# Međunarodno matematičko natjecanje “Klokan bez granica” 2013. g., 2. dio

## Zadaci za učenike 2. i 3. razreda srednje škole (Junior)

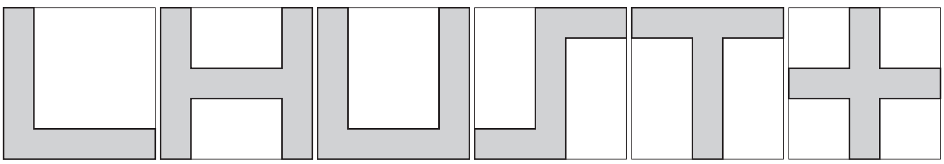
**Pitanja za 3 boda:**

**1.** Broj $200013 - 2013$ nije djeljiv sa

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 7 **E.** 11

**Rješenje: D.**

**2.** Na identičnim listovima papira u obliku kvadrata Marija je nacrtala ove figure:



Koliko nacrtanih figura ima opseg jednak opsegu lista papira?

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 6

**Rješenje: C.** Prva, četvrta, peta i šesta figura.

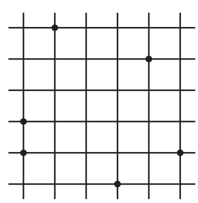
**3.** Gospođa Margareta kupila je 4 klipa kukuruza za svakog u svojoj četveročlanoj obitelji. U trgovini je dobila popust kako stoji na natpisu. Koliko je platila?

RASPRODAJA KUKURUZA
1 klip 20 lipa
svaki šesti klip je besplatan

**A.** 0.80 kn **B.** 1.20 kn **C.** 2.80 kn **D.** 3.20 kn **E.** 80 kn

**Rješenje: C.** Kupila je 16 kukuruza, što znači da je 2 dobila besplatno: $14 \cdot 0.20 = 2.80$

**4.** Na kvadratnoj mreži kojoj je veličina ćelije 1 istaknuto je šest točaka. Kolika je najmanja površina trokuta kojem su vrhovi neke od tih točaka?



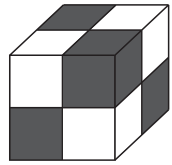
**A.** $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1 **E.** 2

**Rješenje: C.** Radi se o trokutu kojem su vrhovi tri lijeve točke. Jedna stranica tog trokuta je 1, a visina na tu stranicu također je duljine 1. Stoga je njegova površina $\frac{1 \cdot 1}{2}$.

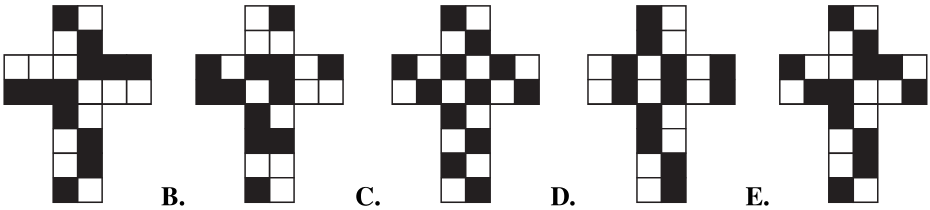
**5.** Mihael je zbrojivši $4^{15}$ i $8^{10}$ dobio broj koji je potencija broja 2. Koji je to broj?

**A.** $2^{10}$ **B.** $2^{15}$ **C.** $2^{20}$ **D.** $2^{30}$ **E.** $2^{31}$

**Rješenje: E.** $4^{15} + 8^{10} = 2^{30} + 2^{30} = 2 \cdot 2^{30} = 2^{31}$.



**6.** Na oplošju kocke nacrtani su bijeli i crni kvadrati tako da izgleda kao da se kocka sastoji od četiri bijele i četiri crne manje kocke. Koja mreža odgovara takvoj kocki?



**A.** **B.** **C.** **D.** **E.**

**Rješenje: E.**

**7.** Neka je $n$ najveći prirodni broj za koji je $4n$ troznamenkast broj. Neka je $m$ najmanji prirodan broj za koji je $4m$ troznamenkast broj. Koliko tada iznosi $4n - 4m$?

**A.** 900 **B.** 899 **C.** 896 **D.** 225 **E.** 224

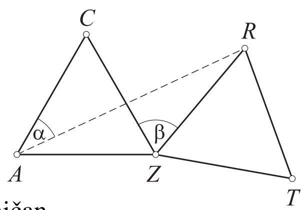
**Rješenje: C.** $4n$ je najveći troznamenkasti višekratnik broja 4, tj. $4n = 996$, a $4m$ je najmanji troznamenkasti višekratnik broja 4, tj. $4m = 100$, pa je $4n - 4m = 996 - 100 = 896$.

