Žarko Dadić
Josip Balabanić

PRVA VERZIJA GETALDIĆEVIH RESTAURACIJA DVAJU APOLONIJEVIH PROBLEMA DOSTAVLJENA GALILEJU

O znanstvenom rezultatu učenjaka vrlo često moramo suditi na temelju konačnog teksta koji je objavljen. Iz tog teksta međutim ne možemo ništa znati o procesu nekog otkrića ili rješenja koje je tu sadržano. Često nam dobro dođe poznavanje rukopisa koji je u nešto ispravljenom obliku objavljen, jer i to donekle upozorava na tok razmišljanja, a i nekih prvotnih kolebanja. Znatno je međutim važniji tekst koji je tek prva verzija rješenja, a koje je potaklo rješenje u objavljenom djelu.

Getaldićeve restauracije Apolonijevih djela istražene su i istaknuta je njihova vrijednost.[1] Nedavno je u Galilejevoj ostavštini pronađen tekst[2] prvotnog Getaldićevog rješenja prvih dvaju od pet Apolonijevih problema o nagibima koje je Getaldić formulirao na temelju Papusova Matematičkog zbornika. Tiskano Getaldićevo djelo koje sadržava rješenja prvih četiriju Apolonijevih problema izašlo je pod nazivom *Apollonius redivivus* god. 1607. u Veneciji. Ne znamo točno kad je Getaldić ta rješenja poslao Galileju, jer nije sačuvano popratno pismo, ali je to svakako bilo prije god. 1607. kad je objavljeno djelo.

Getaldić je Galileja upoznao u doba svojega boravka u Italiji prije god. 1603. kad se vratio u Dubrovnik. S njim se dopisivao, ali se ne zna kako često, jer su sačuvana samo dva Getaldićeva pisma Galileju, i to od 20. veljače 1608. i od 15. ožujka 1614.[3] Vrlo je vjerojatno da je Getaldić ta svoja rješenja poslao Galileju u doba svojega boravka u Italiji ili neposredno nakon povratka u Dubrovnik god. 1603. Razlog zašto je Getaldić poslao ova svoja rješenja Galileju potpuno je jasan. On je htio znati Galilejevo mišljenje o svojim rješenjima, kao što je mišljenje od njega tražio i za objavljeno djelo *Apollonius redivivus, liber secundus,* koje je izašlo u Veneciji god. 1613, a koje mu je poslao s popratnim pismom od 15. ožujka 1614.

Kako je Getaldić dva problema čija je rješenja poslao Galileju rješavao u dva objavljena djela, i to u *Apollonius redivivus* god. 1607. i u posthumno objavljenom djelu *De resolutione et compositione mathematica* god. 1630,

---

[1] Žarko Dadić, Getaldićeve restauracije Apolonijevih djela i utjecaji na kasnije restauratore, *Dijalektika,* VI/1, Beograd 1971, str. 137—151.

[2] Biblioteca nazionale centrale, Firenze, Gal. 110, pp. 6r—8r.

[3] Kod nas ih je objavio u originalu i prijevodu Ernest Stipanić, Dva pisma Marina Getaldića Galileju, *Nastava matematike i fizike* VI/3—4, Bograd 1957, str. 197—205.

to sada raspolažemo s tri varijante rješenja tih problema, koje nam omogućuju upoznavanje geneze Getaldićeva rada na tim restauracijama. Kao što je to već ranije istaknuto,[4] rješenje god. 1607. u okviru je starogrčke sintetičke metode, a god. 1630. u okviru Vièteove algebarske analize. Razlog različitih metoda koje su upotrijebljene u ta dva tiskana djela sastoji se u tome što je u prvom Getaldić htio restaurirati Apolonijevo djelo u okviru metode koju je Apolonije vjerojatno primijenio u originalnom djelu, a u drugom je te probleme upotrijebio unutar drugačije metodološke koncepcije. Budući da rješenja poslana Galileju imaju istu svrhu kao i tiskano djelo god. 1607, jasno je da su i problemi rješavani sintetičkom metodom. Premda posjedujemo samo rješenja prvih dvaju problema, ipak svako od njih omogućuje da se izvede neke zaključke o Getaldićevom radu na tim restauracijama.

