ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2014. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/ 256.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 144.

A) Zadaci iz matematike

3388. Dokaži da je broj $10\dots01$, s 500 nula, djeljiv s 1001.

3389. a) Ako su x, y pozitivni realni brojevi, dokaži nejednakost

$$\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

b) Ako su x_k, $k=1,2,\dots,n$ pozitivni realni brojevi, dokaži nejednakost

$$\frac{x_1+x_3}{x_2^2}+\frac{x_2+x_4}{x_3^2}+\dots+\frac{x_n+x_2}{x_1^2}\geqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}.$$

3390. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i α, β, γ nasuprotni im kutovi, dokaži nejednakost

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geqslant 4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

3391. Promatraj četvrtinu kruga polumjera R. Iz jedne krajnje točke luka opiši luk polumjera R koji dijeli promatranu četvrtinu kruga na dva "zakrivljena trokuta". U manji od njih upisana je kružnica polumjera r. Koliki je omjer $\frac{r}{R}$?

3392. Tri kružnice $k_1(r_1)$, $k_2(r_2)$ i $k_3(r_3)$, tim redom, dodiruju dva pravca, a srednja od njih dodiruje dvije preostale. Dokaži da vrijedi

$$r_1r_3=r_2^2.$$

3393. Nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ s vanjske strane trokuta ABC konstruirani su kvadrati ACB_1A_1 i BAA_2B_2. Nađi duljinu dužine $\overline{A_1A_2}$ u zavisnosti od duljina a, b, c stranica trokuta.

3394. Duljine stranica pravokutnika $ABCD$ su $|AB|=6$ cm i $|BC|=2$ cm. Na stranici $\overline{AB}$ su dane točke E i F tako da je $|AE|=|EF|=|FB|$. Pravac DF siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki G. Dokaži da je $EG\perp DF$.

3395. Ako su k i n prirodni brojevi, dokaži da $1+2+\dots+n$ dijeli $1^k+2^k+\dots+n^k$.

3396. Odredi sumu

$$\cos\alpha+\binom{n}{1}\cos(\alpha+\beta)+\binom{n}{2}\cos(\alpha+2\beta)+\dots+\cos(\alpha+n\beta).$$

3397. Promatraj kvadratne jednadžbe $x^2+a_kx+b_k=0$, $k=1,2,\dots,8$. Svaka od njih ima jedno rješenje $x_0=2$ dok je zbroj svih preostalih jednak 2008. Dokaži da su oba rješenja jednadžbe

$$x^2+\frac{a_1+a_2+\dots+a_8}{8}x+\frac{b_1+b_2+\dots+b_8}{8}=0$$

prosti brojevi.

3398. Dani su realni brojevi a, b, c za koje vrijedi

$$a+b+c=2 \text{ i } a^2+b^2+c^2=2.$$

Dokaži da između njih postoje dva čija je razlika veća ili jednaka 1.

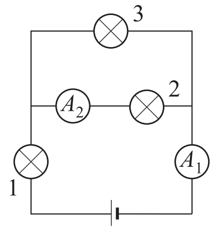
3399. Da li je vjerojatnije da će kod bacanja tri kocke ukupan zbroj brojeva na njima biti 11 ili 12?

3400. Baza piramide je jednakokračan trokut s bočnom stranicom a i kutom u vrhu φ. Svi bočni bridovi zatvaraju s ravninom baze kut β. Koliki je volumen piramide?

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 366. Zemljina se atmosfera proteže do visine od nekoliko stotina kilometara, ali se 90 posto zraka nalazi u prvih 8 kilometara. Atmosferski tlak nastaje zbog težine zraka. Na razini mora iznosi 101 325 Pa. Kolika se masa zraka nalazi u stupcu zraka površine 10 cm^2 koji se proteže od površine mora do vrha atmosfere?

OŠ – 367. Na ampermetru A_1 se očitava struja od 800 mA, a na ampermetru A_2 od 300 mA. Koliki naboj prođe kroz treće trošilo za 10 minuta?



OŠ – 368. Dva su komada olova istovremeno spuštena s različitih visina. Prvi, spušten s visine od 45 metara, udario je u tlo sekundu prije drugog. S koje je visine pao drugi komad? Koliko mu je nakon udara porasla temperatura ako pretpostavimo da je 70 posto njegove gravitacijske potencijalne energije prešlo u njegovu unutarnju energiju?

OŠ – 369. Arhimedov zakon kaže da svako tijelo uronjeno u tekućinu prividno gubi na težini onoliko koliko teži tim tijelom istisnuta tekućina. Tijelo mase 800 grama je obješeno na dinamometar i uronjeno u vodu, tako da ne dodiruje dno. "Težina" mu je tada iznosila 5.5 N (njutna). Kolika je gustoća tog tijela? Gustoća vode je $1000\ \mathrm{kg/m^3}$.

1546. Kuglica se kotrlja niz kosinu nagiba α. Iz stanja mirovanja na vrhu kosine, kuglici je potrebno 5 puta dulje vrijeme da se spusti do dna kosine, nego što bi joj trebalo slobodnim padom s iste visine. Odredi kut kosine α.

1547. Na udaljenosti 100 kilometara iznad površine asteroida kuglastog oblika, prosječne gustoće $2700\ \mathrm{kg/m^3}$ ubrzanje sile teže iznosi 42% ubrzanja na površini. Odredi radijus i masu asteroida, te ubrzanje sile teže na površini.

