Kretanja koja to nisu

Ljiljana Sudar[1]

U Matematičko-fizičkom listu je već pisano o primjeni geometrijsko-fizičke metode u rješavanju raznih zadataka (*Geometrija i problemi kretanja*, MFL 2/ 234 i *Kaži mi kaži, koliko je sati?*, MFL 2/ 250).

Takav način rješavanja se bazira na elementarnoj geometriji i grafu ovisnosti brzine tijela od vremena i ne zahtijeva poznavanje eksplicitne ovisnosti brzine i prijeđenog puta od vremena ($s = v \cdot t$, $v = v_0 \pm a \cdot t$, $s = v_0 \cdot t \pm \frac{at^2}{2}$).

U ovom članku će biti izloženo kako se neki zadaci u kojima *nema* kretanja, također mogu lako rješavati primjenom ove geometrijsko-fizičke metode uzimajući u obzir njihovu posebnost. Bitno je da se u njima razmatra problem vezan za neki proces koji se odvija konstantnom brzinom, [2].

Najprije se podsjetimo nekih osnovnih pojmova vezanih za samu metodu, [1], [2].

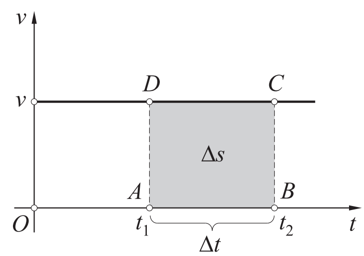
Ako promatrano tijelo tokom jednakih malih intervala vremena, Δt, uvijek prelazi jednake putove, Δs, putna brzina tijela, v, je stalna i tijelo se giba *jednoliko*. Putna brzina se, po definiciji, može odrediti dijeljenjem prijeđenog puta, Δs, s intervalom vremena, Δt, za koji je tijelo prešlo taj put

$$v \overset{def}{\equiv} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{1}$$

Iz definicije putne brzine (1) slijedi

$$\Delta s = v \cdot \Delta t. \tag{2}$$

Kad je putna brzina stalna (brzina tijela tokom vremena se ne menja), zavisnost brzine v od vremena t je pravac paralelan s t-osi (slika 1). Što predstavlja osjenčanu površinu pravokutnika P_{ABCD} (osnovice $|AB| = t_2 - t_1 = \Delta t$ i visine $|AD| = v$) na slici 1?



Slika 1.

Imajući u vidu (2), osjenčana površina $P_{ABCD} = |AB| \cdot |AD| = \Delta t \cdot v = \Delta s$ je upravo *prijeđeni put* Δs tijela, brzinom v, tokom intervala vremena Δt.

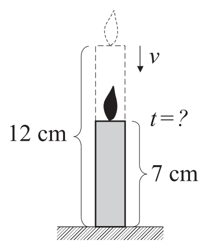
[1] Autorica je profesorica fizike u Leskovcu.

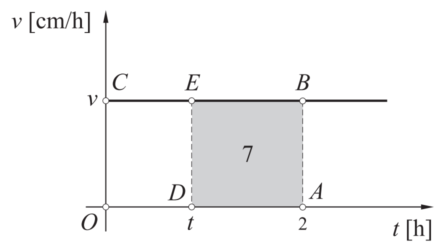
Dakle, površina ispod grafa brzine koja odgovara nekom intervalu vremena je prijeđeni put tijela u tom intervalu vremena.

Brzina se može izraziti u m/ s, km/ h ili u nekim drugim jedinicama, zavisno od jedinice za vrijeme na t-osi. Jedino je važno da jedinice na obje koordinatne osi budu *usklađene* (m/ s – s, km/ h – h i sl.), jer u tom slučaju, kod uspostavljanja veza između fizičkih veličina pomoću grafa, ne moramo preračunavati jedinice fizičkih veličina, već pišemo samo njihove brojčane vrijednosti. Na taj se način dobivaju preglednije formule. Izračunato vrijeme je u odgovarajućoj jedinici za vrijeme na t-osi, izračunata vrijednost brzine u onoj jedinici koja je stavljena na v-os, a izračunati prijeđeni put u jedinici koja je sadržana u jedinici brzine. Evo i nekoliko primjera.