Prvi od tih problema slobodno glasi u prijevodu: U zadanoj kružnici upisati dužinu zadane veličine tako da ona ili njezin produžetak prolaze zadanom točkom. Getaldić ističe dva slučaja problema koja rješava posebno. Jedan od njih je slučaj da je zadana točka izvan zadane kružnice, a drugi da je unutar nje. Sačuvani tekst prvotnog rješenja prvog slučaja ne razlikuje se bitno od objavljenog teksta god. 1607. Doduše postoje u tiskanom tekstu neke izmjene u tekstu, ali je način rješavanja isti u oba slučaja. Tekst rješenja drugog slučaja razlikuje se međutim znatno u rukopisnom i objavljenom tekstu i iz toga se mogu izvesti neki zaključci, jer se razlika sastoji u drugačijem načinu rješavanja, iako u oba slučaja u okviru sintetičke metode. Ako se usporede rješenja tog slučaja u djelu objavljenom god. 1607. i u djelu objavljenom god. 1630, vidi se, međutim, da su ona gotovo istovjetna u konstrukcijskom dijelu. Rješenje u djelu iz god. 1630. sadržava najprije algebarsku analizu iz koje se izvlači porizam. Sinteza problema, odnosno konstrukcija, izvodi se uz pomoć porizma. U sintetičkom rješenju iz god. 1607. ne poziva se na porizam u izvođenju konstrukcije, ali se ona izvodi isto tako kao da porizam postoji. To nije nedostatak u konstrukciji u djelu iz god. 1607, jer je porizam, kao što je poznato, samo vodič u konstrukciji, a dokaz za konstrukciju se donosi posebno.

To pokazuje potpuno jasno da se Getaldić koristio algebarskom analizom u rješavanju Apolonijevih problema, kao što su već pretpostavili Horsley i Favaro,[5] iako ona nije bila vidljiva u Getaldićevu rješenju. To je bilo potvrđeno i Guldinovim pismom Getaldiću od 24. veljače 1617.[6] Međutim, nikad nije moglo to biti toliko vidljivo kao u ovom slučaju, jer se pokazuje iz teksta koji je Getaldić dostavio Galileju da je postojalo prvotno drugačije sintetičko rješenje koje nije u vezi s algebarskim rješenjem, i koje nije tako elegantno kao ono kasnije.

Drugi problem koji je Getaldić poslao Galileju glasi u slobodnom prijevodu: Između zadane kružnice i pravca okomitog na jedan njezin promjer

---

[4] Ž. Dadić, rad naveden u bilješci 1.

[5] S. Horsley, Apollonii Pergaei inclinationum libri duo, Oxonii 1770, str. 103., A. Favaro, Amici e corrispondenti di Galileo Galileo, XXIV. — Marino Ghetaldi, *Atti del Reale istituto veneto di scienze, lettere ed arti,* Anno accademico 1909—1910. Tomo LXIX, parte seconda, str. 317.

[6] Josip Balabanić, Žarko Dadić, Pismo švicarskog matematičara Paula Guldina Marinu Getaldiću, *Anali Historijskog odjela Centra za znanstveni rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Dubrovniku,* sv. XV—XVI, Dubrovnik 1978. str. 87—96.

treba postaviti dužinu zadane veličine koja sama ili njezin produžetak prolazi krajnjom točkom zadanog promjera. Usporedba prvotnog teksta rješenja sačuvanog u Galilejevoj ostavštini i objavljenog teksta u djelu *Apollonius redivivus*. god. 1607. pokazuje da je Getaldić izvršio znatne promjene prvotnog teksta prilikom objavljivanja rješenja. Te promjene nisu samo u načinu rješavanja problema nego i u razlikovanju novih slučajeva problema. U tekstu koji je Getaldić poslao Galileju predvidio je samo tri slučaja, dok ih je u objavljenom tekstu naveo pet.

Najveća promjena je u drugom slučaju prvotnog teksta koji je Getaldić poslao Galileju. Naime, upravo na tom primjeru možemo pratiti proces Getaldićeva rješavanja tog problema. Radi se o slučaju kad zadana okomica siječe produžetak promjera kružnice. U prvotnom tekstu je Getaldić tražio da se zadana dužina postavi između zadane okomice i konveksne strane kružnice. U tiskanom tekstu on traži da se pored ovog slučaja uzme u obzir i slučaj u kojem se zadana dužina postavi i između konkavne strane kružnice i okomice, ali tako da prolazi krajnjom točkom promjera. Getaldić pri prvom rješavanju toga problema nije opazio da postoji ovaj slučaj, iako je u prvom slučaju promatrao dva podslučaja, od kojih je jedan bio postavljanje zadane dužine između okomice, koja pada na promjer, i konveksne strane kružnice, odnosno konkavne strane kružnice. Naknadno rješavanje ovog propuštenog slučaja dovelo je Getaldića do dva podslučaja koji zahtijevaju različite uvjete uz koje je moguće riješiti problem, pa je našao da je u drugom podslučaju rješenje čak dvoznačno. Ta dva podslučaja Getaldić je u posljednjem djelu *De resolutione et compositione mathematica* razdvojio u dva slučaja tako da je dobio šest slučajeva problema.

