako da je npr. problem određivanja tangente u početku bio manje zanimljiv. Slično tomu je i u antičko vrijeme bilo manje zadataka iz područja diferencijalnog računa. Tek u drugoj četvrtini 17. stoljeća situacija se bitno izmijenila u istraživanjima Descartesa, Torricellija, Fermata i drugih, sve do Newtona i Leibniza. Ricci je sudjelovao u raspravama o pitanju tangente preko svog učitelja Torricellija, kojemu je često bio i posrednik u raspravama s francuskim matematičarima zbog dobrog poznavanja francuskog jezika. U tom je smislu bio vrlo značajan dolazak M. Mersenna u Rim, koji je tom prilikom donio nekoliko interesantnih i još neobjavljenih radova Fermata i Robervala ([33], str. 140).

Riccijev rad »Geometrica exercitatio« ima samo 18 stranica, ali predstavlja kompletno, zaokruženo djelo. Osnova djela su definicije (ima ih pet), zatim slijede leme i teoreme koje se na osnovi definicija i lema dokazuju. Na kraju se rješavaju i dva problema koji imaju središnje mjesto u čitavom radu. Da je i Gradić sudjelovao pri formuliranju nekih dijelova navedenog rada, vidi se po brojnim primjedbama i bilješkama u vezi s tim radom koje se nalaze u njegovu manuskriptu [6]. Tako su npr. na str. 191d, 196d i 197 Gradićeve primjedbe u vezi s definicijama te prijedlog novih formulacija nekih od definicija, lema i teorema. S tim je u vezi i jedno pismo ([6], str. 198) bez potpisa autora, no prema sadržaju i rukopisu može se ocijeniti da je to pismo pisao M. A. Ricci i da je upućeno vjerojatno S. Gradiću. Također je u vezi s Riccijevim radom i jedno Gradićevo pismo upućeno francuskom matematičaru i astronomu Ismaelu Bulialdu[58] ([6], str. 126d—127d) iz Rima u Paris. Pismo je upućeno u veljači 1667. godine,[59] dakle samo nekoliko mjeseci po izlasku iz tiska prvog izdanja Riccijeve »Geometrica exercitatio«.

6.1. Prijedlozi S. Gradića za poboljšanje Riccijevih definicija i jedinici kao broju

Poslije posvetnog pisma, na početku svog rada (L 27, str. 5), Ricci daje pet definicija. U prve tri definira potenciju, sličnost produkta dviju potencija i homogenost produkta potencija. U četvrtoj definiciji definira se pojam »terminus«. Naime: »Terminos cum dico, intelligi volo duos numeros seu aequales seu inaequales, vel numerum et unitatem, vel duas unitates. Terminos inaequa-

---

[58] Interesantno je primijetiti da je u jednom pismu L. Burattini (talijanski konstruktor leća) pisao I. Bulialdu (Bouilliau) o »antičkom teleskopu«, koji se nalazi u Dubrovniku ([9], str. 41—42. i [10], str. 177).

[59] »idus febr. 1667.«.

