Matematičke restauracije Marina Getaldića, 1. dio

Marijana Borić[1]

Razmatrano unutar cjelokupnog opusa Marina Getaldića tri njegova djela načinjena kao matematičke restauracije sačinjavaju posebnu cjelinu. Posljednja među njima nosi naslov *Marini Ghetaldi, patritii Ragusini, Apollonius redivivus seu restituta Apollonii Pergaei Inclinationum geometria*, liber secundus, (*Oživljeni Apolonije Marina Getaldića* ili *Obnovljena geometrija nagiba Apolonija Pergejskog*, knjiga druga), tiskana je u Veneciji 1613. godine pa je 400. godišnjica tog zapaženog djela dobar povod da se čitateljima prikažu osnovne karakteristike matematike tog doba i naglasi značaj Getaldićevih djela te njegova doprinosa razvoju matematike. Školovan na antičkoj matematičkoj tradiciji Getaldić je u svojim restauracijama koristio starogrčke matematičke metode, geometrijsku analizu i sintezu. Pojačani interes za antičku znanost važno je obilježje ukupne renesansne znanosti pa tako i renesansne matematike. Istraživanje matematičkog nasljeđa antike nastavlja se i u prvim stoljećima novovjekovlja. Tako se i Getaldić u skladu s matematikom svog doba u ranim radovima koristio antičkim matematičkim metodama.

Koncem 16. stoljeća, u doba kasne renesanse dolazi do potpune asimilacije antičkih znanja i utjecaja koji su dospjeli iz arapske u zapadnoeuropsku matematiku, što je rezultiralo pojavom novih metoda i područja matematike na prijelazu iz 16. u 17. stoljeće[2]. Zbog svog značaja naročito su se proučavala djela Arhimeda, Euklida i Apolonija iz Perge. Međutim samo neka njihova djela sačuvala su se na grčkom jeziku, dio u latinskom prijevodu načinjenom s arapskog, dok su neka djela bila u potpunosti zagubljena. Getaldić se posebno interesirao za radove Apolonija (3. st. pr. n. e.), jednog od najvećih matematičara antike. Studirao je matematiku u Aleksandriji, kod Euklidovih učenika. Autor je teorije konusnih presjeka, napisane u osam knjiga, što se smatra njegovim najznačajnijim djelom. Prve četiri sačuvane su u izvornom izdanju, peta, šesta i sedma u prijevodu na arapski jezik, dok je osma knjiga zagubljena[3].

Na istraživanje i restauriranje Apolonijevih djela Getaldića je potaknuo čuveni francuski matematičar Françoise Viète (16. st.), utemeljitelj simboličke algebre i algebarske analize. Budući su izvorna djela često bila rijetka ili čak potpuno zagubljena,

---

[1] Autorica je dr. sc. Marijana Borić s Odsjeka za povijest prirodnih i matematičkih znanosti Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti, e-pošta: `mbuljan@hazu.hr`

[2] Utjecaj arapske matematike postupno se širio od 12. stoljeća nakon što su Arapi zauzeli sjevernu Afriku i prešli na španjolsko područje i na Siciliju. Na tim teritorijama djelovali su prevoditeljski centri u kojima se s arapskog na latinski sustavno prevodilo izvorna arapska i važna antička djela čiji su izvornici zagubljeni, ali koja su se sačuvala u arapskim prijevodima. Tada su u zapadnoj Europi postojala mnoga znanstvena središta nastala oko pojedinih katedralnih i drugih škola u kojima se njegovalo Platonovo učenje, a iz matematike su se posebno proučavala Boetijeva djela. Severin Boetije (480.–524.) bio je uzor svim matematičkim istraživačima sve do početka 12. stoljeća. Koristio je i kompilirao djela znamenitih antičkih znanstvenika: Euklida, Nikomaha i Ptolemeja, ali nikada nije dosegnuo razinu djela kojima se koristio. Općenito znanje ranog srednjeg vijeka bilo je na mnogo nižoj razini od starogrčke matematike, ali je i takvo ipak održalo kontinuitet matematičkih znanja i pridonijelo napretku matematike u 12. stoljeću, što je bio temelj njenog daljnjeg razvoja. Sljedećih stoljeća usavršavaju se nova matematička znanja, međutim i dalje se sve do konca 16. stoljeća smatralo da operacija i objekt čine nedjeljivu cjelinu. Razmatralo se u okvirima konkretnih problema, stoga ni u tom razdoblju nije moglo doći do pojma formule. Velika preobrazba matematike uslijedila je u zapadnoj Europi u 17. stoljeću, kada je pronađen takozvani slovni račun, odnosno simbolička algebra, čijoj je afirmaciji svoj doprinos dao i Marin Getaldić. To je početak nove matematike koji je zatim vodio u analitičku geometriju i infinitezimalni račun.

