Žarko Dadić

POSLJEDICA I PORIZAM U GETALDIĆEVIM RADOVIMA

Dosad je uočena velika važnost porizma u Vièteovoj algebarskoj analizi geometrijskih problema. Pod utjecajem Vièteа Getaldić je upotrebljavao algebarsku metodu i u skladu s tim i formulaciju porizma. Međutim, dosad nije bilo nigdje istaknuto da je Getaldić upotrebljavao i jednu drugu vrstu tvrdnji — posljedicu (consectarium) — koju je izvodio iz konstruktivnog rješenja. To je bila prijelazna faza prema upotrebi porizma. U ovom radu pokazat ću da je posljedica ne samo prethodila porizmu nego i značila mnogo u transformaciji matematičkog mišljenja.

U djelu *Variorum problematum collectio,* koje je izašlo god. 1607. u Veneciji Getaldić razlikuje tri skupine geometrijskih problema. Prvu od njih Getaldić rješava konstruktivno u skladu s grčkom sintetičkom metodom. Za drugu od njih on najprije provodi geometrijsku analizu problema i tada na temelju nje provodi konstrukciju. Treću skupinu problema on rješava konstruktivno, ali dodaje rješenju posljedicu koja je generalizacija rješenja i dopušta geometrijsku i numeričku interpretaciju problema.

U posljednjem djelu *De resolutione et compositione mathematica* koje je izašlo posthumno u Rimu god. 1630. Getaldić rješava probleme u okviru Vièteove algebarske metode. Većinu problema u djelu Variorum problematum collectio nalazimo ponovno u djelu De resolutione et compositione mathematica.

Kao što je poznato, Viète je u svom postupku provodio algebarsku analizu problema. Iz te analize on izvodi tvrdnju koju naziva porizam, a koji se predstavlja i jednadžbom ili razmjerom. Porizam je tako relacija između poznatih ili danih veličina i traženih veličina. Taj porizam ima opći karakter, pa je on primjenljiv na geometrijsko ili numeričko rješenje. Na temelju porizma pronalazi se konstrukcija ili numeričko rješenje, što se naziva sinteza. Tako radi i Getaldić u posljednjem djelu De resolutione et compositione mathematica.

Treću skupinu problema u djelu Variorum problematum collectio Getaldić rješava konstruktivno (sinteza). Iz geometrijskih relacija dobivenih iz konstrukcije on izvodi tvrdnju — posljedicu (consectarium). Ona je formulirana općenito i u formalnom pogledu je istovjetna s formulacijom porizma, što je moguće vidjeti ako se usporedi isti problem u oba djela. Kad je formulirana posljedica, ona je po Getaldiću primjenljiva na numeričko rješenje. Zato poslije formulacije posljedice Getaldić daje numeričko rješenje. Tada, poslije formulacije, posljedica ima istu ulogu kao i porizam. Naravno posljedica nije jednadžba koja je specifična za algebarsku metodu, ali njezina formulacija je opća i ona se može primijeniti na geometrijsko isto kao i na numeričko rješenje problema, i to na isti način kao i porizam.

Pokazat ću sada usporedbu obaju postupaka.

Problem

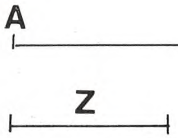
Getaldićev postupak u djelu Variorum problematum collectio	Vièteov postupak koji slijedi Getaldić u djelu De resolutione et compositione mathematica
konstrukcija (sinteza)	algebarska analiza
Iz konstrukcije slijedi veza između danih i traženih veličina. Ta je generalizacija izražena samo riječima i naziva se	Generalizacija postoji od početka analize, tako da se izvodi relacija između danih i traženih veličina u simboličnom obliku, i ta se tvrdnja ili relacija naziva
POSLJEDICA	PORIZAM

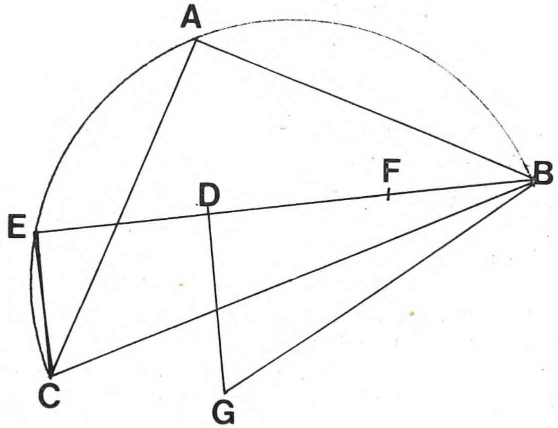
Iz toga slijedi

Numeričko rješenje (geometrijsko rješenje je također moguće, ali je ono dano prije posljedice)	Sinteza geometrijska ili numerička

Ta dva postupka prikazat ću na jednostavnom primjeru koji se nalazi u djelu Variorum problematum collectio kao problem VI, i u djelu De resolutione et compositione mathematica kao problem VIII. u knjizi II.