Primjer 1. (*Županijsko natjecanje učenika osnovnih škola Republike Hrvatske 2001., V. razred, 1. zadatak.*) Svijeća visine 12 cm jednoliko gori i cijela izgori za dva sata. Za koliko će minuta svijeća, od trenutka kada je zapaljena, biti visoka točno 7 cm ([3])?

Rješenje. Ako se brzina gorenja svijeće shvati kao *kretanje* plamena, tada je za 2 sata prijeđeni put plamena jednak visini cijele svijeće, jer za 2 sata svijeća izgori. Poslije nekog vremena t, od trenutka kada je zapaljena, svijeća će biti visoka točno 7 cm (slika 2a).





Slika 2.

Slika 2b prikazuje ovisnost brzine gorenja svijeće tj. brzine *kretanja* plamena o vremenu. Nulti trenutak vremena na t-osi je onaj trenutak kada je svijeća zapaljena. S t je označen trenutak vremena kada je svijeća koja gori visoka točno 7 cm, a s 2 trenutak vremena kada cijela svijeća izgori.

Na slici 2b površina pravokutnika P_{OABC} (osnovice $|OA| = 2$ i visine $|OC| = v$) je prijeđeni put plamena svijeće za 2 sata tj. visina cijele svijeće:

$$12 = P_{OABC} = |OA| \cdot v = 2 \cdot v \implies v = \frac{12}{2} = 6 \left(\frac{\text{cm}}{\text{h}}\right). \tag{3}$$

U trenutku vremena t visina upaljene svijeće je točno 7 cm (osjenčana površina P_{DABE} na slici 2b). Do tog trenutka je izgorjelo 12 cm − 7 cm = 5 cm, što predstavlja prijeđeni put plamena svijeće do trenutka t. Na slici 2b taj put je površina pravokutnika P_{ODEC} (osnovice $|OD| = t$ i visine $|OC| = v$) tj.

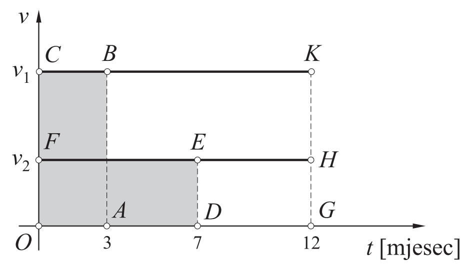
$$5 = P_{ODEC} = t \cdot v \implies t = \frac{5}{v} \text{ (h)}. \tag{4}$$

Zamjena (3) u (4) daje $t = \frac{5}{v} = \frac{5}{6}$ (h), ili u minutama $t = \frac{5}{6}\text{h} = \frac{5}{6} \cdot 60 \text{ min} = 50 \text{ min}$.

Dakle, svijeća će 50 minuta poslije paljenja biti visoka točno 7 cm.

Primjer 2. (*Državno natjecanje učenika osnovnih škola Republike Hrvatske 2007., VII. razred, 3. zadatak.*) Mineralog je promatrao dva kristala u stadiju formiranja i ravnomjernog porasta masa. Primijetio je da je porast mase prvog kristala za 3 mjeseca jednak porastu mase drugog kristala za 7 mjeseci. Po isteku godine pokazalo se da se masa prvog kristala povećala za 4, a drugog za 5 posto. U kojem su odnosu bile mase ovih kristala na početku ([3])?

Rješenje. Neka su m_1 i m_2 mase prvog i drugog kristala u trenutku kad započinje praćenje porasta njihove mase i neka su v_1 i v_2 brzine porasta mase kristala, tim redom. Da je porast mase ravnomjeran znači da je brzina kojom se masa kristala povećava stalna, tj. $v = \dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \text{const}$. To dalje znači da je u istim vremenskim intervalima Δt povećanje mase kristala Δm uvijek isto.



Slika 3.