[3] Apolonije je autor i većeg broja drugih matematičkih i astronomskih djela koja su također zagubljena.

pojedini matematičari nastojali su ih rekonstruirati, koristeći se navodima u sačuvanim djelima drugih antičkih matematičara[4]. Kao izvor za restauraciju Apolonijevih radova korišteno je djelo *Mathematicae collectiones* aleksandrijskog matematičara Papa (Pappos, Pappus) iz 3. st. i još neka djela antičkih matematičara. Sadržaj Apolonijevih djela *O dodirima* (*περι επαφων De tactionibus*) i *O nagibima* (*περι νευσεων De inclinationibus*) nalazio se opisan u predgovoru sedme knjige Papova djela *Mathematicae collectiones*. Tu su bili navedeni problemi koje se rješavalo i o kojima se raspravljalo, te se iz zapisa vidi da je Apolonije napisao po dvije knjige svakog od navedenih djela.[5]

Raspravu *O dodirima* restaurirao je Viète u djelu naslova *Apollonius Gallus seu exsuscitata Apollonii Pergaei περι επαφων geometria* (Pariz, 1600.). Iste godine Getaldić susreće u Parizu Viètea i detaljno se upoznaje s njegovim radovima. Viète je restaurirao deset Apolonijevih problema koji se na slobodan način, i u današnjem zapisu, mogu izraziti na sljedeći način:

Treba konstruirati kružnicu koja prolazi kroz m točaka, dodiruje n pravaca i p kružnica, ali tako da je $m+n+p=3$. Ako se za m, n, p stave nenegativni cijeli brojevi, to daje deset mogućih problema, koje je rješavao Viète.[6]

Analizirajući predgovor Papove sedme knjige, *Mathematicae collectiones*, Getaldić uočava da je u Apolonijevu djelu bilo još šest problema, pored onih koje je obradio Viète.[7] Na slobodan način i u današnjem zapisu mogu se iskazati na sljedeći način:

Treba konstruirati kružnicu zadanog polumjera, koja prolazi kroz m točaka, dodiruje n pravaca i p kružnica, ali tako da je $m+n+p=2$. Ako se za m, n, p stave nenegativni cijeli brojevi, to daje šest problema, koje je rješavao Getaldić[8].

Njima dodaje još i svoje rješenje osmog poučka u Vièteovom djelu, budući da uočava neke manjkavosti kod njegovog rješenja.[9]

Getaldićeva djela metodološki su vrlo značajna. Kao i kod starijih radova u restauracijama se koristi metodama preuzetim iz starogrčke matematičke tradicije. Antički matematičari starijeg perioda su geometrijske probleme rješavali konstrukcijom u kojoj se polazilo od zadanih veličina i dobivalo tražene, a zatim se ta konstrukcija dokazivala. Taj je postupak sintetički, a sama se konstrukcija nazivala sintezom. Apolonijeve traktate Getaldić restaurira upravo sintetičkom metodom, odnosno konstrukcijom. Sve formulacije, dokaze i rješenja napisao je u potpunosti po uzoru na antičku matematiku, tako da njegove restauracije nisu samo puko nadomještanje sadržaja zagubljenih djela,

---

[4] Brojni matematičari renesanse, pa i kasnije, nastojali su rekonstruirati i restaurirati Apolonijeva djela. Među njima ističu se F. Viète, nizozemski matematičar Snellius (1591.–1626.), francuski matematičar Fermat (1601.–1655.), engleski astronom i matematičar Halley (1656.–1724.).