1548. Da bi 200 g vode potpuno ishlapilo iz čaše, potrebno je 20 dana. Koliko molekula prosječno izleti s površine vode u 1 s?

1549. Staklena boca ima obujam $2000\ \mathrm{cm^3}$ pri $0\,^\circ\mathrm{C}$. Pri $0\,^\circ\mathrm{C}$ boca je do ruba napunjena alkoholom. Koliko će alkohola izaći iz boce kad ju ugrijemo na $50\,^\circ\mathrm{C}$?

1550. Sabirna leća napravljena je od stakla indeksa loma 1.502 za crvenu i 1.507 za plavu svjetlost. Odredi kromatsku aberaciju (udaljenost žarišta za crvenu i plavu svjetlost), ako je jakost leće $+1.5$ dpt za crvenu svjetlost.

1551. Meteor prolazi po hiperboličnoj putanji pored Zemlje. U trenutku najvećeg približenja (u perihelu) udaljen je 250 000 km od središta Zemlje i giba se brzinom 8.5 km/s u odnosu na Zemlju. Odredi za koji je kut meteor skrenuo s prvobitne putanje (u sustavu mirovanja Zemlje). Masa Zemlje je $6\cdot10^{24}$ kg.

1552. Odredi temperaturu čistog dušika u kojemu razlika srednje brzine i srednje kvadratične brzine gibanja molekula iznosi 41 m/s.

C) Rješenja iz matematike

3363. *Neka je* $r>1$ *realan broj takav da je* $\sqrt[6]{r}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{r}}=6$. *Nađi maksimalnu vrijednost od* $\sqrt[4]{r}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{r}}$.

Rješenje. Imamo:

$$\sqrt[6]{r}+\frac{1}{\sqrt[6]{r}}=6\ /\ ^3$$

$$(\sqrt[6]{r})^3+3(\sqrt[6]{r})^2\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{r}}$$
$$+3\cdot\sqrt[6]{r}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[6]{r}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt[6]{r}}\right)^3=216$$

$$\sqrt{r}+\frac{1}{\sqrt{r}}+3\left(\sqrt[6]{r}+\frac{1}{\sqrt[6]{r}}\right)=216$$

$$\sqrt{r}+\frac{1}{\sqrt{r}}+3\cdot6=216$$

tj.

$$\sqrt{r}+\frac{1}{\sqrt{r}}=198. \qquad (1)$$

Neka je $x=\sqrt[4]{r}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{r}}$. Tada je

$$x^2=\sqrt{r}-2\sqrt[4]{r}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{r}}+\frac{1}{\sqrt{r}}=\sqrt{r}+\frac{1}{\sqrt{r}}-2.$$

Odavde i iz (1) dobijemo $x^2=198-2=196$ tj. $x=14$. Slijedi

$$\max_{r>1}\left(\sqrt[4]{r}-\frac{1}{\sqrt[4]{r}}\right)=14.$$

Halil Lačević (1),
Sarajevo Collage, Sarajevo, BiH

3364. *Neka su a i b realni brojevi takvi da je*

$$9a^2 + 8ab + 7b^2 \leqslant 6.$$

Dokaži da je $7a + 5b + 12ab \leqslant 9$.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. $7a + 5b + 12ab > 9$. Tada je

$$9a^2 - 4ab + 7b^2 - 7a - 5b < -3$$

$$7a^2 - 7a + \frac{7}{4} + 2a^2 - 4ab + 2b^2 + 5b^2 - 5b + \frac{5}{4} < 0$$

$$7\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 2(a-b)^2 + 5\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 < 0,$$

što nije moguće.

Dakle $7a + 5b + 12ab \leqslant 9$.

Petar Orlić (1), Zagreb

3365. *Ako je a, b, $c > 0$, dokaži nejednakost*

$$\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{ac}} + \sqrt{\frac{(b+c)(c+a)}{ab}} + \sqrt{\frac{(c+a)(a+b)}{bc}} \geqslant 3 + \frac{a}{\sqrt{bc}} + \frac{b}{\sqrt{ac}} + \frac{c}{\sqrt{ab}}.$$

Rješenje. Dokazat ćemo najprije

$$\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{ac}} \geqslant 1 + \frac{b}{\sqrt{ac}} = \frac{b + \sqrt{ac}}{\sqrt{ac}}.$$

Ova nejednakost je redom ekvivalentna s

$$\sqrt{(a+b)(b+c)} \geqslant b + \sqrt{ac}$$

$$ab + ac + bc + b^2 \geqslant b^2 + ac + 2b\sqrt{ac}$$

$$ab + bc \geqslant 2b\sqrt{ac}$$

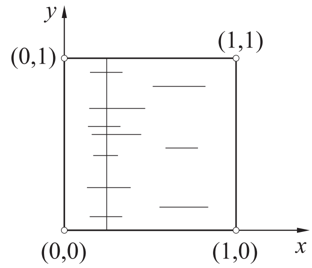
što slijedi iz A-G nejednakosti.

Cikličkim sumiranjem ove nejednakosti dokaže se tražena.

Petar Orlić (1), Zagreb

3366. *Unutar jediničnog kvadrata nalazi se nekoliko kružnica čiji je zbroj opsega jednak 22. Dokaži da postoji beskonačno mnogo pravaca koji sijeku barem 7 od tih kružnica.*

Rješenje. Neka su vrhovi jediničnog kvadrata $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ $(0,1)$.