Problem: Zadana je hipotenuza pravokutnog trokuta i razlika kateta Z. Treba naći trokut.





Konstrukcija:

Neka je hipotenuza AB, pa neka se na nju povuče okomica AC koja je s njom jednaka i neka se spoji BC, što neka bude promjer kružnice čiji će luk prolaziti kroz A. U istoj kružnici CAB neka se postavi CE jednako Z, neka se spoji EB i na njoj neka se uzme BF jednako EC ili Z. Preostali dio EF neka se raspolovi u točki D i u njoj pod pravim kutom podigne dužina DG koja je jednaka DE ili DF i neka se spoji BG. Razlika kateta DB, DG trokuta DBG bit će FB tj. zadana Z.

Dokaz:

Budući da je kut CEB u polukružnici pravi, bit će

$$CB^2 = EB^2 + EC^2$$

tj.

$$CB^2 = EB^2 + FB^2,$$

ali je

$$EB^2 + FB^2 = 2\,(ED^2 + DB^2)$$

(Euklid, Elementi II/10), tj.

$$EB^2 + FB^2 = 2\,(DG^2 + DB^2).$$

Prema tome će biti

$$CB^2 = 2\,(DG^2 + DB^2)$$

ali je i

$$CB^2 = 2\,AB^2,$$

pa će tako biti

$$AB^2 = DG^2 + DB^2,$$

tj.

$$AB^2 = GB^2.$$

Zato je i

$$AB = GB$$

Konstruiran je dakle trokut DBG pravokutan u D kojemu je FB razlika kateta DB, DG jednaka Z, hipotenuza GB jednaka je AB, što je trebalo učiniti.

Iz konstrukcije problema i dokaza je očito da je

$$2\,GB^2 - FB^2 = CB^2 - EC^2 = EB^2$$

što se može izraziti kao tvrdnja koja se naziva

Analiza:

Neka D bude zadana hipotenuza pravokutnog trokuta, B razlika kateta. Treba naći trokut. Neka je već učinjeno što se traži (naime određen trokut). Zbroj kateta toga trokuta neka bude A. Tada će A+B biti dvostruka veća kateta, A—B dvostruka manja kateta. Odatle će jednostruka veća kateta biti $\frac{1}{2}(A+B)$, a jednostruka manja kateta $\frac{1}{2}(A-B)$. Ali kako je zbroj kvadrata kateta jednak kvadratu hipotenuze, bit će

$$\tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{1}{2}B^2 = D^2$$

ili

$$A^2 + B^2 = 2\,D^2$$

ili

$$A^2 = 2\,D^2 - B^2$$

A ta relacija je

POSLJEDICA

Dvostruki kvadrat hipotenuze umanjen za kvadrat razlike kateta, jednak je kvadratu zbroja kateta.

Numerički primjer:

Neka bude $AB = GB = 10$, $FB = 2$. Tada će biti

$$EB = ED + DB = 14$$

odakle

$$DA = 6, DB = 8.$$

PORIZAM

Dvostruki kvadrat hipotenuze umanjen za kvadrat razlike kateta, jednak je kvadratu zbroja kateta.

Sinteza:

Povucimo na AB okomicu jednaku s AB i spojimo BC. Od BC^2, koji je $2\,AB^2$ treba odbiti Z^2 u skladu s porizmom. Treba dakle na BC opisati polukružnicu, u njoj postaviti $CE = Z$ i spojiti EB. Kut CEB bit će pravi i zbog toga će biti

$$EB^2 = CB^2 - EC^2$$

tj.

$$EB^2 = 2\,AB^2 - Z^2$$

Prema porizmu, zbroj kateta trokuta, koji treba konstruirati treba izjednačiti s dužinom EB, a razliku istih kateta treba izjednačiti sa Z kako zahtijeva problem. Neka se dakle uzme na EB dužina BF koja je jednaka EC ili Z, pa ostatak FE neka se raspolovi u D okomicom DG koja je jednaka samoj DE ili DF i spoji GB. Prema tome je zbroj kateta GD i DB trokuta DGB jednak EB, a razlika istih kateta, tj. BF jednaka je Z. Tako je konstruiran trokut DGB kako je traženo.