Na slici 3 su dane ovisnosti brzina porasta mase oba kristala od vremena. Nulti trenutak vremena na t-osi je onaj kada započinje praćenje povećavanja mase kristala. Površina ispod grafa brzine predstavlja porast (povećanje) mase kristala za određeno vrijeme.

Porast mase prvog kristala za 3 mjeseca jednak je porastu mase drugog kristala za 7 mjeseci i iznosi Δm pa su na slici 3 jednake površine koje odgovaraju tim porastima masa.

Na slici 3 je povećanje mase Δm prvog kristala za 3 mjeseca osjenčana površina pravokutnika P_{OABC} (osnovice $|OA| = 3$ i visine $|OC| = v_1$) tj.

$$\Delta m = P_{OABC} = 3v_1. \tag{5}$$

Isti porast mase Δm drugog kristala za 7 mjeseci je na slici 3 osjenčana površina pravokutnika P_{ODEF} (osnovice $|OD| = 7$ i visine $|OF| = v_2$) tj.

$$\Delta m = P_{ODEF} = 7v_2. \tag{6}$$

Iz (5) i (6) se dobije veza između brzina porasta kristala:

$$3v_1 = 7v_2 \implies \frac{v_1}{v_2} = \frac{7}{3}. \tag{7}$$

Porast mase Δm_1 prvog kristala za godinu dana (tj. za 12 mjeseci) je površina pravokutnika P_{OGKC} (osnovice $|OG| = 12$ i visine $|OC| = v_1$) tj.

$$\Delta m_1 = P_{OGKC} = 12v_1. \tag{8}$$

Imajući u vidu (8) i da se masa prvog kristala za 12 mjeseci povećala za 4 posto ($4\% = 0.04$) tj. za $0.04m_1$, vrijedi:

$$0.04m_1 = 12v_1 \implies m_1 = \frac{12v_1}{0.04}. \tag{9}$$

Porast mase Δm_2 drugog kristala za godinu dana (tj. za 12 mjeseci) je površina pravokutnika P_{OGHF} (osnovice $|OG| = 12$ i visine $|OF| = v_2$) tj.

$$\Delta m_2 = P_{OGHF} = 12v_2. \tag{10}$$

Imajući u vidu (10) i da se masa drugog kristala za 12 mjeseci povećala za 5 posto ($5\% = 0.05$) tj. za $0.05m_2$, vrijedi:

$$0.05m_2 = 12v_2 \implies m_2 = \frac{12v_2}{0.05}. \tag{11}$$

Dijeljenjem (9) i (11), imajući u vidu (7), dobije se odnos masa kristala na početku promatranja:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\frac{12v_1}{0.04}}{\frac{12v_2}{0.05}} = \frac{0.05v_1}{0.04v_2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{12}.$$

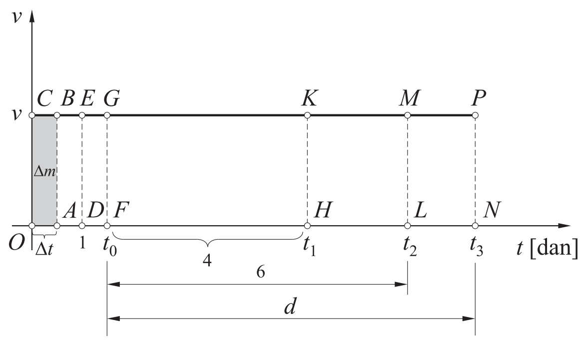
Dakle, odnos masa kristala na početku je $\frac{m_1}{m_2} = \frac{35}{12}$.

Primjer 3. Na livadi raste trava. Kada bi se tamo pustilo 9 krava, one bi popasle svu travu za 4 dana, a ako bi na nju bilo pušteno 8 krava, one bi popasle svu travu za 6 dana. Koliko se krava može ishranjivati na livadi za sve vrijeme dok trava raste ([4])?