les apello duos numeros inaequales, vel numerum et unitatem. Terminos autem aequales duos aequales numeros, vel duas unitates.« Ista ta definicija, samo s nešto izmijenjenim redoslijedom riječi, ali s istim značenjem nalazi se i u Riccijevu pismu ([6], str. 198 lijevo) u kojemu moli primaoca pisma da ispita navedene definicije (u pismu je navedena i peta definicija). Kraj pisma ukazuje na to da je jedan od problema na koji je naišao Ricci terminološke prirode i da se u vezi s tim Ricci želi posavjetovati s Gradićem. Problem je, kako se iz pisma dalje može zaključiti, riječ »terminus«, jer mnogi, naglašava Ricci, »quantitas nominant terminos«, no o tome »de alij eorum inter nos conferamus primo quoque tempore«. Ovaj svršetak pisma ukazuje na to da su usmene rasprave Riccija i Gradića vjerojatno česte, a i na to da su o problemima iz Riccijeva rada raspravljali i prije no što je rad objavljen. U vezi s navedenom problematikom iz pisma ostale su u Gradićevu rukopisu njegove vrlo interesantne primjedbe ([6], str. 191d). U primjedbama ističe da bi zbog preopširnosti trebalo izbjeći razlikovanje broja i jedinice, iako neki jedinicu ne smatraju brojem, već začetkom broja. Broj je ne samo više jedinica, smatra Gradić, nego i sama pojedina jedinica.[60] U vezi s tom primjedbom navodi i kako bi u tom slučaju imale glasiti pojedine teoreme. Tako npr. u prvoj teoremi umjesto »terminos aequales« stavlja »numeros aequales«, što pokazuje da Gradić time daje odgovor i na pitanje postavljeno u Riccijevu pismu u vezi s pojmom »terminus«. Dilema je li i jedinica broj ili nije bila je dugo vremena prisutna u mnogim raspravama. Vjerojatno ju je postavio još sam Euklid svojom definicijom broja.[61] No vrlo je vjerojatno da je ta dilema postojala i ranije.[62] Mnogi komentatori Euklida smatraju da Euklid jedinicu ne smatra brojem, a kao dokaz tome navode da dosljedno tumačenje pojma sastavljanja množine isključuje jedinicu.[63] Iako u Euklida na to pitanje nema izravnog odgovora, neki pronalaze indirektan, dokazujući da je već i Euklid smatrao da je jedinica broj.[64] Prema mišljenju drugih, vrlo je vjerojatno da je Boetius krivo interpretirao Nicomachusa, koji je jedinicu izbacio iz područja poligonalnih brojeva. Tako se u Boetiusovoj geometriji navodi: »Primum autem numerum id est binarum, unitas enim, ut in arithmeticis est dictum, numerum non est, sed fons et origo numerorum. . .«[65] Većina srednjovjekovnih autora slijedila je Boetiusa, i za njih jedinica nije broj.[66] Boetiusovo stajalište zastupao je i naš zadarski renesansni polihistor Federik Grisogono u svojim komen-

---

[60] »Numerum voco non solam pluritatem unitatem sed etiam ipsam unicam unitatem.«

[61] »Broj je množina sastavljena od jedinica« ([36], knj. 7, str. 41. i primjedba br. 3).

[62] I prema pitagorejskom učenju jedinica nije broj ([43], str. 18).

[63] Tako npr. Dirk Struik ([35], str. 91) navodi da je termin »aritmos« označavao samo prirodan broj, tj. količinu sastavljenu od jedinica, što znači, zaključuje Struik, da se »jedan« nije smatrao brojem.

[64] Npr. Bilimović kao dokaz citira 15. stavak 7. knjige Euklidovih »Elemenata« ([36], str. 42—43. i 50—51). Za neki broj, ističe Bilimović, Euklid daje teoremu s dokazom, a za jedinicu drugu s posebnim dokazom (deveta teorema prelazi u petnaestu ako je $a_1 = 1$). Iz toga komentator Morduhaj-Boltovskoj zaključuje da Euklid jedinicu ne smatra brojem. Međutim, ističe Bilimović, u 15. teoremi govori se o četvrtom broju a jedan od tih brojeva je jedinica te je prema tome broj, ali je Euklid smatra naročitim brojem, koji po njegovu mišljenju zahtijeva specijalan dokaz.

[65] Citat iz ([14], vol. II, str. 27).

[66] Kao npr. al Khowarizmi (825), Psellus (1075), Savasorda (1100), Joh. Hispalensis (1140), Rollandus (1424), ([14], str. 27), dok npr. Oresme (1360) jedinicu smatra pravim brojem ([36], knj. 7, str. 42).