Promatrajmo promjere kružnica koji su paralelni osi x i pravce okomite na os x. Projicirajmo te promjere na segment $[0,1]$. Dovoljno je pokazati da postoji interval $(a,b) \subset [0,1]$ takav da svaki pravac okomit na x-os koji prolazi kroz točku intervala (a,b) siječe barem 7 kružnica. Ukupan zbroj promjera je jednak $\frac{22}{\pi} \approx 7.0028 > 7$. Ako ne bi postojao nijedan interval (a,b), $a < b$ takav da svaki pravac kroz točku iz tog intervala ne bi sijekao barem 7 promjera, onda ukupna duljina promjera ne bi bila veća od 7, a to je u suprotnosti s činjenicom da je njihov zbroj strogo veći od 7.

Dakle, postoji interval (a,b), $a < b$ takav da svaki pravac kroz tu točku siječe barem 7 promjera, pa onda i 7 kružnica. Interval (a,b), $a < b$ sadrži beskonačno mnogo točaka.

Petar Orlić (1), Zagreb

3367. *Riješi diofantsku jednadžbu*

$$18x + 20y + 15z = 1.$$

Prvo rješenje. Kako je $\text{nzm}(18,20,15) = 1 \mid 1$, dana jednadžba ima rješenje u skupu $\mathbf{Z}$ cijelih brojeva. Napišimo je u obliku

$$18x + 20y = 1 - 15z.$$

Kako je $\text{nzm}(18,20) = 2$, to će ova jednadžba imati rješenja ako je: $\frac{1 - 15z}{2} = t$, $t \in \mathbf{Z}$. Dakle, $15z + 2t = 1$. Ova jednadžba ima rješenje jer vrijedi $\text{nzm}(15,2) = 1 \mid 1$. Partikularno rješenje ove jednadžbe je $z_0 = 1$, $t_0 = -7$. Nađimo njezino opće rješenje:

$$15z + 2t = 1$$

$$15 \cdot 1 + 2 \cdot (-7) = 1$$

$$\Longrightarrow \; 15(z-1) + 2(t+7) = 0,$$

$$z-1=2v \text{ i } t+7=-15v, \quad v,t\in\mathbf{Z}.$$

Rješenje je $z=1+2v$. Iz dane jednadžbe dobivamo:

$$18x+20y+15(1+2v)=1$$
$$18x+20y=-14-30v \ / \ :2$$
$$9x+10y=-7-15v.$$

Njezino partikularno rješenje je $x_0=-3-5v$ i $y_0=2+3v$. Njezino opće rješenje glasi: $x=-3-5v+10u$, $y=2+3v-9u$, $z=1+2v$, u, $v\in\mathbf{Z}$.

Halil Lačević (1), Sarajevo, BiH

Drugo rješenje. Kako je $\text{nzm}(18,20,15)=1$, jednadžba ima rješenje. Svako od njih zadovoljava kongruenciju (za modul uzmemo $2=\text{nzm}(18,20)$)

$$18x+20y+15z\equiv 1 \pmod 2,$$

pa je $z\equiv 1 \pmod 2$ i $z=1+2s$, $s\in\mathbf{Z}$.

Supstitucijom dobivamo

$$18x+20y+15(1+2s)=1,$$

i nakon dijeljenja s 2 imamo

$$9x+10y=-7-15s, \tag{1}$$

što ćemo riješiti po $s\in\mathbf{Z}$. Ako je ta jednadžba zadovoljena vrijedi kongruencija

$$9x+10y\equiv -7-15s \pmod 9,$$

odakle je $y\equiv 2+3s \pmod 9$ i konačno $y=2+3s+9t$, $t\in\mathbf{Z}$. Supstitucijom u jednadžbu (1) dobivamo

$$9x+10(2+3s+9t)=-7-15s,$$

odakle je $x=-3-5s-10t$. Dakle, rješenje polazne jednadžbe je $x=-3-5s-10t$, $y=2+3s+9t$, $z=1+2s$, s, $t\in\mathbf{Z}$.

Ur.

3368. *Odredi*

$$\max_{z\in\mathbf{C},\,|z|=1} |z^3-z+2|^2.$$

Rješenje. Neka je $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, $f(z)=z^3-z+2$. Trebamo odrediti $\max\limits_{|z|=1}|f(z)|^2$. Ovo se svodi na realne koordinate. Ako je $|z|=1$ tada je $z=x+iy$ i $y^2=1-x^2$, $-1\leqslant x\leqslant 1$. Na taj način svodimo $|f(z)|^2$ na jediničnoj kružnici na funkciju koja ovisi o realnoj varijabli x:

$$\begin{aligned}
&|f(z)|^2\\
=&|(x+iy)^3-(x+iy)+2|^2\\
=&|(x^3-3xy^2-x+2)+iy(3x^2-y^2-1)|^2\\
=&|(x^3-3x(1-x^2)-x+2)+iy(3x^2-(1-x^2)-1)|^2\\
=&(4x^3-4x+2)^2+(1-x^2)(4x^2-2)^2\\
=&16x^3-4x^2-16x+8=g(x).
\end{aligned}$$

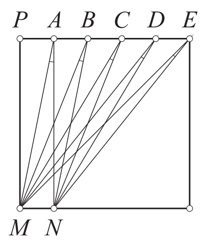
Maksimum ove funkcije na $[-1,1]$ se dostiže ili u stacionarnim točkama ili na krajevima intervala. Stacionarne točke se određuju iz:

$$g'(x)=48x^2-8x-16=0 \quad \text{tj.}$$
$$6x^2-x-2=0$$
$$x_1=\frac{2}{3}, \qquad x_2=-\frac{1}{2}.$$

Sada je $g(-1)=4$, $g\left(-\frac{1}{2}\right)=13$, $g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}$, $g(1)=4$. Maksimum se postiže za $x=-\frac{1}{2}$ i on iznosi 13. Postiže se za $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Ur.