Getaldić je svoja rješenja možda već prije nego ih je objavio poslao Galileju da ih vidi i da dade svoje mišljenje. Ne znamo je li Galilei doista dostavio Getaldiću svoje primjedbe, a ako jest kakve su one bile. Međutim, bez obzira na eventualne Galilejeve sugestije, vjerojatno je da je Getaldić samostalno usavršio svoje restauracije u daljoj fazi rada na tim problemima. Naime, Getaldić je do novih rješenja došao djelomično preko algebarske analize koja mu je vjerojatno pomogla da razluči pojedine slučajeve i postavi uvjete uz koje je moguće probleme riješiti. Rješavanje drugog problema pokazuje osim toga da se nova varijanta u tiskanom tekstu morala nadovezati na prvotno rješenje, jer je Getaldić do razlučivanja novih slučajeva kod drugog problema morao doći i analogijom s onima koje je već imao.

Iz tih razloga je pronađeni Getaldićev tekst u Galilejevoj ostavštini dragocjen. On nam pokazuje proces nastanka Getaldićevih restauracija Apolonijevih problema, proces otkrivanja formulacije problema, razlučivanja pojedinih slučajeva i postavljanja uvjeta uz koje je pojedine slučajeve moguće riješiti. Zbog te važnosti donosimo ovdje i tekst tih Getaldićevih rješenja u latinskom originalu i hrvatskom prijevodu.[7]

---

[7] Problem 1. i 2. objavljen je u djelu *Apollonius redivivus* (Venecija 1607) na str. 1—17. Isti problemi riješeni su u djelu *De resolutione et compositione mathematica* (Rim 1630) na str. 114—129. kao problemi VI. i VII. treće knjige. U pretisku tih djela Marini Ghetaldi Opera omnia, Zagrabiae 1968. objavljeni su na str. 199—215. i 478—493. — U hrvatskom prijevodu objavljeni su samo problemi iz djela *Apollonius redivivus*. Vidi: Marin Getaldić, Sabrana djela, sv. I, Zagreb 1972, str. 207—224.

PROBLEMA

Circulo positione data aptare rectam lineam magnitudine datam, quae ad datum punctum pertingat.

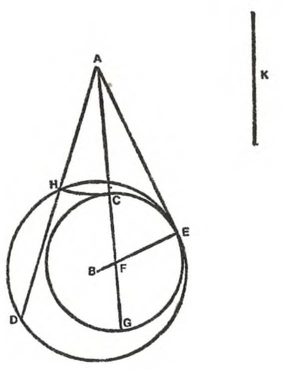
Hoc Problema duos habet casus. Punctum enim datum potest esse extra circulum, et in circulo.

In primo autem casu oportebit rectam magnitudine datam non esse maiorem diametro circuli. In secundo uero non esse maiorem diametro neque minorem ea recta linea in circulo, quae per punctum datum secat diametrum ad rectos angulos. Aliter impossibile esset quod proponitur.

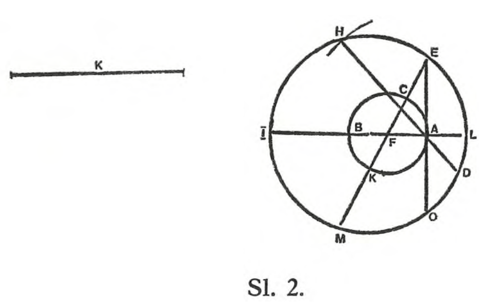
Sit igitur datus circulus cuius centrum B, sitque datum punctum A extra circulum. Oportet in dato circulo aptare rectam lineam datae K aequalem, quae si producatur, ad punctum A pertingat.

Tangat recta AE datum circulum in E et iungatur BE atque sumatur EF dimidiae K aequalis, et iungatur quoque AF. Ex centro F interuallo FE describatur circulus secans AF productam in punctis CG. Aequalis erit igitur CG ipsi K et recta AE tanget circulum quoque CGE in E. Deinde alius circulus ex A centro ad interuallum AC describatur secans datum circulum in H, per quod punctum ducta AHD. Dico HD ipsi K aequalem esse. Ea enim aequalia sunt rectangula sub AC, AG et sub AH, AD (nam quadratum AE aequatur utrique) et aequales rectae AC, AH ut semidiametri. Ergo fiunt aequales et AG, AD et per subductionem aequalium ab aequalibus fiunt quoque aequales HD et CG uel K. Factum est igitur quod oportebat.

Quod si punctum A fuerit in circulo, absoluitur Problema hoc modo. Ducatur per A diameter circuli IL cui perpendicularis agatur AE secans circulum datum in E, et ponatur EF aequalis dimidiae K, quae ex cautione praemissa non est minor quam EA, et centro F interuallo FA describatur circulus secans EF productam in punctis C, G. Tanget igitur EA recta circulum CGA in A.



Sl 1,



Sl. 2.