tarima Euklida: »Jedinica je, naime, u mogućnosti prema mnoštvu, ali ona sama još se ne smatra brojem (mnoštvom)« ([40], str. 83). Slična je situacija i u prvim tiskanim knjigama, kao npr. u radu L. Paciolija (1494. god.).[67] Među prvima, krajem 16. stoljeća, S. Stevin pokušava dokazati da je jedinica broj. Tvrdi da je dio iste prirode kao i cijelo, te je odatle i jedinica, koja je dio »zbira jedinica«, broj. Na to Antoine Arnauld (1612—1694) odgovara da je argument vrlo loš, jer npr. i polukružnica nije kružnica. Interesantno je da i u nekim arapskim komentarima Euklida nalazimo mišljenje da jedinica nije broj. Tako npr. u komentarima desete knjige Euklidovih elemenata Abua Jafara al-Khazina (oko 960. god.) nalazimo da se sumjerljivi brojeva mjere brojem, ali različitim od jedinice, zato što je jedinica mjereći veličine veličina, dok jedinica mjereći brojeve nije broj (L 43, str. 18). Školske aritmetike su uglavnom zadržale Boetiusovo mišljenje sve do kraja 18. stoljeća ([14], vol. II, str. 26—29). U nekim našim školama još i početkom 19. stoljeća u predavanjima profesora nalazimo: »Ergo unitas non est numerus.«[68]

Upravo zbog tih dilema, koje je Ricci vjerojatno znao, a i s obzirom na to da je to u tadašnjoj literaturi uglavnom bilo prihvaćeno, Ricci razlikuje broj i jedinicu.[69] Gradić pak, tražeći prema Riccijevoj molbi bolje rješenje za definicije, uočava njihovu preopširnost, pa u tom smislu smatra da je i jedinica broj, a tada je nepotrebno uvoditi pojmove »terminus aequales« i »terminus inaequales«, od kojih prvi označava dva jednaka broja ili dvije jedinice, a drugi dva različita broja ili broj i jedinicu, već je dovoljno uvesti samo »numerus aequales« i »numerus inaequales«. No Ricci nije prihvatio Gradićev prijedlog, vjerojatno držeći se, s jedne strane, Euklida i, s druge strane, pridržavajući se uobičajene terminologije.[70]

Između šest Riccijevih lema spomenut ćemo treću jer je nalazimo i u Gradićevoj interpretaciji, a ona je zapravo samo preuređena za određenu primjenu u sklopu Riccijeva rada treća teorema iz desete knjige Euklidovih »Elemenata«, odnosno ona je i analogna zadatku koji je izložen u VII, 2.[71] U Riccijevu tekstu ona glasi: »Si data recta linea secetur in ratione terminorum inaequalium, et dividendo, fiat segmentorum differentia ad minus segmentum, ut differentia terminorum ad minorem terminum; haec inventa proportionalitas vel ipsa erit proportionalitas aequalitatis, vel alia, in quam incidemus, iterum dividendo, et sic deinceps; et in ea terminorum differentia aequabitur minori termino, et differentia segmentorum segmento minori« ([27], str. 6—7). Kao primjer Ricci navodi dijeljenje dužine AB točkom C u omjeru 9:6. Naime, ako razdjelimo, kako se traži, neku dužinu na nejednake dijelove u omjeru cijelih brojeva AC:CB = 9:6 i ako se primijeni operacija »dividendo«: (AC—CB):CB = 3:6, budući da to nije »proportio aequalitatis«, postupak se na-

---

[67] »Et essa unita no e numero: ma ben principio di ciascun numero« ([14], vol. II, str. 28).

[68] Taj podatak nalazimo u rukopisu »Institutiones Arithmeticae (I semestri), Fratris Adjuti Kosznits, Illokini in Syrmio 1826«, koji se nalazi u franjevačkom samostanu u Iloku (Hrv. franjevačka provincija sv. Ćirila i Metoda, Samostanski arhiv Ilok, Školstvo III, Filozofsko-teološka skripta, svežanj A—11, broj spisa 118).

[69] Tako na str. 12. [27]: »Si loco duorum numerorum detur numerus, et unitas, sit similis constructio...«

[70] Ricci navodi ([6], str. 108): »...quando Euclides etiam in definit p^{a}5^{i}elemetorum, quantitas nominant terminos, ut optime nostri«.