Kako se vidi iz ovog primjera, posljedica ima sličnu ulogu kao i porizam, budući da je formulirana općenito, bez ograničenja na geometrijsko područje. Ona također ima mogućnost geometrijske i numeričke realizacije. Razlika je između posljedice i porizma u tome što posljedica slijedi iz konstrukcije, a porizam iz algebarske analize. U slučaju porizma ima se pak jasno podizanje na razinu Vièteovih speciesa, koji kao opće veličine mogu biti realizirane geometrijski i numerički, pa se u skladu s tim porizam pored riječima izriče i jednadžbom. Kod posljedice nema podizanja na razinu speciesa, pa tako ni jednadžbe koja vezuje dane i tražene veličine, ali opća formulacija tvrdnje koja slijedi iz konstrukcije omogućuje ipak isto kao i kod porizma realizaciju u geometrijskim ili numeričkim veličinama.

Ali ipak i u problemu objavljenom u djelu Variorum problematum collectio postoji trag speciesa. Naime razlika kateta se označuje u formulaciji zadatka sa Z. Taj Z je očito algebarski simbol za dužinu, a ne geometrijski, koji bi u skladu s geometrijskim postupkom trebao biti označen krajnjim točkama dužine, npr. MN, kao što je to učinjeno za hipotenuzu. Da je to doista trag speciesa vidi se i po tome što se Z često upotrebljava u konstrukciji, ali samo u geometrijskoj realizaciji kao EC = Z, a onda se u numeričkom primjeru taj EC odnosno FB uzima da je jednak brojčanoj vrijednosti 2.

Sve to pokazuje da je takav metodološki put rješavanja zadatka iz djela Variorum problematum collectio bio prelazna faza s čisto geometrijskog rješenja, odvojenog historijski od numeričkog rješenja, na pojam speciesa i porizma koji se realiziraju bilo u geometrijskom bilo u numeričkom rješenju problema. Dapače jasno je da su pojmovi i postupci upotrebljeni u tom rješenju bili preduvjet pojave speciesa i porizma. Međutim, ova spona u razvojnom procesu matematike nije do sada bila uočena.

LITERATURA

[1] M. Getaldić, Variorum problematum collectio, Venezia 1607.

[2] M. Getaldić, De resolutione et compositione mathematica, Roma 1630.

[3] Jacob Klein, Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra, Cambridge, Mass. 1968.

[4] François Viète, Introduction to the analytical art, prijevod s latinskog, dodatak djelu [3], str. 315—353.

(Primljeno na 7. sjednici Razreda za matematičke, fizičke i tehničke znanosti JAZU od 11. prosinca 1979.)

Žarko Dadić

CONSECTARIUM AND PORISME IN GETALDIĆ'S WORKS

Summary

In his work *Variorum problematum collectio*, published in Venice in 1607, Getaldić distinguishes three groups of geometrical problems. Getaldić solves the first group of problems constructively in accordance with Greek synthetic method. For the second one he, first, makes geometrical analysis of a problem and then, on its basis achieves the construction. The third one is solved constructively, but to its solution he adds consectarium which is the generalisation of the solution, and thus makes possible the geometrical or numerical interpretation of the problem. In his last work *De resolutione et compositione mathematica*, published posthumously in Rome in 1630, Getaldić solves problems in the line of Viète's algebraic method. The most of the problems published in *Variorum problematum collectio* we can find again in *De resolutione et compositione mathematica.*

In the first work, *Variorum problematum collectio,* Getaldić achieves the statement — consectarium — through geometrical relations obtained from construction. It is general formulation and formally identical with the formulation of porisme, what is recognizable while comparing the same problems in both works. When the consectarium is formulated, Getaldić applies it to the numerical solution, because after formulating consectarium, Getaldić gives numerical solution. Thus consectarium playes the same role as the porisme. There is no equation, which is specific for algebraic method, in consectarium, but its formulation is general and it can be applicable to geometrical as well as to the numerical solutions of problems, just as is the case with the porisme.

Here there is a general comparison of both treatments:

PROBLEM

Getaldić's procedure in *Variorum problematum collectio*	Viète's procedure which Getaldić follows in *De resolutione et compositione mathematica*
Construction (Synthesis)	Algebraic analysis
It follows the connection of given and requested magnitudes by me-	The generalisation exists from the beginning of the analysis, so that the result is a general formulation of statement and a symbolic relation be-

ans of construction, and it is generally expressed. This statement is called

Consectarium

tween given and requested magnitudes. This statement and this relation is called.

Porisme

From this follows

Numerical solution (Geometrical solution is also possible, but it was given at the beginning.)

Synthesis
geometrical or numerical

Thus consectarium has the similar role as the porisme, since it is formulated generally without limitation on the geometrical field. The difference is only in method, because consectarium derives from construction while porisme from analysis, and consequently the consectarium does not have symbolic form. So, the treatment of solution of the problems in the work *Variorum problematum collectio* presents the first attempt to connect geometrical and numerical fields, and historically it is the root of porisme and species.