Deinde centro A interuallo rectae EG aequali describatur alius circulus secans circulum B in H, ductaque HAD recta. Dico ipsam datae K aequalem esse. Producatur enim EA donec secet circumferentiam in O. Aequales erunt igitur EA, AO et aequalia quoque rectangula sub EG, EC et sub HA, AD. Nam rectangula EA, AO, hoc est quadratum EA aequatur utrique. Et quoniam aequales sunt HA, EG ex constructione, erunt quoque aequales et AD, EC et producta EG ad M ut sit GM ipsi EC aequalis. Erit EM aequalis ipsi HD, sed EM aequalis erit quoque ipsi K. Nam EF est dimidia ipsius EM et dimidia quoque ipsius K. Ergo HD aequalis erit datae K. Factum est igitur quod oportebat.

PROBLEMA

Inter circumferentiam circuli dati et rectam lineam eius diametro perpendicularem ponere rectam lineam magnitudine datam quae ad semicirculi angulum pertingat.

Hoc Poblema tres casus habet. Primum enim potest secari diameter à perpendiculari intra circulum. Secundo, potest secari extra circulum producta, tertio potest secari in extremitate.

In primo autem casu . . .[8] rectam magnitudine datam ponere inter perpendicularem et cauam circuli peripheriam. Oportebit datam non esse maiorem ea parte diametri quae inter sectionis punctum, et eandem cauam circuli peripheriam interiacet.

In secundo uero casu, oportebit rectam magnitudine datam non esse minorem ea recta linea quae fit ex diametro producta, et inter sectionis punctum et conuexam circuli peripheriam interiacet.

Primi casus constructio

Sit datus circulus AHB, ad cuius diametrum AB cadat perpendicularis DC, secans circulum in E. Oportet inter circumferentiam circuli AHB, et ipsam DC, ponere rectam lineam datae K equalem, quae ad punctum B, hoc est ad semicirculi angulum pertingat. Ducatur recta AEF ut sit EF dimidiae K aequalis.

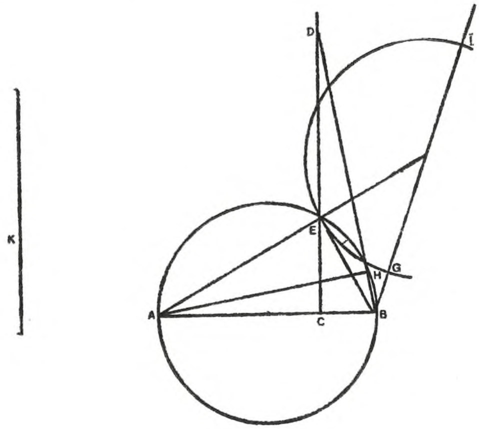
Secundi casus constructio

Sit datus circulus AHB ad cuius diametrum AB cadat perpendicularis DC, extra circulum. Oportet inter circumferentiam circuli AHB et ipsam DC ponere rectam lineam datae K aequalem, quae ad punctum B, hoc est ad semicirculi angulum pertingat. Describatur in recta linea CB semicirculus CEB et ex puncto A demitatur perpendicularis AE secans semicirculum CEB in E et ducatur CEF, recta ut sit EF, dimidiae K aequalis

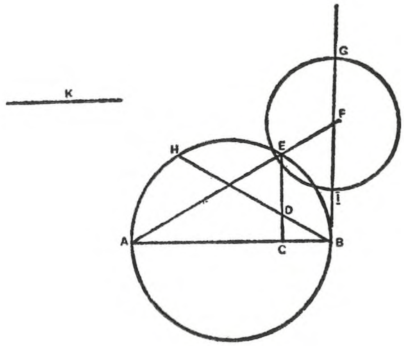
iugaturque BF et centro F interuallo FE describatur circulus secans BF productam in punctis G, I. Erit igitur GI ipsi K aequalis et iuncta EB tanget circulum IEG in E. Rectus est enim angulus BEF. Deinde in circulo AHB accommodetur BH, aequalis ipsi BG. Est autem BG in prima figura [3] minor quam BE in secunda [4] uero et tertia [5] non maior diametro AB, quod quidem inferius demonstrabimus. Producta denique BH in D. Dico DH ipsi K aequalem esse. Iungatur enim HA quoniam igitur similia sunt triangula DCB, AHB. Nam angulus AHB in semicirculo rectus est et ideo angulo DCB aequalis, et angulus DBC utrique communis. Proportionales erunt AB, HB, DB, CB atque adeo rectangula sub DB, HB, et sub CB, AB aequalia. Sed rectangulum sub CB, AB aequale est quadrato EB (nam ex coroll. 8 : 6, elem:

[8] Na ovom mjestu je jednu riječ bilo nemoguće pročitati, ali njezin nedostatak ništa ne smeta za shvaćanje sadržaja rečenice.

EB est media proportionalis inter CB, AB), hoc est rectangulo sub IB, GB. Ergo rectangulum sub DB, HB rectangulo sub IB, GB erit aequale. Et quoniam aequales sunt HB, GB, ex constructione, aequales erunt et DB, IB, et per subductionem aequalium ab aequalibus erunt quoque aequales DH et IG, vel K. Posita est igitur DH inter circumferentiam circuli AHB etc. quod faciendum erat. Quod BG in prima figura [3] sit minor ipsa BE manifeste patet.