[71] U X,3 se za dvije sumjerljive veličine određuje njihova najveća zajednička mjera, a u VII,2 se za dva broja koji nisu relativno prosti također određuje njihova najveća zajednička mjera.

stavlja, te se ponovnom primjenom istog postupka na isti razmjer dolazi konačno do DE:AD = 3:3, što je »proportio aequalitatis«.[72] Tim se postupkom uvijek na kraju dobije da je razlika »terminusa« jednaka manjem »terminusu«, a razlika dužina jednaka manjoj dužini. Kao dokaz da je taj postupak uvijek konačan, Ricci navodi da je razlika dvaju brojeva ili broja i jedinice uvijek broj ili jedinica. Postupak se ne može nastaviti »in infinitum«, jer »unitas in terminis sunt finitae« (L 27, str. 7). U istoj lemi Gradić ([6], str. 191d) umjesto »terminus« uvodi samo »numerus« (ne razlikuje jedinicu i broj) i na nekoliko primjera obrazlaže postupak. Ta je lema vrlo važna za dokaz treće teoreme u Riccijevu radu. Njome se dokazuje da je produkt potencija segmenta dužine AB, tj. $AC^p \cdot CB^q$ maksimalan na dužini AB ako je ona podijeljena točkom C tako da je AC:CB = p:q.

Ako ocjenjujemo ulogu S. Gradića u odnosu na navedena pitanja, možemo istaknuti da je u smislu onoga što su često isticali i Ricci i Gradić nastojao ukloniti preopširnost definicija. S tim u vezi zalagao se i da jedinica uđe u pojam broja, što u to vrijeme još nije bilo općenito prihvaćeno.

6.2. O tangenti semikubne parabole i diskusija s francuskim matematičarom i astronomom Ismaelom Boulliauom

Poslije definicija, lema i dokaza nekoliko teorema Ricci u svom radu »Geometrica exercitatio« prelazi na određivanje tangente na tzv. »više presjeke stošca«. Dokaze temelji na prethodno dokazanoj teoremi o maksimumu produkta potencija na zadanoj dužini. Osvrnut ćemo se samo na udio u kojem određuje tangentu na tzv. »više parabole« oblika $\left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{x}{a}\right)^q$ jer se i Gradićevo pismo francuskom astronomu I. Boulliauu odnosi na to pitanje. Iako Ricci razmatra konkretan primjer semikubne parabole, tj. parabole gdje je p = 2 i q = 3 ([27], str. 15), može se uzeti da izvod važi i općenito.[73] Iz pisma Torricelli-Ricci može se zaključiti da se Ricci tim pitanjem i samostalno bavio već 1645. godine. Tako u pismu od 2. travnja 1645. godine Ricci priopćava da je odredio tangentu za parabole, ali da još uvijek nema dovoljno sigurnosti, a već nekoliko mjeseci kasnije dodaje da se isti postupak može primijeniti za elipse i parabole ([33], str. 167). Slika parabole $\left(\frac{y}{b}\right)^3 = \left(\frac{x}{a}\right)^2$ u Riccijevu radu (str. 15) nacrtana je samo u jednom kvadrantu (samo jedna grana parabole,[74] a osim toga da bismo je predočili onako kako je to danas uobičajeno, moramo je i zrcaliti oko jedne osi, a zatim i zarotirati za 90°. AB je os, a A vrh parabole. Tngentu treba povući zadanom točkom C. FC je tangenta, tvrdi Ricci, ako je točka F određena tako da je FD:AD = 3:2 (omjer eksponenata ordinate i apscise), odnosno FA:AD = 1:2. Dokaz da je FC tangenta zasniva se na prethodno dokazanim teoremama. Naime, produkt $FA^1 \cdot AD^2$ maksimalan je na dužini FD.[75] Ako se izabere bilo koja točka na osi parabole, npr. G, i povuče or-

---

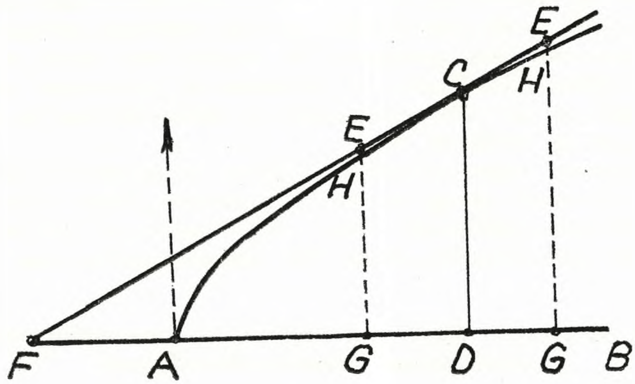
[72] AC—CB = AD i CB = DC, pa je AD:DC = 3:6. Iz toga nadalje: DC:AD = 6:3 i »dividendo« (DC—AD) : AD = 3:3.