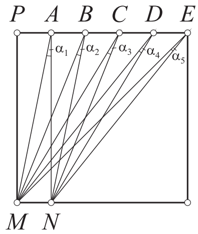
3369. *Na slici je prikazan kvadrat i točke M, N, P, A, B, C, D, E tako da je $|PA|=|AB|=|BC|=|CD|=|DE|=|MN|$. Koliki je zbroj kutova MAN, MBN, MCN, MDN i MEN.*



Rješenje.

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)\\
=&[(\sin\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\alpha_1\sin\alpha_2)\cos\alpha_3\\
&\quad+(\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_1\sin\alpha_2)\sin\alpha_3]\\
&\quad\cdot(\cos\alpha_4\cos\alpha_5-\sin\alpha_4\sin\alpha_5)\\
&\quad+[(\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_1\sin\alpha_2)\cos\alpha_3
\end{aligned}$$

$$- (\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2)\sin\alpha_3]$$
$$\cdot (\sin\alpha_4\cos\alpha_5 + \cos\alpha_4\sin\alpha_5)$$



$$\sin\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}, \qquad \cos\alpha_1 = \frac{5}{\sqrt{26}}$$
$$\cos\alpha_2 = \frac{|MB|^2+|NB|^2-|MN|^2}{2|MB|\cdot|NB|} = \frac{27}{\sqrt{29\cdot 26}},$$
$$\sin\alpha_2 = \frac{5}{\sqrt{29\cdot 26}},$$
$$\cos\alpha_3 = \frac{|MC|^2+|NC|^2-|MN|^2}{2|MC|\cdot|NC|} = \frac{31}{\sqrt{34\cdot 29}},$$
$$\sin\alpha_3 = \frac{5}{\sqrt{34\cdot 29}},$$
$$\cos\alpha_4 = \frac{|MD|^2+|ND|^2-|MN|^2}{2|MD|\cdot|ND|} = \frac{37}{\sqrt{41\cdot 34}},$$
$$\sin\alpha_4 = \frac{5}{\sqrt{41\cdot 34}},$$
$$\cos\alpha_5 = \frac{|ME|^2+|NE|^2-|MN|^2}{2|ME|\cdot|NE|} = \frac{9}{\sqrt{41\cdot 2}},$$
$$\sin\alpha_5 = \frac{5}{\sqrt{41\cdot 2}},$$
$$\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dakle, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5 = 45^\circ$.

Ur.

3370. *Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i α, β, γ nasuprotni im kutovi, dokaži jednakost*

$$\frac{a^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{b^2}{\sin^2\frac{\beta}{2}} + \frac{c^2}{\sin^2\frac{\gamma}{2}} - \frac{2bc}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Rješenje. Iz $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$ dana jednakost je redom ekvivalentna sljedećima

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\frac{\beta}{2}} + \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\frac{\gamma}{2}} - \frac{2\sin\beta\sin\gamma}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} - 2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

(iz $2\cos x\cos y = \cos(x-y)+\cos(x+y)$ dobivamo)

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} - \left[\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\right]\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} - \cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} - \cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

$$1 = \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} - \cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2} + \left(1-\cos^2\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)$$

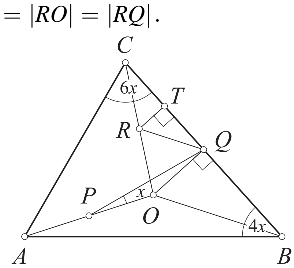
$$1 = 1,$$

što znači da je i polazna jednakost istinita.

Ur.

3371. *Neka je O središte trokutu ABC opisane kružnice, P i Q polovišta dužina $\overline{AO}$ i $\overline{BC}$, tim redom. Ako je $\sphericalangle CBA = 4\sphericalangle OPQ$ i $\sphericalangle ACB = 6\sphericalangle OPQ$, odredi veličinu $\sphericalangle OPQ$.*

Rješenje. Neka je R polovište od $\overline{OC}$. Tada je $|PO| = |RO| = |RQ|$.