Sl. 3.



Sl. 4.

Nam quadratum BG minus est rectangulo sub BG, BI hoc est quadrato BE et ideo ipsa BG minor quam BE. Quod BG in secunda [4] et tertia [5] figura non sit maior diametro AB sic demonstrabitur: sit BG si possibile est maior quam AB, ergo et IB maior erit quam CB, nam ex cautione praemissa IG hoc est K (in secunda figura [4]) non est maior quam CA (in tertia uero [5]) non est minor, atque adeo rectangulum sub IB, GB, maius erit rectangulo sub CB, AB, sed quadrato EB aequale est tum rectangulum sub IB, GB, tum sub CB, AB. Nam ex coroll: 8 : 6 : elem: EB est media proportionalis inter CB, AB. Ergo quae unitertio aequantur non sunt inter se aequalia quod est absurdum. Non est igitur BG maior diametro AB quod erat ostendendum.

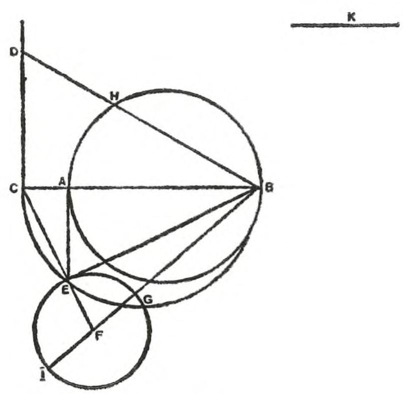
Tertii casus constructio

Sit datus circulus AHB, et ab extremitate eius diametri AB sit facta ad rectos angulos recta linea AD. Oportet inter circumferentiam circuli AHB et rectam DA ponere rectam lineam datae K aequalem quae ad punctum B hoc est ad semicirculi angulum pertingat. Producatur DA in F ut sit AF dimidiae K aequalis et iungatur FB, et centro F interuallo FA describatur circulus secans FB productam in punctis G, I. Erit igitur GI aequalis datae K et circulus IAG continget rectam AB in A. Rectus est enim FAB angulus. Deinde accommodetur in circulo AHB recta BH aequalis ipsi BG. Est autem AB diameter maior quam BG. Nam cum sit rectangulus sub IB, GB quadrato AB aequale et maius quadrato BG, erit quadratum AB quadrato BG maius et per consequens AB maior ipsa BG, producta denique BH in D dico DH ipsi K aequalem esse. Iungatur enim AH quoniam igitur rectus est angulus AHB in semicirculo, quadratum AB aequale erit tum rectangulo sub IB, GB, tum sub DB, HB. Nam ex coroll. 8 : 6 elem: AB est media proportionalis inter DB, HB et ideo illa duo rectangula aequalia erunt inter se et quoniam GB, HB sunt aequales ex constructione, aequales erunt quoque et IB, DB et per subductionem aequalium ab aequalibus erunt quoque aequales DH, IG, vel K. Posita est igitur DH inter circumferentiam circuli AHB etc., quod faciendum erat.

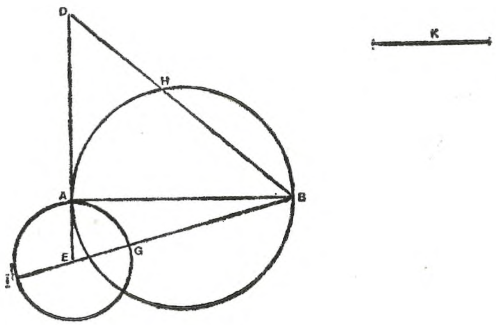
*

Et si quis aliter proposuerit ut pote: Dato quolibet segmento circuli et recta linea quae cum base segmenti constituat angulum aequalem ei qui in dato segmento consistit angulo, ponere inter datam rectam lineam et circumferentiam circuli cuius est segmentum rectam lineam magnitudine datam quae ad segmenti angulum pertingat.

Dico problema hoc ratione propositum non differre a praecedenti neque eo esse universalius ut videtur sed unum et idem. Nam illa recta linea quae cum base segmenti constituit angulum aequalem ei, qui in dato segmento consistit angulo, perpendicularis est diametro circuli cuius est segmentum, ductae a praedicto segmenti angulo et hoc pridem ita demonstrato.



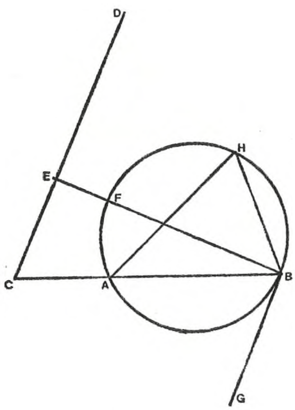
Sl. 5.