[73] Slično zatim i na konkretnom primjeru određuje i tangentu za tzv. »više hiperbole« ([27], str. 17—18).

[74] Samo za pozitivne vrijednosti apscise.

[75] Maksimalan je prema teoremi br. 3, jer je dužina FD točkom A podijeljena tako da je FA:AD = 1:2.

dinata GH, ona će, ako se produži, sjeći tangentu FC. Produkt $FA^1 \cdot AG^2$ na dužini FG neće biti maksimalan jer točka A ne dijeli dužinu FG u omjeru eksponenata 1:2. Iz toga slijedi, zaključuje Ricci, da je $FA \cdot AD^2 : FD^3$ veće od $FA \cdot AG^2 : FG^3$. U dokazivanju dalje primjenjuje transformacije razmjera (permutando), omjer apscisa i ordinata prema definiciji zadane parabole, te rela-



Sl. 2.

cije koje izlaze iz sličnosti trokuta. Na kraju se zaključuje da je bez obzira na to gdje izaberemo točku G uvijek HG < EG, tj. točka E je uvijek izvan dane krivulje.[76]

Već je spomenuto da je taj Riccijev rad pobudio velik interes i da je ubrzo ponovo tiskan. O njemu piše i S. Gradić u pismu upućenom I. Boulliauu. Uz pismo datirano 13. veljače 1667. godine pridodan je i dodatni list ([6], str. 127—127d) s Gradićevim prijedlogom za jasniji dokaz tangente parabole. Iz pisma se može zaključiti da je Gradić s Boulliauom već i ranije raspravljao, a ovom prilikom izražava svoje zadovoljstvo i zahvalu za izraženo povoljno mišljenje o Riccijevu radu. No ipak, primjećuje Gradić, možda neki dijelovi izlaganja pričinjaju nedovoljno vještom čitaocu teškoće zbog »prijekog puta« u dokazivanju. To se odnosi na dokaz za tangentu parabole, no isto vrijedi i za druge presjeke stošca. U dodatnom listu ističe da je Ricci ovo ispitivanje tangente parabole izveo »directe«, a ne dedukcijom.[77] Gradić smatra da bi dokaz

---

[76] Ako prema slici uvedemo koordinate točaka: $F(-\frac{a}{2}, 0)$, $A(0,0)$, $D(a,0)$, $C(a,b)$, $G(x,0)$, $H(x,y)$ i $E(x,j)$, tada prema Riccijevu dokazu slijedi:

$$\frac{\left(\frac{a}{2}+x\right)^3}{\left(\frac{a}{2}+a\right)^3} = \left(\frac{j}{b}\right)^3 > \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{y}{b}\right)^3,$$

pa je $\left(\frac{j}{b}\right)^3 > \left(\frac{y}{b}\right)^3$ a iz toga konačno i $j > y$, ako je $x \neq 0$.

[77] Radi se o »direktnoj metodi« jer se dokazuje svojstvo tangente na neku krivulju ako je dokazan ekstrem, za razliku od »deductio ad absurdum«, što bi bio indirektan dokaz.

bio jasniji kad bi se dužina FG podijelila točkom K[78] u istom omjeru kao i dužina FD, tj. u omjeru 1:2, jer bi tada i $FK \cdot KG^2$ bio na dužini FG maksimalan. Da bi dokaz bio lakše razumljiv, sve potrebne relacije ispisuje u četiri razmjera, a za svaku daje i dodatna tumačenja.[79] Osnovna, polazna relacija iz koje izvodi dokaz jest $FK \cdot KG^2 > FA \cdot AG^2$, a to slijedi iz toga što $FA \cdot AG^2$ nije maksimum na dužini FG. Iz razmjera primjenom navedene nejednadžbe dokazuje da je $EG > HG$.[80] Iz toga Gradićeva dokaza očito je da se ne razlikuje bitno od onog u Riccijevu radu, osim što postupnije i preglednije vodi konačnom zaključku. Iz toga se može zaključiti da Gradić dobro poznaje Riccijev rad i da mu pomaže u tom radu i, s druge strane, da on o tom radu raspravlja s I. Boulliauom, vrlo poznatim matematičarom tog vremena. Zanimljivo je da se Gradić brine i o uspjehu toga rada, o ocjeni i o prihvatu na koji nailazi. To svakako još više govori o prijateljskim vezama s M. A. Riccijem, ali i o tome da je i Gradić na neki način sudjelovao u nastanku toga rada.