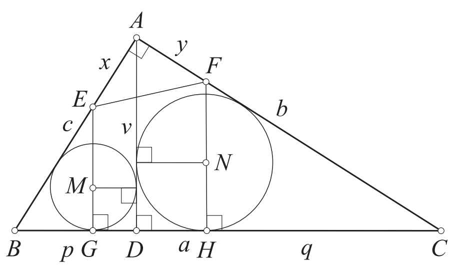
Neka je $\sphericalangle OPQ = x$. Tada je $\sphericalangle POR = 2\sphericalangle ABC = 8x$ i $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BCA = 12x$. Također je $\sphericalangle ROQ = \frac{1}{2}\sphericalangle COB = \frac{1}{2}(360^\circ - \sphericalangle AOC - \sphericalangle BOA) = 180^\circ - 10x$. Dobivamo $\sphericalangle OQP = 180^\circ - \sphericalangle OPQ - \sphericalangle AOC - \sphericalangle ROQ = 180^\circ - x - 8x - (180^\circ - 10x) = x$, pa je $|PO| = |OQ|$. Dakle, $\triangle OQR$ je jednakostraničan i $\sphericalangle ROQ = 180^\circ - 10x = 60^\circ$, tj. $x = 12^\circ$.

Petar Orlić (1), Zagreb

3372. *U pravokutnom trokutu ABC kut uz vrh A je pravi. Neka je $\overline{AD}$ njegova visina na stranicu BC. S M i N označena su središta trokutima ABD u ACD upisanih kružnica. Pravci kroz M i N paralelni s AD sijeku stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama E i F. Dokaži da je $|AE| = |AF|$.*

Rješenje. Prema slici imamo

$$|MG| = |GD| = \frac{vp}{c+v+p},$$
$$|NH| = |HD| = \frac{vq}{b+v+q}.$$



Iz sličnosti trokuta ABD i EBG te ACD i FCH imamo

$$\frac{c}{p} = \frac{c-x}{p - \dfrac{vp}{c+v+p}}, \quad c = \frac{c-x}{\dfrac{c+p}{c+v+p}},$$
$$c(c+p) = (c-x)(c+v+p),$$
$$x(c+v+p) = cv.$$

Analogno je

$$y(b+v+q) = bv.$$

Iz sličnosti trokuta ABD i CAD dobivamo

$$\frac{c}{p} = \frac{b}{v}, \qquad cv = bp,$$
$$\frac{b}{q} = \frac{c}{v}, \qquad cq = bv.$$

Sada je

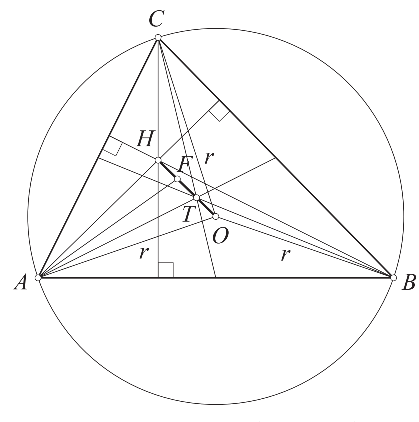
$$x : y = \frac{c}{c+v+p} : \frac{b}{b+v+q}$$
$$= (bc + cv + cq) : (bc + bv + bp) = 1 : 1,$$
$$x = y.$$

Petar Orlić (1), Zagreb

3373. *Neka su A, B, C tri točke na kružnici polumjera $r = 1$, a T i H su, tim redom, težište i sjecište visina trokuta ABC. S F je označeno polovište dužine $\overline{TH}$. Koliko je $|AF|^2 + |BF|^2 + |CF|^2$?*

Prvo rješenje. Po Eulerovom teoremu točke H, T, O su kolinearne (točka O je središte opisane kružnice trokuta). Vrijedi

$$|OT| : |TH| = 1 : 2$$



$$|OF| = |OT| + |TF| = \frac{1}{2}|TH| + \frac{1}{2}|TH|$$
$$|TH| = \frac{2}{3}|OH|.$$

Koristit ćemo Stewartov teorem za $\triangle AHO$:

$$|AF|^2 \cdot |OH| = |AH|^2 \cdot |OF| + |AO|^2 \cdot |HF| - |OH| \cdot |HF| \cdot |OF|,$$

a odavde zbog $|AO| = 1$ i $|HF| = \frac{1}{2}|TH| = |OT| = \frac{1}{3}|OH|$:

$$|AF|^2 \cdot |OH| = |AH|^2 \cdot |OF| + 1^2 \cdot \frac{1}{3}|OH| - |OH| \cdot \frac{1}{3}|OH| \cdot \frac{2}{3}|OH|,$$

$$|AF|^2\cdot|OH| = |AH|^2\cdot|OF| + \frac{1}{3}|OH| - \frac{2}{9}|OH|^3. \tag{1}$$

Analogno iz $\triangle BHO$ i $\triangle CHO$ dobivamo:

$$|BF|^2\cdot|OH| = |BH|^2\cdot|OF| + \frac{1}{3}|OH| - \frac{2}{9}|OH|^3, \tag{2}$$

$$|CF|^2\cdot|OH| = |CH|^2\cdot|OF| + \frac{1}{3}|OH| - \frac{2}{9}|OH|^3. \tag{3}$$

Nakon zbrajanja (1), (2) i (3) dobivamo:

$$\begin{aligned}&(|AF|^2+|BF|^2+|CF|^2)\cdot|OH|\\ &= (|AH|^2+|BH|^2+|CH|^2)\cdot|OF|\\ &\quad + |OH| - \frac{2}{3}|OH|^3,\\ &(|AF|^2+|BF|^2+|CF|^2)\cdot|OH|\\ &= \frac{2}{3}|OH|(|AH|^2+|BH|^2+|CH|^2)\\ &\quad + |OH| - \frac{2}{3}|OH|^3,\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}&|AF|^2+|BF|^2+|CF|^2\\ &= \frac{2}{3}(|AH|^2+|BH|^2+|CH|^2) + 1 - \frac{2}{3}|OH|^2.\end{aligned} \tag{4}$$

Poznato je da vrijede sljedeće jednakosti:

$$|OH|^2 = 9r^2 - (a^2+b^2+c^2),$$

tj.

$$|OH|^2 = 9 - (a^2+b^2+c^2), \tag{5}$$

te

$$|AH|^2+|BH|^2+|CH|^2 = 12r^2 - (a^2+b^2+c^2),$$

tj.