**8.** Koji od zadanih brojeva je najveći?

**A.** $\sqrt{20} \cdot \sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{20} \cdot 13$ **C.** $20 \cdot \sqrt{13}$ **D.** $\sqrt{201} \cdot 3$ **E.** $\sqrt{2013}$

**Rješenje: C.**

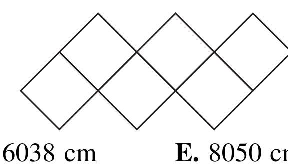
**Pitanja za 4 boda:**




**9.** Trokut $RZT$ nastao je rotacijom jednakostraničnog trokuta $AZC$ oko točke $Z$, gdje je kut $\beta = \measuredangle CZR = 70^\circ$. Kolika je mjera kuta $\alpha = \measuredangle CAR$?

**A.** $20^\circ$ **B.** $25^\circ$ **C.** $30^\circ$ **D.** $35^\circ$ **E.** $40^\circ$

**Rješenje: D.** $\measuredangle AZC = 60^\circ$ jer je trokut $AZC$ jednakostraničan.
Stranice $\overline{AZ}$ i $\overline{ZR}$ jednake su duljine, pa je trokut $AZR$ jednakokračan, a kutovi $\measuredangle RAZ$ i $\measuredangle ZRA$ su jednake mjere i to $\dfrac{180^\circ - (60^\circ + 70^\circ)}{2} = 25^\circ$. Kut $\alpha$ je tada $60^\circ - 25^\circ = 35^\circ$.

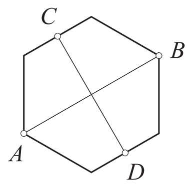


**10.** Slika desno prikazuje cik-cak uzorak sastavljen od šest kvadrata dimenzija $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$. Opseg mu je 14 cm. Koliki je opseg cik-cak uzorka koji je sastavljen od 2013 takvih kvadrata?

**A.** 2022 cm **B.** 4028 cm **C.** 4032 cm **D.** 6038 cm **E.** 8050 cm

**Rješenje: B.** Dodavanjem svakog novog kvadrata opseg lika povećava se za 2 cm. Za 2013 kvadrata stoga imamo opseg $4 + 2012 \cdot 2 = 4028$.

**11.** Dužina $\overline{AB}$ spaja dva nasuprotna vrha pravilnog šesterokuta, a dužina $\overline{CD}$ spaja polovišta njegovih dviju nasuprotnih stranica. Koliki je umnožak duljina tih dviju dužina ako je površina šesterokuta 60?




**A.** 40 **B.** 50 **C.** 60 **D.** 80 **E.** 100

**Rješenje: D.** Pravilni šesterokut sastoji se od šest jednakostraničnih trokuta. Ako je duljina stranice šesterokuta $a$, površina šesterokuta je $6 \cdot \dfrac{a \cdot v_a}{2} = 3av_a = 60$ iz čega slijedi $av_a = 20$. Dužina $\overline{AB}$ ima duljinu $2a$, a dužina $\overline{CD}$ ima duljinu $2v_a$, pa imamo $(2a) \cdot (2v_a) = 4av_a = 80$.

**12.** Jedan razred pisao je test. Da je svaki dječak imao 3 boda više na testu, prosječni rezultat razreda povećao bi se za 1.2 boda. Koliki postotak učenika u razredu su djevojčice?

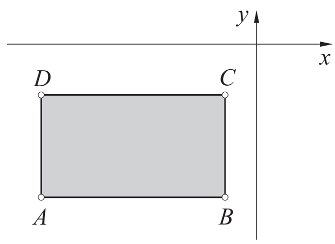
**A.** 20% **B.** 30% **C.** 40% **D.** 60% **E.** nije moguće odrediti

**Rješenje: D.** Povećanje prosječnog broja bodova je aritmetička sredina povećanja bodova: $\dfrac{3 \cdot D + 0 \cdot C}{D + C} = 1.2$, gdje je $D$ broj dječaka, a $C$ broj djevojčica u razredu. Iz ove jednadžbe slijedi $C = 1.5D$, pa je postotak djevojčica u razredu $\dfrac{C}{D+C} = \dfrac{1.5D}{2.5D} = 0.6 = 60\%$.

**13.** Stranice pravokutnika paralelne su s koordinatnim osima. Za svaki vrh pravokutnika računamo kvocijent:

$y$-koordinata : $x$-koordinata.

Koji vrh će dati najmanji rezultat?