[5] Opširnije o tome je pisao Žarko Dadić u *Marin Getaldić, Sabrana djela I,* Ž. Dadić, (ur.), Institut za povijest prirodnih, matematičkih i medicinskih nauka JAZU, Zagreb, 1972, str. 179.

[6] Formulacija problema preuzeta je iz knjige Žarka Dadića, *Hrvati i egzaktne znanosti u osvit novovjekovlja*, Zagreb, 1994, str. 169.

[7] U predgovoru djela *Dopuna Apoloniju Galskom*, Getaldić kaže: "Prema tome Apolonije Galski nije oživio svu geometriju dodira Apolonija Pergejskog, jer je izostavio šest problema koji pripadaju toj geometriji. Ali mi ćemo to dopuniti i tako Apolonije Galski neće bez Apolonija Ilirskog oživjeti Apolonija Pergejskog, koji je ležao ugasnuvši nepravdom vremena ili pokopan od barbara".

[8] Formulacija problema preuzeta je iz rada Žarko Dadić, *Dopuna Apoloniju Galskom Marina Getaldića* u *Marin Getaldić, Sabrana djela I,* vidi[5], str. 180. Da bi potvrdio postojanje tih problema u Apolonijevu djelu, Getaldić citira odlomak Papova teksta u Comandinovu prijevodu, koji se na njih poziva, te zaključuje da će s njegovom dopunom restauracija Apolonijeva djela o dodirima biti zaokružena cjelina.

[9] Ovo djelo Getaldić je napisao većim dijelom tijekom svog studijskog putovanja po Europi, jer u pismu matematičaru Christophu Grienbergeru od 4. rujna 1604. upućenom iz Dubrovnika u Rim, kaže kako ga je pripremio zajedno sa svojim djelima *Oživljeni Apolonije* i *Zbirka različitih problema.* Getaldićevo pismo je objavljeno u M. Vanino, Vrela i prinosi, sv. 12, Sarajevo, 1941., 69–86.

budući on svjesno i dosljedno restauira i rekonstruira matematičku građu, te metodološki potpuno prati stil Apolonijeve geometrije.[10]

Getaldićeva restauracija Apolonijeva djela o nagibima

Neosporno je djelo *Dopuna Apoloniju Galskom* nastalo potaknuto Vièteovom restauracijom Apolonijeva djela *O dodirima*. Za potrebe te restauracije Getaldić je proučavao predgovor sedme knjige Papova *Mathematicae collectiones* u kojem se spominje i drugo Apolonijevo djelo *O nagibima*. Getaldić je bio prvi matematičar koji je formulirao Apolonijeve probleme o nagibima iz vrlo zamršenih i iskrivljenih Papovih zapisa. Stoga su Getaldićeve formulacije poslužile kao podloga kasnijim restauracijama tog djela.

Getaldić je u Papovu tekstu prepoznao pet problema iz Apolonijeva djela *O nagibima*. Budući da ti problemi tematski predstavljaju cjelinu vjerojatno ih je namjeravao objaviti u jednom djelu. Međutim, intenzivno okupiran poslovima koje je obavljao za Dubrovačku republiku,[11] tiskao je u knjizi prva četiri problema s rješenjima, a posljednji peti daje samo u obliku formulacije, premda ga je već tada imao uglavnom riješenog. Djelo nosi naslov *Oživljeni Apolonije Marina Getaldića* ili *Obnovljena geometrija nagiba Apolonija Pergejca* (Marini Ghetaldi, patritii Ragusini, Apollonius redivivus seu restituta Apollonii Pergaei Inclinationum geometria, Venetiis, Apud Bernardum Iutam, 1607.). Važno je napomenuti da je peti problem znatno složeniji od prethodnih, te dopušta mnoštvo različitih slučajeva i međusobnih položaja razmatranih geometrijskih objekata. U slobodnoj formulaciji problem bi se mogao iskazati na sljedeći način: *Središtima dviju zadanih kružnica prolazi pravac. Treba dobivene polukružnice presjeći tako da presječnica prolazi sjecištem spojnice središta zadanih kružnica i jedne od njih, a između lukova polukružnica određuje segment jednak zadanoj dužini.*[12]