Rješenje. Pretpostavka je da na cijeloj livadi trava raste podjednako brzo i gusto. Neka je Δm masa porasle trave na cijeloj livadi u itervalu vremena Δt, pa je brzina kojom raste trava

$$v = \frac{\Delta m}{\Delta t}. \tag{12}$$

Na slici 4 je dana ovisnost brzine rasta trave o vremenu. Nulti trenutak vremena na t-osi je onaj kada je na livadi trava počela rasti stalnom brzinom v, t_0 trenutak kada su krave došle na livadu i počele ravnomjerno pasti travu, t_1 trenutak do kojeg bi 9 krava popaslo svu travu s livade za 4 dana $(t_1 - t_0 = 4$ dana$)$, t_2 trenutak vremena do kojeg bi 8 krava popaslo svu travu s livade za 6 dana $(t_2 - t_0 = 6$ dana$)$ i t_3 trenutak vremena do kojeg bi izvjestan broj krava popaslo svu travu s livade.



Slika 4.

Masa Δm narasle trave na livadi u vremenskom intervalu Δt je na slici 4, imajući u vidu (12), $\Delta m = v\Delta t$. Na slici 4 je ta masa Δm osjenčana površina pravokutnika P_{OABC} (osnovice $|OA| = \Delta t$ i visine $|OC| = v$) tj. $\Delta m = P_{OABC}$.

Dakle, površina ispod grafa ovisnosti brzine rasta trave od vremena predstavlja ukupnu masu trave na livadi.

Masa trave m, koja naraste na livadi za *jedan dan*, na slici 4 je površina pravokutnika P_{ODEC} (osnovice $|OD| = 1$ i visine $|OC| = v$) tj.

$$m = P_{ODEC} = 1 \cdot v = v. \tag{13}$$

Masa trave m_0, koja je na livadi narasla do trenutka t_0 (kad su krave došle na livadu), na slici 4 je površina P_{OFGC} pravokutnika (osnovice $|OF| = t_0$ i visine $|OC| = v$) tj.

$$m_0 = P_{OFGC}. \tag{14}$$

Masa trave m_1, koja je na livadi narasla do trenutka t_1 (i koju bi 9 krava popaslo za 4 dana), na slici 4 je površina pravokutnika P_{OHKC} (osnovice $|OH| = t_1$ i visine $|OC| = v$) tj.

$$m_1 = P_{OHKC} = P_{OFGC} + P_{FHKG} = m_0 + 4v. \tag{15}$$

dok je površina pravokutnika P_{FHKG} (osnovice $|FH| = 4$ i visine $|FG| = v$) masa narasle trave za 4 dana tj. $P_{FHKG} = 4v$.

Neka je m_P masa trave koju dnevno popase jedna krava (*kravlja porcija*).

Za 4 dana jedna krava bi popasla masu trave $4m_P$, a svih 9 krava za isto vreme masu trave $9 \cdot 4 \cdot m_P = 36m_P$ tj. svu travu s livade, pa je, imajući u vidu (15):

$$m_1 = 36m_P \implies m_0 + 4v = 36m_P. \tag{16}$$

Masa trave m_2, koja je na livadi narasla do trenutka t_2 (i koju bi 8 krava popaslo za 6 dana), na slici 4 je površina pravokutnika P_{OLMC} (osnovice $|OL| = t_2$ i visine $|OC| = v$) tj.

$$m_2 = P_{OLMC} = P_{OFGC} + P_{FLMG} = m_0 + 6v \tag{17}$$

dok je površina pravokutnika P_{FLMG} (osnovice $|FL| = 6$ i visine $|FG| = v$) masa narasle trave za 6 dana tj. $P_{FLMG} = 6v$.

Za 6 dana jedna krava bi popasla masu trave $6m_P$, a svih 8 krava za isto vrijeme masu trave $8 \cdot 6 \cdot m_P = 48m_P$ tj. svu travu s livade.