**A.** A **B.** B **C.** C **D.** D
**E.** ovisi o dimenzijama i položaju pravokutnika

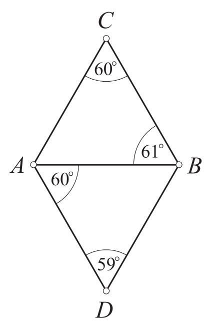
**Rješenje: D.** Da bi dobili najmanji mogući kvocijent brojnik treba biti najmanji mogući, a nazivnik najveći mogući (po apsolutnoj vrijednosti).

**14.** Danas Ivan i njegov sin slave rođendane. Ivan je pomnožio svoju dob i dob svog sina te dobio rezultat 2013. Koje godine je Ivan rođen?

**A.** 1981. **B.** 1982. **C.** 1953. **D.** 1952. **E.** potrebno je još podataka

**Rješenje: D.** $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, pa je jedino razumno rješenje da sin ima 33, a otac 61 godinu. $2013 - 61 = 1952$.

**15.** Bojan je htio nacrtati dva jednakostranična trokuta koja spojena daju romb. No, nije točno pogodio sve udaljenosti. Kada je završio, Mia je izmjerila četiri kuta i uočila da nisu jednaki. Koja je od pet danih dužina Bojanovog lika najdulja?




**A.** $\overline{AD}$ **B.** $\overline{AC}$ **C.** $\overline{AB}$ **D.** $\overline{BC}$ **E.** $\overline{BD}$

**Rješenje: A.** U trokutu $ABC$ najdulja je stranica $\overline{AC}$, a u trokutu $ADB$ najdulja je stranica $\overline{AD}$ (nasuprot su najvećeg kuta). Kako je nasuprot stranice $\overline{AB}$ u jednom trokutu kut od

$60^\circ$, a u drugom trokutu kut od $59^\circ$ zaključujemo da je stranica $\overline{AD}$ dulja od stranice $\overline{AC}$.

**16.** Dan je šesteroznamenkast broj kojem je zbroj znamenaka paran, a umnožak znamenaka neparan. Koja tvrdnja je točna za takav broj?

**A.** Ili dvije ili četiri znamenke su parne. **B.** Takav broj ne postoji.
**C.** Taj broj ima neparan broj neparnih znamenki.
**D.** Broj se može sastojati od šest različitih znamenki. **E.** Ništa od navedenog.

**Rješenje: E.** U tom broju sve znamenke moraju biti neparne.

**Pitanja za 5 bodova:**

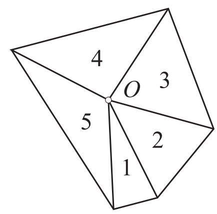
**17.** Koliko se znamenki nalazi iza decimalne točke u broju $\dfrac{1}{1024000}$?

**A.** 10 **B.** 12 **C.** 13 **D.** 14 **E.** 1024000

**Rješenje: C.** $\dfrac{1}{1024000} = \dfrac{1000}{1024} \cdot 10^{-6} = 0.9765625 \cdot 10^{-6}$. Iza decimalne točke nalazi se $7 + 6 = 13$ znamenki.

*Drugi način.* $\dfrac{1}{1024000} = \dfrac{1}{1024} : 1000 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} : 1000 = \dfrac{5^{10}}{10^{10}} : 1000$. Broj $5^{10}$ ne završava s 0, pa se kada ga podijelimo s $10^{10}$ pojavi 10 decimalnih mjesta. Dijeljenje s 1000 povećat će broj decimalnih mjesta za 3, pa ukupno imamo 13 decimalnih mjesta.

**18.** Na slici vidimo pet jednakokračnih trokuta s kutovima nasuprot osnovice $24^\circ$, $48^\circ$, $72^\circ$, $96^\circ$ i $120^\circ$ – oni su uzastopni višekratnici najmanjeg kuta među njima. Želimo napraviti sličnu sliku s najvećim mogućim brojem takvih trokuta. Koliki u tom slučaju treba biti najmanji kut u nizu, ako su svim kutovima stupanjske mjere prirodni brojevi?




**A.** $1^\circ$ **B.** $2^\circ$ **C.** $3^\circ$ **D.** $6^\circ$ **E.** $8^\circ$

**Rješenje: C.** Suma $n$ uzastopnih višekratnika broja $k$ je $\dfrac{n(n+1)}{2} \cdot k$. Želimo li sličnu sliku zbroj svih kutova pri vrhu $O$ mora biti jednak $360^\circ$. Rješavamo redom jednadžbe $\dfrac{n(n+1)}{2} \cdot k = 360$ za $k = 1, 2, 3\ldots$ dok ne dobijemo jednadžbu koja kao jedno rješenje ima prirodan broj. To će se dogoditi za $k = 3$, tada je broj trokuta koje možemo nacrtati jednak 15.