7. ZAKLJUČAK

Stjepan Gradić bavio se mnogim problemima. O opsegu njegova rada govore mnoga brojna pisma i rukopisi, kojih se dio nalazi u Vatikanskoj biblioteci skupljen u tridesetak svezaka. Prvi poticaj i zanimanje za matematiku potječu vjerojatno još iz Dubrovnika. Naime Gradićev je prvi učitelj I. Tudišević (Tudisić) bio odličan matematičar i prijatelj M. Getaldića. Međutim, tek dolaskom na studij teologije u Rimu, kad se našao u krugu vrsnih matematičara, koji su bili pod utjecajem Galileievih učenika Torricellija i Castellija, počeo se i samostalno baviti geometrijom. Na kasniji njegov rad i razvitak bitno je utjecalo formiranje znanstvenoga kruga švedske kraljice Kristine i neposredni doticaji s najpoznatijim talijanskim matematičarima i fizičarima, kao s M. A. Riccijem, H. Fabrijem, V. Vivianijem i A. Borellijem.

Poseban je interes pokazivao za djela M. Getaldića. Cijenio je Getaldićeve restauracije Apolonija, smatrajući da one moraju biti vjerne originalu čak i metodološki. Uočio je i isticao vrijednost Getaldićeva »De resolutione et compositione mathemtica«. U sredini gdje se više cijenila antička geometrija, bio je pored M. A. Riccija jedan od rijetkih koji je isticao vrijednost Vietinih specijesa i algebarske analize. U tom se smislu uključio među one koji su provodili reinterpretaciju geometrijskih problema na jezik Vietine algebre. U suradnji s V. Vivianijem radio je na restauraciji izgubljenih radova starogrčkog geometra Aristaeusa. Surađivao je i u nastanku Riccijeva rada »Geometrica exercitatio«, premda Ricci nije prihvatio sve njegove primjedbe, kao npr. u vezi s definicijom jedinice kao broja. Bez obzira na to što je njegov doprinos matematici, kako se to može zaključiti, najčešće samo u toku progresivnih nastojanja, ipak treba istaknuti da je u krugu u kojem je djelovao imao zna-

---

[78] U primjerku Riccijeva rada koji se nalazi u Vatikanskoj biblioteci (Vat. lat. 6965) na odgovarajućoj slici parabole (str. 15) rukom je upisana točka K.

[79] Razmjeri su numerirani s 1—4: 1. $FA^1 \cdot AD^2 : FK^1 \cdot KG^2 = FD^3 : FG^3$, 2. $FD^3 : FG^3 = CD^3 : EG^3$, 3. $AD^2 : AG^2 = FA \cdot AD^2 : FA \cdot AG^2$, i 4. $FA \cdot AD^2 : FA \cdot AG^2 = CD^3 : HG^3$. Za svaki razmjer daje se i tumačenje. Tako se za prvi ističe da su dužine FD i FG točkama A i K podijeljene tako da je $FA:AD = FK:KG = 1:2$, itd.

[80] $\frac{FA \cdot AD^2}{FA \cdot AD^2} < \frac{FK \cdot KG^2}{FA \cdot AG^2}$, zatim $\frac{CD^3}{CD^3} < \frac{EG^3}{HG^3}$ i konačno: $EG > HG$.

čajnu ulogu. Njegov doprinos treba promatrati i cijeniti i u odnosu na sredinu iz koje je potekao, jer je veći dio svojih snaga usmjerio u interesu svoje Dubrovačke Republike.