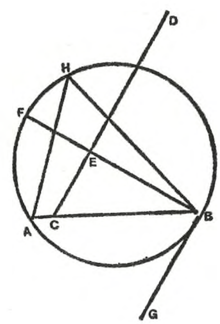
Sl. 6.

Sit circuli segmentum AHB cuius basis BA constituat cum recta linea DC angulum DCB, aequalem angulo AHB qui in segmento AHB consistit et compleatur circulus. Eius autem diameter a puncto B ducta occurret rectae DC utpote in E. Nam angulus ECB cum sit aequalis angulo qui in maiori segmento AFB consistit minor est recto, et minor quoque angulus EBC in maiori segmento FBA. Atque adeo ambo simul duobus rectis minores. Dico perpendicularem esse DC diametro BF. Ducatur enim diametro BF ad rectos angulos BG. Ipsa autem tanget circulum in B et angulus CBG aequalis erit angulo AHB, hoc est DCB. Et ideo parallele erunt DE, BG, ac proinde anguli DEB, EBG, aequales. Sed rectus est angulus EBG, ex constructione, ergo et angulus DEB rectus erit. Perpendicularis est igitur DC, diametro BF, quod erat ostendendum. Sit igitur datum circuli segmentum AHB, et recta linea DC constituat cum base BA angulum DCB aequalem angulo qui in segmento AHB consistit. Oportet inter circumferentiam circuli cuius est segmentum AHB et rectam DC ponere rectam lineam datae K aequalem, quae ad punctum B hoc est ad segmenti angulum pertingat. Compleatur circulus, et ex puncto B ducatur diameter BF. Quoniam igitur perpendicularis est DC diametro BF facta constructione ut in praecedenti Problemate factum erit quod notetur.

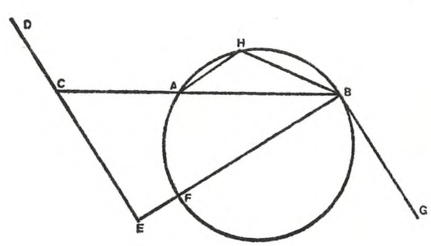
Servitore di Vostra Signoria Illustrissima
Marino Ghetaldi



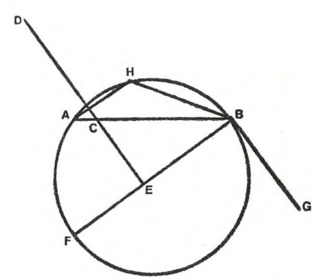
Sl. 7.



Sl. 8.



Sl. 9.



Sl. 10.

PROBLEM

U zadanoj kružnici upisati dužinu zadane veličine koja dopire do zadane točke.

Ovaj problem ima dva slučaja. Zadana točka može naime biti izvan kružnice i u kružnici.

U prvom pak slučaju dužina zadane veličine treba da ne bude veća od promjera kružnice. U drugom opet da ne bude veća od promjera niti manja od one dužine u kružnici koja kroz zadanu točku siječe promjer pod pravim kutom. Inače bi bilo nemoguće što slijedi.

Neka bude dakle zadana kružnica sa središtem B i zadana točka A izvan kružnice. U zadanoj kružnici treba upisati dužinu koja je jednaka zadanoj dužini K, i produžena dopire do točke A.

Neka dužina AE dira kružnicu u E i nek se spoji BE te oduzme EF koja je jednaka polovici dužine K, pa se onda spoji i AF. Iz središta F razmakom FE nek se opiše kružnica koja siječe produženu AF u točkama C, G. Tako će CG biti jednaka K a dužina AE dirat će i CGE u E. Zatim oko središta A na razmaku AC nek se opiše druga kružnica koja zadanu kružnicu siječe u H, a kroz tu točku povučena je AHD. Tvrdim da je HD jednak K. Jednaki su naime pravokutnici pod AC, AG i pod AH, AD (naime jednom i drugom jednak je kvadrat AE), te kao polumjeri jednake dužine AC, AH. Bit će dakle jednake i AG, AD, pa će oduzimanjem jednakih jednakima biti također jednake HD i CG odnosno K. Stoga je trebalo tako postupiti.

Da je pak točka A bila u kružnici, problem bi se ovako rješavao. Povući kroz A promjer kružnice IL na koji se spusti okomica AE da siječe zadanu kružnicu u E i neka se povuče EF jednaka polovici K koja radi osiguranja pretpostavke nije manja od EA, te iz središta F razmakom FA nek se opiše kružnica koja siječe produženu EF u točkama C, G. Neka dakle dužina EA dira kružnicu CGA u A. Zatim iz središta A razmakom jednakim dužini EG nek se opiše druga kružnica koja siječe kružnicu B u H i povuče dužina HAD. Tvrdim, ona sama jednaka je zadanoj dužini K. EA naime se produži dok ne siječe obodnicu u O. Jednake će dakle biti EA, AO pa zato jednaki i pravokutnici pod EG, EC i pod HA, AD. Naime, pravokutnici pod EA, AO, to jest kvadrat EA im je jednak. I budući da su, iz konstrukcije, HA, EG jednaki, bit će jednaki i AD, EC i produžena EG do M tako da je i GM jednaka samoj EC. Bit će EM jednaka samoj HD, dok će EM biti jednaka samoj K. Naime EF je polovica te EM, pa i polovica od samog K. Dakle HD bit će jednak zadanoj K. Učinjeno je dakle što je bilo potrebno.