**19.** Koliko postoji trokuta čiji su vrhovi ujedno vrhovi pravilnog trinaesterokuta, a središte opisane kružnice tog poligona je unutar trokuta?

**A.** 72 **B.** 85 **C.** 91 **D.** 100 **E.** nešto drugo

**Rješenje: C.** Svih trokuta kojima su vrhovi ujedno i vrhovi pravilnog trinaesterokuta ima $\dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} = 286$. Trokuta koje ne sadrže središte opisane kružnice poligona ima $\dfrac{13 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 195$, pa onih koji sadrže središte kružnice ima $286 - 195 = 91$.

**20.** Procedura "promijeni" listu od tri broja zamjenjuje novom listom tako da svaki broj zamijeni zbrojem ostala dva broja. Na primjer, za $\{3, 4, 6\}$ "promijeni" daje

$\{10, 9, 7\}$, a novi "promijeni" vodi do $\{16, 17, 19\}$. Počnemo li s listom $\{1, 2, 3\}$ koliko će uzastopnih primjena procedure "promijeni" biti potrebno da se u listi pojavi broj 2013?

**A.** 8 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 2013 će se pojaviti nekoliko puta
**E.** 2013 se neće nikada pojaviti

**Rješenje: E.** Ispišemo li prvih nekoliko listi imamo: $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{5, 4, 3\} \rightarrow \{7, 8, 9\} \rightarrow \{17, 16, 15\} \rightarrow \{31, 32, 33\}$. Možemo primijetiti da uvijek dobivamo tri uzastopna broja, i to jedan paran, a dva neparna. Broj 2013 možemo zapisati kao $1006 + 1007$. Brojeve 1006 i 1007 možemo dobiti iz liste $\{502, 503, 504\}$ u kojoj su tri uzastopna broja, ali je jedan broj neparan, a dva parna što je nemoguće dobiti iz početne liste.

**21.** Na 22 karte napisani su prirodni brojevi od 1 do 22. Od tih karata napravljeno je 11 razlomaka. Koliko najviše tih razlomaka može imati cjelobrojnu vrijednost?

**A.** 7 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10 **E.** 11

**Rješenje: D.** To su: $\frac{22}{11}, \frac{21}{3}, \frac{20}{4}, \frac{19}{1}, \frac{18}{9}, \frac{16}{8}, \frac{15}{5}, \frac{14}{7}, \frac{12}{6}, \frac{10}{2}$.

**22.** Automobil je krenuo iz točke $A$ i vozi jednoliko pravocrtno brzinom $50$ km/h. Zatim svakih sat vremena kreće novi automobil iz točke $A$ i svaki od njih je $1$ km/h brži od prethodnog. Zadnji automobil krenuo je 50 sati nakon prvog automobila (brzinom $100$ km/h). Kojom brzinom se giba automobil koji je na početku kolone 100 sati nakon polaska prvog automobila?

**A.** 50 km/h **B.** 66 km/h **C.** 75 km/h **D.** 84 km/h **E.** 100 km/h

**Rješenje: C.** Znamo da je prijeđeni put $s = v \cdot t$. Automobil koji je $n$-ti krenuo iz točke $A$ vozi se brzinom $50 + n$ km/h i putuje $100 - n$ sati. On je prešao put od $s(n) = (50 + n)(100 - n)$ km. Mi tražimo automobil koji je prešao najviše kilometara, dakle potrebno je odrediti maksimum, tj. tjeme funkcije $s$. $n_{\max} = 25$, a brzina 25-og auta je $50 + 25 = 75$ km/h.

**23.** S jedne strane ceste u nizu rastu hrastovi i breze. Sve skupa ima 100 stabala. Broj stabala između bilo koja dva hrasta nije jednak 5. Koliko najviše hrastova može biti među ovih 100 stabala?

**A.** 48 **B.** 50 **C.** 52 **D.** 60 **E.** nemoguća situacija

**Rješenje: C.** Ako između bilo koja dva hrasta ne smije biti 5 stabala, onda nakon 6 hrastova mora biti 6 breza, da bi se hrastovi opet mogli pojaviti. Između 100 stabala imamo 16 šestorki i ostanu još četiri stabla. Počnemo li niz s hrastovima bit će ih $6 \cdot 8 + 4 = 52$.

**24.** Borko je šetao ulicom kada je ugledao traktor koji vuče dugačku cijev. Odlučivši izmjeriti njenu duljinu, Borko je hodao uz cijev suprotno od smjera gibanja traktora i izbrojao 20 koraka. Zatim je hodao uz cijev u smjeru gibanja traktora i izbrojao 140 koraka. Znajući da su se i on i traktor gibali jednolikom brzinom te da je duljina njegovog koraka 1 m, Borko je uspješno odredio duljinu cijevi. Koliko je cijev dugačka?