LITERATURA

[1] Stjepan Gradić: Peripateticae philosophiae pronunciata disputationibus proposita (bez mjesta i godine izdanja).

[2] Đuro Körbler: Život opata Stjepana Gradića, Monumenta spectantia, sv. 37, Zagreb 1915.

[3] Žarko Dadić: Stjepan Gradić o problemima gibanja, Matematički vesnik 5(20), sv. 4, Beograd 1968.

[4] Miroslav Kurelac: Suvremenici i suradnici I. Lučića, Zbornik historijskog instituta JAZU, vol. 6, Zagreb 1969, str. 133—142.

[5] Stjepan Gradić: Dissertationes physico-mathematicae quatuor, Amstelodami 1680.

[6] Quaedam meditationes Geometricae diversis temporibus a me Stephano Gradio factae, manuskript, Biblioteca Apostolica Vaticana, codex Vat. lat. 6921.

[7] Žarko Dadić: Gradić's Treatise on the Direction of a Boat with a Rudder, Proceedings, Section B, The Royal Society of Edinburgh, Vol. 73, Edinburgh 1972.

[8] Mladen Dadić: Rani filozofijski rad Stjepana Gradića, Dubrovnik XIII/2, Dubrovnik 1970.

[9] Žarko Dadić: Položaj matematike, fizike i astronomije u kulturnoj prošlosti Dubrovnika i doprinos Dubrovčana tim znanostima, Rasprave i građa za povijest nauka, Zagreb 1969.

[10] M. D. Grmek: Getaldić, Prodanelli et le telescope catoptrique a Dubrovnik, Radovi međunarodnog simpozija Geometrija i algebra početkom 17. stoljeća, Povodom 400-godišnjice rođenja M. Getaldića, Zagreb 1969.

[11] Evangelista Torricelli: Opere, Vol. I—IV, Faenza 1919.

[12] Stjepan Gradić: Disputatio de opinione probabili cum P. Honorato Fabri Soc. Iesu theologo, Romae 1678.

[13] Veščenko-Zaharčenko: Istorija matematiki, Istoričeskij očerk razvitija geometrii, Vol. I, Kiev 1883.

[14] D. E. Smith: History of mathematics, Volume I i II, Dover publications, New York (bez godine izdanja).

[15] Istorija matematiki (redakcija A. P. Juškevič), tom II, Moskva 1970.

[16] Carl Boyer: A history of mathematics, New York - London - Sydney 1968.

[17] Luca Valerio: Qudratura parabolae per simplex falsum, Romae 1606. (Bibl. Vat. Barberini N VII 142, int. 2).

[18] Emil A. Fellmann: Die mathematischen Werke von Honoratus Fabry, Physis, Rivista di storia della scienza, Vol. I, Fasc. I e II—1959.

[19] Hrestomatija po istorii matematiki (pod redakciej A. P. Juškeviča), »Prosveščenie«, Moskva 1977.

[20] Ruđer Bošković: O zakonu kontinuiteta i njegovim posledicama u odnosu na osnovne elemente materije i njihove sile, Predgovor i komentar napisao i prevod stručno redigovao E. Stipanić, Matematički institut, Klasični naučni spisi, Nova serija, knjiga 1(16), Beograd 1975.

[21] De vita, et factis, dictis, dictisque Petri Benessae Ragusini, comentarius a Stephano Gradio eius sororis filio conscriptus, rukopis, Vat. lat. 6905.

[22] Žarko Dadić: Oživljeni Apolonije Marina Getaldića, Sabrana djela M. Getaldića, I, Komentare i predgovore djelima napisao, prijevod revidirao i izdanje uredio Žarko Dadić, Zagreb 1972.

[23] Marini Ghetaldi Opera omnia, redactor Žarko Dadić, Institut za povijest prirodnih, matematičkih i medicinskih znanosti JAZU, Zagreb 1968.

[24] Žarko Dadić: Zbirka različitih problema Marina Getaldića, Sabrana djela M. Getaldića, I, Zagreb 1972.

[25] Josip Balabanić i Žarko Dadić: Pismo švicarskog matematičara Paula Guldina Marinu Getaldiću, Anali Historijskog odjela Centra za znanstveni rad JAZU u Dubrovniku, svezak XV—XVI, Dubrovnik 1978.