PROBLEM

Između obodnice zadane kružnice i dužine koja je okomita na njezin promjer nek se postavi dužinu zadane veličine koja dopire do kuta polukružnice.

Ovaj problem ima tri slučaja. Tako u prvom okomica može sjeći promjer unutar kružnice. Drugo, može ga sjeći produžena izvan kružnice, i treće, može ga sjeći na kraju.

U prvom naime slučaju (treba) dužinu zadane veličine postaviti između okomice i konkavne obodnice kružnice. Treba da zadana dužina ne bude veća od onog dijela promjera koji leži između sjecišta i te iste konkavne obodnice kružnice.

U drugom pak slučaju treba da zadana dužina ne bude manja od one dužine koja nastaje produženjem promjera i leži između sjecišta i konveksne obodnice kružnice.

Konstrukcija prvog slučaja

Nek je zadana kružnica AHB i na njezin promjer AB nek pada okomica DC, koja siječe kružnicu u E. Između obodnice kružnice AHB i same DC treba postaviti dužinu jednaku zadanoj dužini K koja dopire do točke B, to jest do kuta polukružnice. Nek se povuče dužina AEF tako da bude EF jednako polovici K,

Konstrukcija drugog slučaja

Nek je zadana kružnica AHB i na njezin promjer AB nek pade okomica DC izvan kružnice. Treba između obodnice kružnice AHB i same DC postaviti dužinu koja je jednaka zadanoj dužini K i dopire do točke B, to jest do kuta polukružnice. Nek se na dužinu CB opiše polukružnica CEB i iz točke A spusti okomica AE

koja siječe polukružnicu CEB u E,
i povuče CEF tako da dužina EF
bude jednaka polovici K,

i spoji se BF te iz središta F razmakom FE opiše se kružnica koja siječe produženu BF u točkama G, I. GI bit će dakle jednak samom K, a spojnica EB dirat će kružnicu IEG u E. Kut je BEF naime pravi. Zatim se u kružnicu AHB smjesti BH jednaka samoj BG. BG pak na prvoj slici [3] manja je nego BE, a na drugoj [4] i trećoj [5] nije veća od promjera AB, što ćemo niže dokazati. Napokon produžena je BH do D. Tvrdim da je DH jednaka samoj K. Jer spoji se HA, pa su zato trokuti DCB, AHB slični. Naime kut AHB u polukružnici je pravi i stoga jednak kutu DCB, a kut DBC jednom i drugom zajednički. Razmjerni su AB, HB, DB, CB, pa su zato pravokutnici pod DB, HB, i pod CB, AB jednaki. No pravokutnik pod CB, AB jednak je kvadratu EB (naime iz korol. 8 : 6, elem: EB je srednja proporcionala između CB, AB), to jest pravokutniku pod IB, GB. Dakle, pravokutnik pod DB, HB bit će jednak pravokutniku pod IB, GB. A budući da su jednaki HB, GB, iz konstrukcije, jednaki su i DB, IB a odbijanjem jednakih od jednakih bit će isto tako jednaki DH i IG, odnosno K. Stoga je DH položena između obodnice kružnice AHB itd., što je trebalo učiniti.

Očito je da je BG na prvoj slici [3] manje od same BE. Naime kvadrat BG manji je od pravokutnika pod BG, BI to jest kvadrata BE, pa je zato i sama BG manja od BE. Da BG na drugoj [4] i trećoj [5] slici nije veće od promjera AB, dokazuje se ovako: Neka BG ako je moguće bude veće nego AB; dakle i IB bit će veće nego CB; jer zbog osiguranja pretpostavke, IG, to jest K (na drugoj [4] slici) nije veći od CA (na trećoj [5] naime) nije manji pa će zato pravokutnik pod IB, GB biti veći od pravokutnika pod CB, AB. Ali kvadratu EB jednak je i pravokutnik pod IB, GB kao i onaj pod CB, AB. Naime iz korol.: 8 : 6 : elem: EB je srednja proporcionala između CB, AB. Apsurdno je da jednake trećemu nisu i jednake među sobom. Nije dakle BG veće od promjera AB, što je bilo potrebno pokazati.