**A.** 30 m **B.** 35 m **C.** 40 m **D.** 48 m **E.** 80 m

**Rješenje: B.** U drugom mjerenju Borko je napravio 7 puta više koraka, što znači da je utrošio 7 puta više vremena nego u prvom mjerenju $(t_2 = 7t_1)$. Da bi dobili duljinu cijevi broju koraka u prvom mjerenju moramo dodati put kojeg je traktor prešao za to vrijeme, a u drugom mjerenju broju koraka moramo oduzeti put koji je traktor prešao za to vrijeme. $20+vt_1=140-vt_2$, $20+vt_1=140-7vt_1$, $vt_1=15$. Traktor je u prvom mjerenju prešao 15 m, pa je duljina cijevi $20+15=35$ m.

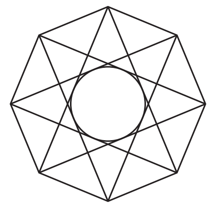
## Zadaci za učenike 4. razreda srednje škole (Students)

**Pitanja za 3 boda:**

**1.** Koji je od danih brojeva najveći?

**A.** 2013 **B.** $2^{0+13}$ **C.** $20^{13}$ **D.** $201^3$ **E.** $20\cdot 13$

**Rješenje: C.**



**2.** Pravilni osmerokut na slici ima stranicu duljine 10. Koliki je radijus kružnice upisane malom osmerokutu kojeg tvore dijagonale?

**A.** 10 **B.** 7.5 **C.** 5 **D.** 2.5 **E.** 2

**Rješenje: C.** Ta kružnica ujedno je i upisana kružnica kvadratu sa stranicom duljine 10 (kao i stranica zadanog osmerokuta), pa je njen radijus $\frac{10}{2}=5$.

**3.** Koliko bridova ima prizma koja ukupno ima 2013 strana?

**A.** 2011 **B.** 2013 **C.** 4022 **D.** 4024 **E.** 6033

**Rješenje: E.** $n$-terostrana prizma ima $n+2$ strane i $3n$ bridova. Dakle radi se o 2011-erostranoj prizmi koja ima $3\cdot 2011=6033$ brida.

**4.** Koliko iznosi treći korijen broja $3^{(3^3)}$?

**A.** $3^3$ **B.** $3^{(3^3-1)}$ **C.** $3^{(2^3)}$ **D.** $3^{(3^2)}$ **E.** $(\sqrt{3})^3$

**Rješenje: D.** $\sqrt[3]{3^{(3^3)}}=\sqrt[3]{3^{27}}=3^{\frac{27}{3}}=3^9=3^{(3^2)}$.

**5.** Godina 2013. ima svojstvo da se sastoji od uzastopnih znamenki 0, 1, 2 i 3. Koliko godina je prošlo od posljednjeg puta kada se godina sastojala od četiri uzastopne znamenke?

**A.** 467 **B.** 527 **C.** 581 **D.** 693 **E.** 990

**Rješenje: C.** Radi se o godini 1432.

**6.** Neka je $f$ linearna funkcija za koju vrijedi $f(2013)-f(2001)=100$. Koliko iznosi $f(2031)-f(2013)$?

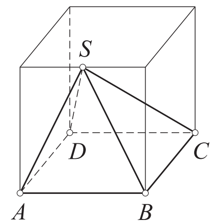
**A.** 75 **B.** 100 **C.** 120 **D.** 150 **E.** 180

**Rješenje: D.** Ako je $f(x)=ax+b$, onda je $f(2013)-f(2001)=(2013a+b)-(2001a+b)=12a$, iz čega vidimo da je $a=\frac{25}{3}$. Isto tako $f(2031)-f(2013)=(2031a-b)-(2013a+b)=18a=18\cdot\frac{25}{3}=150$.

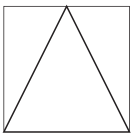
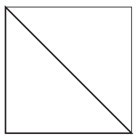
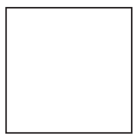
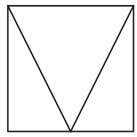
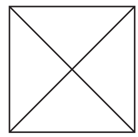
**7.** Kada se određena kruta tvar otopi njen se volumen poveća za $\frac{1}{12}$. Koliko se volumen smanji kada se ta ista tvar ponovo skruti?

**A.** $\frac{1}{10}$ **B.** $\frac{1}{11}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{13}$ **E.** $\frac{1}{14}$

**Rješenje: D.** Nakon topljenja volumen tvari je $\frac{13}{12}$ početnog volumena. Pri skrućivanju novi volumen se smanji za $\frac{1}{12}$ što je $\frac{1}{13}$ od $\frac{13}{12}$.