[26] Mirko Dražen Grmek: Nekoliko svjedočanstava o Marinu Getaldiću i odjecima njegova rada, Rasprave i građa za povijest nauka, Zagreb 1969.

[27] Michaelis Angeli Ricci Geometrica exercitatio, Romae 1666, Biblioteca Apostolica Vaticana, Vat. lat. 6965.
[28] Žarko Dadić: Utjecaj Marina Getaldića na Michelangela Riccija, Dijalektika, br. 4, Beograd 1968.
[29] Algebra del sig. Michael Angelo Ricci poi Diacono cardile, rukopis, Bibl. Apost. Vaticana, Vat. lat. 6901 i Vat. lat. 6965.
[30] Žarko Dadić: Povijest matematike i nastava matematike, Zavod za unapređenje osnovnog obrazovanja SRH, Zagreb 1971.
[31] Žarko Dadić: Razvoj matematike, Ideje i metode egzaktnih znanosti u njihovu povijesnom razvoju, Moderna matematika, Školska knjiga, Zagreb 1975.
[32] Ernest Stipanić: Getaldićev »Conspectus resolutionis et compositionis«, Dijalektika, br. 1, Beograd 1972.
[33] J. E. Hofmann: Über die Exercitatio geometrica des M. A. Ricci, Centaurus, 1963, vol. IX, str. 139—193.
[34] Ch. Huygens: Oeuvres completes, I—XX.
[35] Dirk J. Strojk (Struik): Kratak pregled istorije matematike, Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd 1969.
[36] Euklidovi elementi, preveo i komentar dodao Anton Bilimović, Beograd 1949—1957.
[37] Poggendorff: Biographische-literarisches handwörterbuch, Leipzig 1863.
[38] Moritz Cantor: Vorlesungen über Geschichte, Leipzig 1907, Bd 1.
[39] Vladimir Devidé: Elementarno rješavanje nekih problema o ekstremima, Razgovor o matematici, Školska knjiga, Zagreb 1973.
[40] Ernest Stipanić: Matematički pogledi Federika Grisogona, Zbornik radova o Federiku Grisogonu, Zadar 1974.
[41] Ernest Stipanić: Marin Getaldić i njegov rad u matematici i fizici, Institut za povijest prirodnih, matematičkih i medicinskih znanosti JAZU, Zagreb 1969.
[42] E. T. Bell: Veliki matematičari — Život i dostignuća velikih matematičara od Zenona do Poincara, Znanje, Zagreb 1972.
[43] G. P. Matviebskaja: Desjataja knjiga Načal Euklida u srednevekovnih arabskih kommentarijah, Matemat. i astr. v trudah učenih srednevekovnog vostoka, Taškent 1977.

Zdravko Faj

STJEPAN GRADIĆ'S OPINIONS ON SOME QUESTIONS IN MATHEMATICS

Summary

Stjepan Gradić (1613—1683), born in Dubrovnik, was an erudite with very wide interests. He was concerned with problems in mathematics and the author analyzes some notes from his manuscript »Quaedam meditationes Geometricae diversis temperibus a me Stephano Gradio factae«, conserved in Vatican library, codex Vat. lat. 6921.

He cooperated with some of the most eminent Italian mathematicians. In solving the problem of the surface of parabola he asked Torricelli for the opinion, most probably with help of a friend. He showed a great interest for

the works of M. Getaldić, especially for the one called »De resolutione et compositione mathematica«. In the atmosphere where the antique geometry was much more appreciated, Gradić was one of the rare scientists who emphasized the value of Vieta species and the algebraic analysis. He worked together with V. Viviani on restoration of the ancient Greek geometrician Aristaeus's works. Stjepan Gradić also contributed to Ricci's work »Geometrica exercitatio«, though Ricci did not entirely accept Gradić's remarks.

Although his contribution was mostly in acceptance of progressive tendences, it has to be stressed that he played an important role in his environment. His contribution should also be observed in relation to the surroundings where he came from, for the most of his energy and strength he addressed to the interests of the Dubrovnik Republic.