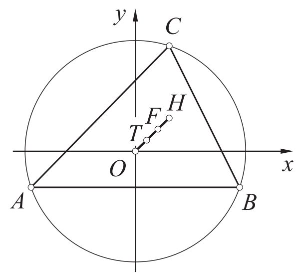
$$|AH|^2+|BH|^2+|CH|^2 = 12 - (a^2+b^2+c^2). \tag{6}$$

Sada iz (4), (5) i (6) dobivamo

$$\begin{aligned}&|AF|^2+|BF|^2+|CF|^2\\ &= \frac{2}{3}[12-(a^2+b^2+c^2)] + 1\\ &\quad - \frac{2}{3}[9-(a^2+b^2+c^2)]\\ &|AF|^2+|BF|^2+|CF|^2 = 3.\end{aligned}$$

Halil Lačević (1), Sarajevo, BiH

Drugo rješenje. Stavimo ishodište koordinatnog sustava O u središte opisane kružnice $\triangle ABC$.



Sada je

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad \text{i}$$

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Imamo

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OH}}{2} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Nadalje

$$\begin{aligned}&|AF|^2+|BF|^2+|CF|^2\\ &= (\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA})\\ &\quad + (\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB})\\ &\quad + (\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OC})\\ &= |OA|^2+|OB|^2+|OC|^2\\ &\quad - [2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) - 3\overrightarrow{OF}]\cdot\overrightarrow{OF}\\ &= |OA|^2+|OB|^2+|OC|^2 = 3.\end{aligned}$$

Ur.

3374. *Koliko ima nenegativnih cijelih brojeva manjih od* 10^6 *koji sadrže svaku znamenku 1, 2, 3, 4?*

Rješenje. Neka je N traženi broj i n broj nenegativnih cijelih brojeva manjih od 10^6 koji ne sadrže jednu ili više znamenaka 1, 2, 3, 4. Kako se dekadski prikaz cijelog broja s manje znamenaka može dopuniti do "šesteroznamenkastog" broja dodavanjem odgovarajućeg broja nula, imamo

$$N = 10^6 - n.$$

Za $i = 1, 2, 3, 4$ označimo s M_i skup svih, najviše šesteroznamenkastih cijelih brojeva koji ne sadrže znamenku i u njihovom prikazu. Tada je $n = |M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4|$.

Za svaki neprazni podskup $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ od $\{1,2,3,4\}$ imamo $|M_{j1} \cap M_{j2} \cap \ldots \cap M_{jr}| = (10-r)^6$. Po principu uključivanja-isključivanja imamo

$$n = \binom{4}{1} \cdot 9^6 - \binom{4}{2} \cdot 8^6 + \binom{4}{3} \cdot 7^6 - \binom{4}{4} \cdot 6^6$$
$$= 976\,840,$$

odakle je

$$N = 10^6 - 976\,840 = 23\,160.$$

Ur.

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 358. *Zvučni val ima u zraku valnu duljinu 85 cm. Kolika mu je brzina širenja u sredstvu u kojem zvuk iste frekvencije ima valnu duljinu 680 cm? Brzina zvuka u zraku je* 340 m/s.

Rješenje.

$$\lambda_z = 85 \text{ cm}$$
$$v_z = 340 \text{ m/s}$$
$$\underline{\lambda_s = 680 \text{ cm}}$$
$$v_s = ?$$
$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{0.85 \text{ m}} = 400 \text{ Hz}$$

Frekvencija zvuka se ne mijenja.

$$v_s = \lambda_z \cdot f = 6.8 \text{ m} \cdot 400 \text{ Hz} = 2720 \text{ m/s}.$$

Ur.

OŠ – 359. *Crveni spust je jedna od najduljih slalomskih staza u svjetskom skijaškom kupu. Duljina staze je 655 metara. Ove je godine u ženskoj konkurenciji pobijedila Amerikanka Mikaela Shiffrin, a u muškoj Austrijanac Marcel Hirscher. Vrijeme prve vožnje za Shiffrin je bilo 59.26 sekundi, a za Hirschera 58.66 s. Kolika bi bila udaljenost između njih u trenutku kad bi Hirscher ušao u cilj da su takvim brzinama skijali istovremeno?*

Rješenje.

$$s = 655 \text{ m}$$
$$t_1 = 59.26 \text{ s}$$
$$\underline{t_2 = 58.66 \text{ s}}$$
$$\Delta s = ?$$

Srednja brzina Shiffrinove je iznosila:

$$v_1 = \frac{s}{t} = \frac{655 \text{ m}}{59.26 \text{ s}} = 11.053 \text{ m/s}.$$

Kad bi Hirscher ušao u cilj ona bi prešla put:

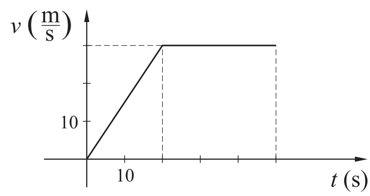
$$s = v \cdot t_2 = 11.053 \text{ m/s} \cdot 58.66 \text{ s} = 648.37 \text{ m}.$$

Razlika putova je:

$$\Delta s = 655 \text{ m} - 648.37 \text{ m} = 6.63 \text{ m}.$$

Klara Dorešić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 360. *Izračunaj put koji je prešlo tijelo čije je gibanje prikazano* v-t *grafom. Kolika je bila akceleracija tijela tijekom ubrzavanja?*



Rješenje.

$$v_{poč} = 0, \qquad v_{kon} = 30 \text{ m/s}$$
$$\underline{t_1 = 20 \text{ s}, \qquad t_2 = 30 \text{ s}}$$
$$s = ?, \quad a = ?$$
$$a = \frac{v}{t} = \frac{30 \text{ m/s}}{20 \text{ s}} = 1.5 \text{ m/s}^2$$
$$s = s_1 + s_2 = \frac{at^2}{2} + v \cdot t$$
$$s = \frac{1.5 \text{ m/s}^2 \cdot (20 \text{ s})^2}{2} + 30 \text{ m/s} \cdot 30 \text{ s}$$
$$s = 300 \text{ m} + 900 \text{ m} = 1200 \text{ m}.$$

Ur.

OŠ – 361. *Dva se vlaka gibaju na paralelnim tračnicama jedan ususret drugom. Brzina prvog vlaka je* 15 m/s, *a drugog* 72 km/h. *Putnik u prvom vlaku je izmjerio da je drugi vlak pored njega prolazio 4 sekunde. Kolika je duljina drugog vlaka?*

Rješenje.

$$v_1 = 15 \text{ m/s}$$
$$v_2 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$$
$$\underline{t = 4 \text{ s}}$$
$$l = ?$$

Brzina mimoilaženja je

$$v = v_1 + v_2 = 15 \text{ m/s} + 20 \text{ m/s} = 35 \text{ m/s},$$

a duljina drugog vlaka je

$$l = s = v \cdot t = 35 \text{ m/s} \cdot 4 \text{ s} = 140 \text{ m}.$$

Lucija Matić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1532. *Odredi brzinu zvuka pri temperaturi 300 K u mješavini od 70% zraka i 30% helija. Helij je jednoatomni plin mase 4 g/mol, a za zrak uzimamo da je dvoatomni plin srednje molekulske mase 29 g/mol.*

Rješenje. Brzina zvuka u idealnom plinu određena je izrazom

$$v_z = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

gdje je γ koeficijent adijabatske ekspanzije, ρ gustoća plina, p tlak plina, T temperatura, M molekulska masa (u kg/mol) a R opća plinska konstanta. Budući da imamo mješavinu plinova, treba izračunati srednju vrijednost za M i γ. One su:

$$\overline{M} = \frac{70}{100} \cdot 29 + \frac{30}{100} \cdot 4 = 21.5 \ \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 0.0215 \ \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$

$$\overline{\gamma} = \frac{70}{100} \cdot \frac{7}{5} + \frac{30}{100} \cdot \frac{5}{3} = 1.48.$$

Uvrštavanjem u izraz za brzinu zvuka dobivamo $v_z = 414.36$ m/s.

Ur.

1533. *Osam jednakih naboja q raspoređeni su u vrhove kocke duljine brida a. Kolika elektrostatska sila djeluje na svaki naboj?*

Rješenje. Odaberimo jedan vrh kocke, a ostale podijelimo u tri grupe: tri susjedna vrha (udaljeni a), tri vrha po dijagonali strane (udaljeni $a\sqrt{2}$) i jedan nasuprotni vrh (udaljen $a\sqrt{3}$). Odgovarajuće sile daju rezultante u smjeru prostorne dijagonale zbog simetrije, pa ih možemo projicirati na dijagonalu i zbrojiti:

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

$$F_1 = 3 \cdot \frac{kq^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$F_2 = 3 \cdot \frac{kq^2}{(a\sqrt{2})^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$F_3 = \frac{kq^2}{(a\sqrt{3})^2}.$$

Zbrajanjem dobivamo

$$F = \frac{kq^2}{a^2} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \right) \approx 3.29 \frac{kq^2}{a^2}.$$

Ur.

1534. *Radi određivanja količine krvi u tijelu, pacijentu se u nekom trenutku $t = 0$ u krvotok ubrizga 10 ml radioaktivne otopine, s vremenom poluraspada 1.25 sati. Nakon dva sata, otopina se ravnomjerno rasporedila po krvotoku, te je u uzorku 10 ml krvi određena aktivnost 1650 puta manja od početno unesene. Odredi volumen krvi pacijenta.*

Rješenje. Nakon dva sata ukupna aktivnost u krvotoku se smanjila za faktor

$$\frac{A_0}{A} = 2^{2/1.25} = 3.031433.$$

U izvađenom uzorku aktivnost je $\frac{1650}{3.031433} =$ 544.3 puta manja od navedene, pa je volumen krvi 544.3 puta veći od izvađenih 10 ml, to jest iznosi 5443 ml = 5.443 litre.