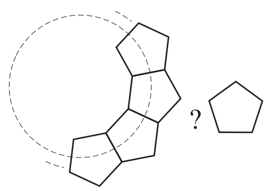

**8.** U kocki na slici vidimo krutu neprozirnu piramidu $ABCDS$ s bazom $ABCD$. Vrh piramide $S$ leži na polovištu brida kocke. Gledamo piramidu odozgo, odozdo, sprijeda, straga, s lijeve strane, s desne strane. Koji pogled nećemo uočiti?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **E.** 

**Rješenje: E.** A – sprijeda, B – straga, C – odozdo, D – odozgo.

**Pitanja za 4 boda:**

**9.** Rade ima identične plastične dijelove u obliku pravilnog peterokuta. Lijepi ih rub uz rub u krug. Koliko će se peterokuta potrošiti za takvo slaganje?




**A.** 8 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 12 **E.** 15

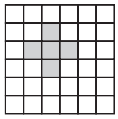
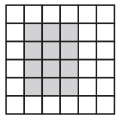
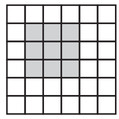
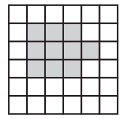
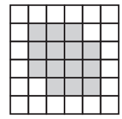
**Rješenje: C.** Spojimo li središte zamišljene kružnice s vrhovima peterokuta (ona dva vrha koja su najbliža središtu) dobit ćemo kut od $36^\circ$. (Unutarnji kut pravilnog peterokuta je $108^\circ$, pa su kutovi uz osnovicu u konstruiranom jednakokračnom trokutu $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$, a kut nasuprot osnovici je onda $180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ$.) Da bi završio krug Radi treba $\frac{360^\circ}{36^\circ} = 10$ dijelova.

**10.** Koliko ima prirodnih brojeva $n$ za koje je i $\frac{n}{3}$ i $3n$ troznamenkast prirodan broj?

**A.** 12 **B.** 33 **C.** 34 **D.** 100 **E.** 300

**Rješenje: A.** Najmanji $n$ za koji tvrdnja vrijedi je onaj za koji je $\frac{n}{3} = 100$, a najveći onaj za koji je $3n = 999$. To znači da je $300 \leqslant n \leqslant 333$, te on mora biti djeljiv s 3. Takvih brojeva ima 12.

**11.** Pod je popločan kvadratnim pločicama i na njemu se nalazi sag u obliku kruga. Sve pločice koje sa sagom imaju više od jedne zajedničke točke obojene su sivo. Što od navedenog ne može biti rezultat ovog postupka?

A.  B.  C.  D.  E. 

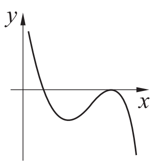
**Rješenje: E.**

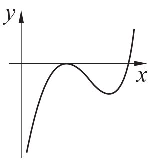
**12.** Što je negacija tvdnje "Za svaki parni broj $x$, $f(x)$ je paran broj."?

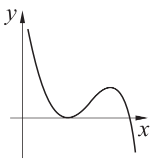
**A.** Za svaki parni broj $x$, $f(x)$ je neparan broj.
**B.** Za svaki neparni broj $x$, $f(x)$ je paran broj.
**C.** Za svaki neparni broj $x$, $f(x)$ je neparan broj.
**D.** Postoji parni broj $x$ takav da je $f(x)$ neparan broj.
**E.** Postoji neparni broj $x$ takav da je $f(x)$ neparan broj.

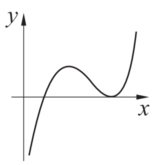
**Rješenje: D.**

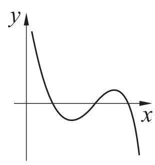
**13.** Na kojoj slici je prikazan graf funkcije $W(x) = (a-x)(b-x)^2$, gdje je $a < b$?



A.


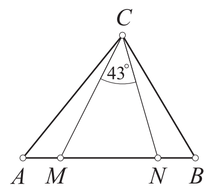
B.


C.


D.


E.

**Rješenje: A.** Iz zapisa funkcije možemo vidjeti da su nultočke ovog polinoma trećeg stupnja $x_1 = a$, $x_{2,3} = b$. Kako je $a < b$ zaključujemo da graf prvo siječe $x$-os u $x_1$, a onda je dira jer je $x_2 = x_3$. U obzir stoga dolaze samo rješenja A ili D. Nadalje možemo zaključiti da su vrijednosti funkcije za $x \geqslant a$ (desno od prve nultočke) negativne, pa je rješenje A.