Konstrukcija trećeg slučaja

Neka bude zadana kružnica AHB i od kraja njezina promjera AB nek se pod pravim kutom povuče dužina AD. Između obodnice kružnice AHB i dužine DA treba postaviti dužinu jednaku zadanoj dužini K koja dopire do točke B, to jest do kuta polukružnice. Nek se produži DA do F tako da bude AF jednako polovini K i nek se spoji FB, a iz središta F razmakom FA nek se opiše kružnica koja siječe produženu dužinu FB u točkama G, I. Bit će dakle GI jednaka zadanoj K, a kružnica IAG dirat će dužinu AB u točki A, pa je kut FAB pravi. Zatim neka se u kružnici AHB smjesti dužina BH jednaka BG. AB promjer veći je pak nego BG. Naime budući da je pravokutnik pod IB, GB jednak kvadratu AB i veći od kvadrata BG, bit će i kvadrat AB veći od kvadrata BG i dosljedno tome AB veća od BG. Produži li se napokon BH do D, tvrdim da je DH jednaka samoj K. Jer spoji li se AH, kut AHB u polukružnici je pravi, a kvadrat AB bit će jednak kako pravokutniku pod IB, GB tako i onom pod DB, HB. Naime, iz korol. 8 : 6 : elem: AB je srednja proporcionala između DB, HB i stoga će ta dva pravokutnika biti jednaka među sobom. I budući da su GB, HB jednake, iz konstrukcije će biti jednake IB, DB, a odbijanjem jednakih od jednakih bit će jednake i DH, IG, odnosno K. DH je stoga smještena između obodnice kružnice AHB itd., kao što je trebalo učiniti.

*

A ako bi netko drukčije postavio: Ako je zadan bilo koji segment kružnice i dužina koja s osnovkom segmenta čini kut jednak kutu koji je u zadanom segmentu, nek se postavi između zadane dužine i obodnice kružnice, koje je segment, dužinu zadane veličine koja dopire do segmentovog kuta.

Tvrdim da se tako postavljen problem ne razlikuje od prethodnog, a niti je općenitiji, kako će se vidjeti, već jedan te isti. Naime, ona dužina što s osnovkom segmenta tvori kut koji je jednak kutu što nastaje u zadanom segmentu okomita je na promjer kružnice, kojoj je segment, a koji je promjer povučen iz spomenutog kuta segmenta, što je inače već dokazano.

Nek je segment kružnice AHB kojeg osnovka BA čini s dužinom DC kut DCB jednak kutu AHB koji nastaje u segmentu AHB i nek se dovrši kružnica. Njezin će pak promjer povučen od točke B doprijeti do pravca DC sve do E. Naime kut ECB, budući da je jednak kutu što je u većem segmentu, manji je od pravog, a manji je i kut EBC u većem segmentu FBA, pa su zato ujedno oba manja od dva prava. Tvrdim da je DC okomica na promjer BF. Nek se pak povuče od promjera BF pod pravim kutovima BG, ona će dirnuti kružnicu u točki B i kut CBG bit će jednak kutu AHB, to jest DCB. Stoga će biti paralele DE, BG pa prema tome i kutovi DEB, EBG jednaki. No pravi kut je EBG, iz konstrukcije, dakle i kut DEB bit će pravi. Stoga je DC okomica na promjer BF što je trebalo dokazati. Neka je dakle zadan segment kružnice AHB i dužina DC neka tvori s osnovkom BA kut DCB koji je jednak kutu što je u segmentu AHB. Između obodnice kružnice koje je AHB segment i dužine DC treba položiti dužinu koja je jednaka zadanoj dužini K koja dopire do točke B to jest do kuta segmenta. Nek se nacrta kružnica i iz točke B povuče promjer BF. Budući da je DC okomica na promjer BF izvođenjem konstrukcije kao u prethodnom Problemu bit će učinjeno što je navedeno.

Sluga Vašeg prejasnog gospodstva
Marin Getaldić

Prihvaćeno na 2. sjednici Razreda za matematičke, fizičke i tehničke znanosti JAZU od 24. II 1981.)

Žarko Dadić
Josip Balabanić

FIRST VERSION OF GETALDIĆ'S RESTORATIONS OF THE TWO APOLLONIUS' PROBLEMS SENT TO GALILEO

Summary

In the Galileo's legacy there was found Getaldić's solution os two Apollonius' touch problems. Getaldić sent it to Galileo before 1603 or shortly after it.

The solution of those problems, published by Getaldić in 1607 in his scientific work *Apollonius Redivivus* differs very much from the elder one. Even later Getaldić published the solution of these two problems in his work *De Resolutione et Compositione Mathematica* in 1630. In the version sent to Galileo the problems were solved in a synthetic way, the method used in his work of 1607. In the work of 1630 he solved them by an algebraical method. If we compare all the three solutions of the first problem, we shall see that the second solution (1607) must have come out under the knowledge of the third one. For the second problem Getaldić knew only three cases in the first version, while in the published work of 1607 he found five cases.

This manuscript enables us to follow the development of Getaldić's solutions of these problems.