Imajući u vidu (17) vrijedi:

$$m_2 = 48m_P \implies m_0 + 6v = 48m_P. \tag{18}$$

Masa trave m_3, koja je na livadi narasla do trenutka t_3 (i koju bi k krava popaslo za d dana), na slici 4 je površina pravokutnikaP_{ONPC} (osnovice $|ON| = t_3$ i visine $|OC| = v$) tj.

$$m_3 = P_{ONPC} = P_{OFGC} + P_{FNPG} = m_0 + dv \tag{19}$$

dok je površina pravokutnika P_{FNPG} (osnovice $|FN| = d$ i visine $|FG| = v$) masa narasle trave za d dana tj. $P_{FNPG} = dv$.

Za d dana jedna krava bi popasla masu trave dm_P, a svih k krava, za isto vrijeme, masu trave kdm_P tj. *svu travu* s livade.

Imajući u vidu (19) vrijedi:

$$m_3 = kdm_P \implies m_0 + dv = kdm_P. \tag{20}$$

Oduzimanjem (16) od (18) dobije se brzina rasta trave v:

$$2v = 12m_P \implies v = 6m_P. \tag{21}$$

Zamjenom (21) u (16) dobije se početna masa m_0 trave na livadi:

$$m_0 + 4 \cdot 6m_P = 36m_P \implies m_0 = 12m_P. \tag{22}$$

Zamjena (22) i (21) u (20) daje:

$$12m_P + d \cdot 6m_P = kdm_P \implies 12 = d(k-6). \tag{23}$$

Kako je $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 6 \cdot 2 = 12 \cdot 1$ može biti:

d	1	2	3	4	6	12
$k-6$	12	6	4	3	2	1
k	18	12	10	9	8	7

Dakle, livadu će popasti: 18 krava za 1 dan ili 12 krava za 2 dana ili 10 krava za 3 dana ili 9 krava za 4 dana ili 8 krava za 6 dana ili 7 krava za 12 dana.

Zanimljivo je vidjeti koliko krava može pasti na livadi, a da ne popase svu travu.

Da bi to bilo moguće, krave bi trebale za jedan dan popasti samo onoliko trave koliko je za jedan dan naraste na livadi.

Masa m trave koja naraste na livadi za jedan dan je, imajući u vidu (13) i (21), $m = v = 6m_P$, što znači da na livadi dnevno naraste masa trave koja iznosi 6 *kravljih porcija*.

Prema tome, na livadi se može trajno ishranjivati, tj. sve vrijeme dok trava raste, samo 6 krava!

Primjenom ove geometrijsko-fizičke metode sada neće biti teško i samostalno riješiti zadatak *Krave na livadi* iz Newtonove *Opće aritmetike*.

Primjer 4. Po cijeloj livadi trava raste podjednako brzo i gusto. Poznato je da bi svu travu s te livade 70 krava popasle za 24 dana, a 30 krava za 60 dana. Koliko krava bi svu tu travu popasle za 96 dana? (Pretpostavlja se da su krave travu pasle ravnomjerno, [5].)

Rješenje. 20 krava.

Literatura

[1] LJILJANA SUDAR, *Geometrija i problemi kretanja*, MFL 2/ 234, god. LIX, Zagreb 2008./ 2009., str. 95–101.

[2] LJILJANA SUDAR, *Geometrija pomaže fizici – zbirka zadataka iz kretanja sa nestandardnim rešenjima*, I deo, Poglavlje 1 i 8, Leskovac 2013. (u pripremi).

[3] *Natjecanja iz matematike u Republici Hrvatskoj*, URL: `http://public.carnet.hr/mat-natj/zadaci-OS.htm` (pristupljeno 4.4.2013.).

[4] *Nekoliko zanimljivih matematičkih zadataka*, MFL 3/ 114, god. XXVIII, Društvo matematičara i fizičara SRH, Zagreb 1977./ 1978., zadatak 1, str. 108.

[5] A. ZOLIĆ, *Zbirka rešenih konkursnih zadataka za učenike IV–VIII razreda*, drugo izdanje, Društvo matematičara SR Srbije, posebna izdanja, Matematički list za učenike osnovne škole (god. I–XII), Beograd 1990., zadatak 111E, str. 16.