**14.** U trokutu $ABC$ na slici za točke $M$ i $N$ na stranici $\overline{AB}$ vrijedi $|AN| = |AC|$ i $|BM| = |BC|$. Koja je mjera kuta $\sphericalangle ACB$ ako je $\sphericalangle MCN = 43°$?

**A.** 86° **B.** 89° **C.** 90° **D.** 92° **E.** 94°

**Rješenje: E.** Kako je $|AN| = |AC|$ iz trokuta $ANC$ slijedi $\sphericalangle CNA = \sphericalangle ACN = x$. Analogno, iz trokuta $MBC$ zbog $|BM| = |BC|$ imamo $\sphericalangle MCB = \sphericalangle BMC = y$. Iz trokuta $MNC$ vidimo da je $x+y = 180° - 43° = 137°$. Sada je $\sphericalangle ACB = x + y - 43° = 137° - 43° = 94°$.

**15.** Koliko uređenih parova prirodnih brojeva $(x, y)$ zadovoljava jednadžbu $x^2y^3 = 6^{12}$?

**A.** 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12 **E.** Ništa od navedenog.

**Rješenje: E.** Vrijedi $x^2 = \left(\dfrac{6^4}{y}\right)^3$. Budući da su brojevi 2 i 3 relativno prosti, treba samo tražiti one $y$ za koje je izraz u zagradi potpun kvadrat. Takvi $y$ su 1, $2^2$, $2^4$, $3^2$, $3^4$, $2^23^2$, $2^43^4$, $2^23^4$, $2^43^2$. Radi se o parovima $(6^6, 1)$, $(18^6, 2^2)$, $(3^6, 2^4)$, $(12^3, 3^2)$, $(2^6, 3^4)$, $(6^3, 6^2)$, $(1, 6^4)$, $(2^3, 18^2)$, $(3^3, 12^2)$.

**16.** U kutiji se nalazi 900 karata numeriranih od 100 do 999. Svi brojevi na kartama su različiti. Franko izvlači karte i računa sumu znamenaka na svakoj od njih. Koliko najmanje karata mora izvući kako bi bio siguran da će u ruci imati tri karte s istom sumom znamenaka?

**A.** 51 **B.** 52 **C.** 53 **D.** 54 **E.** 55

**Rješenje: C.** Moguće su sume znamenki između 1 i 27. Najgori mogući scenarij je da u prvih 27 karata izvučemo sve različite sume, zatim ih sve (osim sume 1 i 27 koje se pojavljuju samo jednom) dupliciramo u sljedećih 25 izvlačenja. Sljedeća izvučena karta mora biti treća po redu s istom (nekom) sumom znamenaka. Dakle, treba izvući $27 + 25 + 1 = 53$ karte.

**Pitanja za 5 bodova:**

**17.** Koliko ima uređenih parova cijelih brojeva $(x, y)$, $x \leqslant y$ takvih da je njihov produkt pet puta veći od njihove sume?

**A.** 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7 **E.** 8

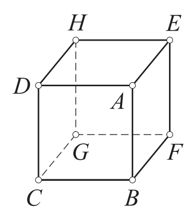
**Rješenje: A.** Želimo da vrijedi $xy = 5(x + y)$, iz čega slijedi $y = \dfrac{5x}{x-5} = \dfrac{5(x-5)+25}{x-5} = 5 + \dfrac{25}{x-5}$. Da bi $y$ bio cijeli broj treba biti $x - 5 \in \{1, -1, 5, -5, 25, -25\}$ tj. $x \in \{6, 4, 10, 0, 30, -20\}$. Tada je $y$ redom 30, $-20$, 10, 0, 6, 4. Zbog uvjeta $x \leqslant y$ otpadaju dva rješenja.

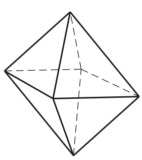
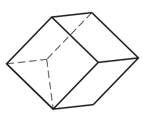
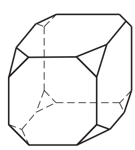
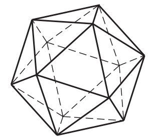
**18.** Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija sa sljedećim svojstvima: $f$ je periodična funkcija s periodom 5 i restrikcija te funkcije na interval $[-2, 3]$ je $x \to x^2$. Koliko iznosi $f(2013)$?

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4 **E.** 9

**Rješenje: D.** $f(2013) = f(403 \cdot 5 - 2) = f(-2) = (-2)^2 = 4$.

**19.** Kocka na slici presječena je ravninom koja prolazi kroz tri vrha susjedna vrhu $A$, to su vrhovi $D$, $E$ i $B$. Slično, kocku sijeku ravnine koje prolaze kroz tri susjedna vrha svakog od preostalih sedam vrhova. Kako izgleda onaj dio tako prerezane kocke koji sadrži centar kocke?