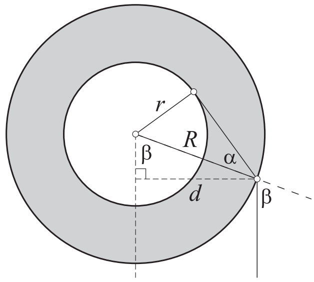
Ur.

1535. *Staklena cijev načinjena je od stakla indeksa loma 1.55. Vanjski promjer cijevi je 1 cm, a unutarnji izgleda 7.8 mm velik gledano izvana okomito na cijev. Odredi stvarni unutarnji promjer cijevi. Unutar i izvan cijevi je zrak, indeksa loma 1.*

Rješenje. Uz oznake kao na slici, zadano je $R = 10$ mm i $d = 7.8$ mm. Iz dva pravokutna trokuta na slici slijedi $\sin\alpha = r/R$, $\sin\beta = d/R$. Kako su to ujedno i ulazni kut (α) i lomljeni kut (β) u točki izlaska zrake iz stakla, vrijedi Snellov zakon, tj.

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n = \frac{d/R}{r/R},$$

pa je $r = d/n$, neovisno o vanjskom radijusu cijevi R.



Uvrštavanjem dobijemo $r = 5.032$ mm.

Ur.

1536. *Dva asteroida kruže u istoj ravnini oko Sunca. Prvi ima dvostruko manje ophodno vrijeme od drugog, a minimalna međusobna udaljenost asteroida je 0.85 astronomskih jedinica. Odredi oba ophodna vremena u godinama.*

Rješenje. Iz trećeg Keplerovog zakona slijedi

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2} = 1\ (\text{a.j.}^3/\text{god}^2).$$

Zadani uvjeti daju $r_2 = r_1 - 0.85$, $T_2 = 2T_1$. Uvrštavanjem dobijemo

$$r_1^3 = \frac{(r_1 - 0.85)^3}{4}$$

kubnim korjenovanjem dobivamo linearnu jednadžbu s rješenjem $r_1 = 1.447$ a.j. Odatle je $r_2 = 2.297$ a.j., $T_1 = \sqrt{r_1^3} = 1.741$ godina, $T_2 = \sqrt{r_2^3} = 3.482$ godine.

Ur.

1537. *Projektil mase 12 kg ispaljen je početnom brzinom 150 m/s pod kutem 60° u odnosu na horizontalu. U tjemenu putanje, projektil eksplodira i razdvoji se na dva dijela, masa 9 i 3 kg. Oba dijela padnu na horizontalno tlo istovremeno, a veći dio padne na mjesto ispucavanja projektila. Na koju će udaljenost od mjesta ispucavanja pasti manji dio projektila? Kolika je energija eksplozije?*

Rješenje. Tjeme putanje, uzevši ubrzanje sile teže $g = 9.81\ \text{m/s}^2$ postiže se u trenutku $t = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} = 150 \cdot \dfrac{\sqrt{3}/2}{9.81} = 13.242$ s. Horizontalna udaljenost od mjesta ispucavanja tada je $x_{ekspl} = v_0 t \cos\alpha = 993.1$ m, uz horizontalnu brzinu $v_x = v_0 \cos\alpha = 75$ m/s. Očuvanje impulsa i uvjet pada većeg dijela projektila određuju brzine dvaju dijelova nakon eksplozije:

$$v_1 = -v_x = -75\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = 7v_x = 525\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odatle je energija eksplozije jednaka razlici kinetičkih energija poslije i prije sudara:

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m v_x^2}{2}$$

$$= 9 \cdot \frac{75^2}{2} + 3 \cdot \frac{525^2}{2} - 12 \cdot \frac{75^2}{2} = 405\ \text{kJ},$$

a domet manjeg dijela određen horizontalnim hicem iz točke eksplozije:

$$d = x_{ekspl} + 7v_x t = 8x_{ekspl} = 7945\ \text{m}.$$

Ur.

1538. *Snop svjetlosti upada okomito na difrakcijsku rešetku. Razlika kutova prvog i drugog ogibnog maksimuma iznosi 30° za svjetlost valne duljine 700 nm. Koliki je razmak susjednih zareza rešetke (konstanta rešetke)? Koliko iznosi razlika kutova istih maksimuma za svjetlost valne duljine 500 nm?*

Rješenje. Iz jednadžbe rešetke izrazimo kut prvog i drugog ogibnog maksimuma za valnu duljinu λ i konstantu rešetke a:

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$$

$$\sin\theta_2 = \sin(\theta_1 + 30^\circ) = \frac{2\lambda}{a}.$$

Iz adicijske formule i eliminacijom omjera $\dfrac{\lambda}{a}$ dobijemo:

$$\sin\theta_1 \cos 30^\circ + \cos\theta_1 \sin 30^\circ = 2\sin\theta_1.$$

Nakon dijeljenja sa $\sin\theta_1$ dobijemo izraz iz kojega direktno izračunamo θ_1:

$$\theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin 30^\circ}{2 - \cos 30^\circ}\right) = 23.974^\circ.$$

Odatle je $a = \dfrac{\lambda}{\sin\theta_1} = 1735$ nm. Odgovarajući kutovi za 500 nm su $\theta_1' = 16.749^\circ$, $\theta_2' = 35.195^\circ$, pa je njihova razlika $\delta\theta' = 18.446^\circ$.

Ur.