Getaldićevo djelo bilo je poticaj matematičaru Alexandru Andersonu za restauraciju petog problema, što je načinio na temelju Getaldićeve formulacije i objavio u raspravi *Supplementum Apolloni redivivi* (Pariz, 1612.). Getaldić, okupiran različitim poslovima koje je obavljao u službi Dubrovačke republike, nije imao dovoljno vremena da 1607. nastavi rad na restauraciji pa je tek nekoliko godina kasnije samostalno dovršio i objavio peti problem zajedno s njegovim rješenjem u posebnom djelu naslova *Oživljeni Apolonije Marina Getaldića* ili *Obnovljena geometrija nagiba Apolonija Pergejca*, knjiga druga (*Marini Ghetaldi, patritii Ragusini*, *Apollonius redivivus seu restituta Apollonii Pergaei Inclinationum geometria*, liber secundus, Venetiis, 1613.) Getaldiću je neposredno prije

[10] Detaljnijom analizom Getaldićeva djela *O dodirima* uočava se da je ono napisano ipak na nešto drugačiji način u odnosu na njegova prethodna djela. Naime, dok u prvim djelima Getaldić često i detaljno citira poučke iz Euklidovih Elemenata, ali i drugih antičkih djela kojima se koristio, u raspravi *O dodirima* odstupa od takvog načina pisanja. Čitavo djelo sadrži samo jedan citat iz Euklidovih Elemenata (kod dokaza problema II), premda ih je u djelu koristio više puta, ugrađene u dijelove teksta, a naročito kod rješenja Vièteovog osmog problema, međutim nigdje ih posebno ne navodi. O tome opširnije vidi rad Žarko Dadić, *Dopuna Apoloniju Galskom Marina Getaldića* u *Marin Getaldić, Sabrana djela I*, vidi[5], 1972, str. 180.

[11] Getaldić je bio izabran da kao poklisar otputuje u Carigrad 1606. godine i preda godišnji danak sultanu. Tamo je proveo godinu dana obavljajući diplomatske poslove za potrebe Dubrovačke republike. Iz tog perioda sačuvano je šifrirano pismo na hrvatskom jeziku koje je uputio vlastima u Dubrovačkoj republici. Boravak u Carigradu iskoristio je za mjerenje zemljopisne širine grada, a tražio je i arapski prijevod Apolonijeva djela. Premda se smatralo da je sačuvano u Carigradu, Getaldićeva potraga nije dala rezultata.

[12] Formulacija petog problema prenesena je iz rada Žarka Dadića *Oživljeni Apolonije, knjiga druga Marina Getaldića*, objavljeno u *Marin Getaldić, Sabrana djela I*, vidi[5], str. 235.

objavljivanja djela Anderson poslao primjerak svoje restauracije pa se Getaldić na to osvrnuo u predgovoru.

Getaldić peti problem, kao i prethodna četiri, rješava istom sintetičkom metodom. Obzirom na složenost problema, djelo je pisano vrlo sustavno i građa strukturirana pregledno, sistematično po uzoru na antička matematička djela. Na početku Getaldić daje dvadeset lema, na temelju kojih gradi sintetičko rješenje petog problema. Pored toga, kasnije u postupku rješavanja dodaje još devet lema, kojima određuje odnos pojedinih veličina, u ovom slučaju dužina, čiji su međusobni odnosi već bili iskorišteni u sintetičkom rješenju problema, uz uvjet da se to dokaže u narednim lemama.

Premda je Andersonova restauracija Apolonijeva djela *O nagibima*, bila potaknuta Getaldićevom restauracijom, način izlaganja matematičke građe kod oba autora znatno se razlikuje.[13] Getaldić je vrlo sistematičan i na početak svojih rješenja uvijek metodički korektno navodi sve tvrdnje koje će mu trebati na putu do rješenja. Kod Andersona tvrdnje se uvode dosta nepregledno tijekom samog rješavanja. Premda se obojica ponekad koriste istim tvrdnjama, Getaldić nastoji postići i stilom izlaganja starogrčku općenitost i strogost u dokazivanju, pa tvrdnje oblikuje u leme, dok ih Anderson bez formalnog uobličavanja, stavlja u tekst na mjestima na kojima ih koristi. Pored načina izlaganja, bitno se razlikuje i izborom metoda rješavanja Apolonijevih problema. Anderson kao prioritet u djelu postavlja matematičko rješenje i ne uviđa kakvu ulogu pri restauraciji ima važnost odabira metode. Stoga se odlučuje za onu metodu za koju smatra da će ga prije i jednostavnije dovesti do rješenja.[14]