**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**E.** Centar kocke nalazi se u nekoliko dijelova.

**Rješenje: A.**

**20.** Neka je $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ funkcija definirana s $f(n) = \dfrac{n}{2}$ ako je $n$ paran, a $f(n) = \dfrac{n-1}{2}$ ako je $n$ neparan. Za prirodan broj $k$ s $f^k(n)$ označavamo izraz $f(f(\ldots f(n)\ldots))$, gdje se simbol $f$ pojavljuje $k$ puta. Koliko rješenja ima jednadžba $f^{2013}(n) = 1$?

**A.** 0 **B.** 4026 **C.** $2^{2012}$ **D.** $2^{2013}$ **E.** beskonačno

**Rješenje:** **D.** U svakom koraku imamo grananje na dva slučaja: $f(n) = k$ ako je $n = 2k$ i ako je $n = 2k + 1$. Zato ćemo u 2013 koraka imati $2^{2013}$ rješenja.

**21.** U ravnini je nacrtano nekoliko pravaca. Pravac $a$ siječe točno tri druga pravca, a pravac $b$ siječe točno četiri druga pravca. Pravac $c$ siječe točno $n$ drugih pravaca, gdje je $n \in \{3, 4\}$. Koliko je pravaca nacrtano u toj ravnini?

**A.** 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7 **E.** Ništa od navedenog.

**Rješenje:** **C.** Ova situacija je moguća samo ako imamo dva međusobno paralelna pravca (jedan od njih je pravac $b$), još tri međusobno paralelna pravca koja nisu paralelna s prva dva (jedan od njih je pravac $a$), i jedan pravac koji ih sve siječe $(c)$.

**22.** Suma prvih $n$ prirodnih brojeva troznamenkast je broj kojem su sve znamenke jednake. Kolika je suma znamenaka broja $n$?

**A.** 6 **B.** 9 **C.** 12 **D.** 15 **E.** 18

**Rješenje:** **B.** Troznamenkast broj kojem su sve znamenke jednake možemo zapisati kao $111k$, $1 \leqslant k \leqslant 9$. Suma prvih $n$ prirodnih brojeva je $\frac{n(n+1)}{2}$. Mi tražimo rješenje jednadžbe $\frac{n(n+1)}{2} = 111k$ tj. $n^2 + n - 222k = 0$, koje je prirodan broj. Zbog Vièteovih formula mora vrijediti: $n_1 + n_2 = -1$ i $n_1 \cdot n_2 = -222k = -2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot k$, pa se lako vidi da je rješenje koje tražimo $n_1 = 36$ $(n_2 = -37)$.

**23.** Na otoku Viteza i Lupeža žive samo dva tipa ljudi: Vitezovi (koji uvijek govore istinu) i Lupeži (koji uvijek lažu). Sreo sam dva čovjeka koji tamo žive i pitao višeg od njih jesu li obojica Vitezovi. On je odgovorio, ali nisam mogao zaključiti što su. Zato sam pitao nižeg je li viši čovjek Vitez. Odgovorio je, i onda sam znao kojem tipu ljudi pripadaju. Koga sam sreo?

**A.** Obojica su Vitezovi. **B.** Obojica su Lupeži. **C.** Viši je Vitez, a niži je Lupež.
**D.** Viši je Lupež, a niži je Vitez. **E.** Potrebno je još podataka.

**Rješenje:** **D.** Ukoliko se radi o dva Viteza odgovori bi bili DA, DA. Ukoliko se radi o dva Lupeža odgovori bi bili DA, DA. Ako je viši Vitez, a niži Lupež odgovori bi bili NE, NE. U slučaju da je viši Lupež, a niži Vitez dobit ćemo odgovore DA, NE. Kako nakon prvog odgovora nismo znali rješenje zaključujemo da se ne radi o trećoj opciji. Nakon drugog odgovora znamo rješenje, a to je moguće samo za četvrti slučaj.

**24.** Julije je napisao algoritam kako bi ispisao niz brojeva zadanih s $a_1 = 1$, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$, gdje su $m$ i $n$ prirodni brojevi. Koliko iznosi $a_{100}$?

**A.** 100 **B.** 1000 **C.** 2012 **D.** 4950 **E.** 5050

**Rješenje:** **E.** Primijetimo da svaki član niza možemo zapisati pomoću njegovog prethodnika $a_{m+1} = a_1 + a_m + m = a_m + m + 1$. Tako imamo $a_{100} = a_{99} + 100 = a_{98} + 99 + 100 = a_{97} + 98 + 99 + 100 = \ldots$. Možemo zaključiti $a_{100} = 1 + 2 + \ldots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$.