Iako Andersonova rješenja zbog specifične naravi obrađenih geometrijskih problema imaju mogućnost algebarske interpretacije, njegova je restauracija u raspravi *Supplementum Apolloni redivivi* načinjena metodom geometrijske analize. Budući je svojim djelom namjeravao upotpuniti Getaldićevu restauraciju koja sadrži četiri problema, rješavana sintetičkom metodom, možemo zaključiti da Andersonove dopune u metodološkom smislu s Getaldićevim djelom ipak ne čini cjelinu. Anderson toga možda nije bio svjestan ili pak nije smatrao potrebnim u potpunosti slijediti Getaldićev metodološki pristup. Moguće je pišući raspravu *Supplementum Apolloni redivivi* držao dovoljnim ostati u okvirima antičke tradicije. Stoga se odlučio za starogrčku geometrijsku analizu, jer mu se činilo da pojednostavnjuje put do rješenja problema. Getaldićev komentar na prvu Andersonovu restauraciju petog problema, ostao je zabilježen u predgovoru Getaldićeve restauracije *Oživljeni Apolonije*. On navodi primjedbe na Andersonovo određivanje uvjeta problema, te iznosi mišljenje kako ne smatra odviše sigurnim put kojim je Anderson došao do rješenja geometrijskog razmjera. Nakon toga Anderson u Parizu 1615. godine, tiska novu raspravu naslova *Aitiologia, Pro zetetico Apolloniani problematis a se iam pridem edito in supplementum Apolloni redivivi*, u

---

[13] Utjecaj Getaldićevih djela na mlađe restauracije detaljno je prikazao Žarko Dadić u knjizi *Hrvati i egzaktne znanosti u osvitu novovjekovlja*, Zagreb, 1994, str. 156–157, 169–180.

[14] Andersonovu metodu analizirao je detaljno u 18. stoljeću engleski matematičar Samuel Horsly u djelu *Apolonii Pergaei inclinationum libri duo* (Oxonii 1770.). Anderson postupa na način da uzima tražene veličine kao da su već poznate, pa onda zaključuje o vezama između zadanih i traženih veličina, odnosno on prvo provodi analizu samog problema. Horsly u spomenutom djelu piše da je Andersonova analiza u svojoj biti algebarska, ali je samo zapisana u geometrijskom obliku budući se radi o restauraciji antičkog djela. Međutim, to je samo djelomično točno. Andersonova se analiza doista može prikazati i algebarskom simbolikom i u algebarskom obliku jednadžbe, ali njegova razmatranja problema ostaju u okvirima geometrijskih objekata. Stoga Andersonov geometrijski zapis nije ipak samo puko preodijevanje matematičkih problema u antičko ruho, već on doista u sklopu pojedinih problema razmatra razmjere dužina na potpuno geometrijski način, kako je to izloženo u petoj knjizi Euklidovih Elemenata. Takvi geometrijski razmjeri mogli su se pisati i razmatrati i na algebarski način, ali Anderson im nije tako pristupao. On traženu veličinu dobiva geometrijski pretvaranjem likova u spomenutom geometrijskom razmjeru, pa su i njegova rješenja potpuno geometrijska, dobivena iz geometrijskih relacija. Za jedan slučaj Horsly je prikazao Andersonovo rješenje potpuno simbolički i dobio algebarsku jednadžbu drugog stupnja.

kojoj ponovo rješava peti Apolonijev problem, ali ovog puta Vièteovom algebarskom metodom. Djelo je Anderson posvetio Marinu Getaldiću, a u njemu navodi kako nova zetetička metoda jasnije otkriva rješenje problema. Time još jednom potvrđuje kako mu je prioritet bio postignuće rješenja problema.