54. međunarodna matematička olimpijada 2013. g.

Posljednja Međunarodna matematička olimpijada održana je u gradu Santa Marti u Kolumbiji, od 18. do 28. srpnja 2013. Hrvatska ekipa odabrana je nakon tri kruga Hrvatske matematičke olimpijade i nju su sačinjavali: *Mislav Balunović* (Gimnazija Matija Mesić, Slavonski Brod, 3. r.), *Aleksandar Bulj* (Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka, 4. r.), *Vlatko Crnković* (XV. gimnazija, Zagreb, 3. r.), *Domagoj Ćevid* (V. gimnazija, Zagreb, 4. r.), *Vlatka Vazdar* (XV. gimnazija, Zagreb, 3. r.) i *Borna Vukorepa* (XV. gimnazija, Zagreb, 4. r.). Voditelji ekipe su bili *Stipe Vidak* s Prirodoslovno-matematičkog fakulteta i *Kristina Ana Škreb* s Građevinskog fakulteta u Zagrebu.

Stipe je kao vođa hrvatske ekipe otputovao par dana prije ostalih, kako bi zajedno s voditeljima ostalih država u tajnosti sudjelovao u izboru zadataka za natjecanje. Hrvatska ekipa zajedno s Kristinom krenula je na put 20. srpnja ujutro s aerodroma Pleso. Putovanje je bilo iznimno teško, jer smo prvo letjeli do Frankfurta, zatim preko Atlantika do Bogote i na kraju do Santa Marte. Prvu noć smo proveli u osrednjem hotelu, no sutradan je uslijedilo oduševljenje kada smo stigli u hotelski kompleks Irotama. Dok je Vlatka dobila neki bezvezni bungalov, muški dio ekipe imao je više sreće i dobio sobu u razini predsjedničkog apartmana.

Nakon prvog dana u tom vrhunskom hotelu, idućeg dana smo krenuli na otvaranje natjecanja koje se održalo u Barranquilli jer se tada tamo održavao karneval pa smo imali priliku vidjeti opće ludilo. Nakon što su pozornicom prošli predstavnici svih 97 zemalja (ukupno 527 natjecatelja), krenuo je karnevalski ples koji nikako nije prestajao pa su svi mahnito izjurili iz dvorane i vjerojatno nitko nije vidio kraj predstave. Jedva smo dočekali lunch-pakete i pojeli ih što smo brže mogli. Aleksandar nije mogao ni slutiti da će komad piletine, u kojem je uživao, ubrzo izazvati trovanje hranom kod njega i još dvadesetak drugih. Aleksandar se uspio oporaviti do idućeg jutra kada smo polazili na mjesto održavanja prvog dana natjecanja. Ono se održavalo dva dana zaredom. Svakog dana učenici su rješavali po tri zadatka, a svaki je ispit trajao četiri i pola sata. Nakon natjecanja došlo je vrijeme zabave i uživanja na bazenima i plaži. Isto tako, došlo je i vrijeme nervoze oko broja bodova i konačnih pragova za medalje. Od naših učenika, *Domagoj Ćevid* i *Borna Vukorepa* osvojili su zlatne medalje. Domagoju je to drugo zlato i ovo je prvi put da je Hrvatska osvojila dva zlata na ovom natjecanju (nakon što je prošle godine Domagoj osvojio prvo zlato za Hrvatsku u povijesti održavanja Međunarodne matematičke olimpijade). *Mislav Balunović* i *Vlatko Crnković* osvojili su brončane medalje, a *Aleksandar Bulj* i *Vlatka Vazdar* pohvale.

Poslije svečane dodjele medalja, organizirana je večera i oproštajni tulum. Ovu nezaboravnu pustolovinu smo zaključili još jednim danom u Rodaderu, a nakon toga smo krenuli natrag u Hrvatsku. Iduće godine ovo najveće međunarodno matematičko natjecanje za učenike srednjih škola će se održati u Južnoafričkoj Republici i nadamo se da će naši učenici i tamo ostvariti zapažen rezultat.

Borna Vukorepa

Prvi dan, Santa Marta, Kolumbija, utorak 23. srpnja 2013.

Zadatak 1. Dokaži da za svaka dva prirodna broja k i n postoji k prirodnih brojeva $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (ne nužno različitih) takvih da je

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Zadatak 2. Konfiguraciju od 4027 točaka u ravnini zovemo *kolumbijskom* ako se sastoji od 2013 crvenih i 2014 plavih točaka, pri čemu nikoje tri iz konfiguracije nisu kolinearne. Povlačenjem pravaca ravnina se dijeli na nekoliko dijelova. Kažemo da je raspored pravaca *dobar* za kolumbijsku konfiguraciju ako su zadovoljena sljedeća dva uvjeta:

- nijedan od pravaca ne prolazi nijednom točkom konfiguracije;
- nijedan od dijelova ne sadrži točke obiju boja.

Nađi najmanji broj k takav da za svaku kolumbijsku konfiguraciju od 4027 točaka postoji dobar raspored k pravaca.

Zadatak 3. Pripisana kružnica trokuta ABC nasuprot vrhu A dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki A_1. Analogno se definiraju točke B_1 na $\overline{CA}$ i C_1 na $\overline{AB}$, kao dodirne točke pripisanih kružnica nasuprot vrhovima B i C, redom. Pretpostavimo da središte kružnice opisane trokutu $A_1B_1C_1$ leži na kružnici opisanoj trokutu ABC. Dokaži da je trokut ABC pravokutan. (*Pripisana kružnica* trokuta ABC nasuprot vrhu A je kružnica koja dodiruje stranicu $\overline{BC}$, produžetak stranice $\overline{AB}$ preko točke B i produžetak stranice $\overline{AC}$ preko točke C. Slično se difiniraju pripisane kružnice nasuprot vrhovima B i C.)

Drugi dan, Santa Marta, Kolumbija, srijeda 24. srpnja 2013.

Zadatak 4. Neka je H ortocentar šiljastokutnog trokuta ABC, a W točka na stranici $\overline{BC}$, različita od B i C. Točke M i N su redom nožišta visina iz vrhova B i C. Neka je ω_1 kružnica opisana trokutu BWN, a X točka na ω_1 takva da je $\overline{WX}$ promjer kružnice ω_1. Analogno, neka je ω_2 kružnica opisana trokutu CWM, a Y točka na ω_2 takva da je $\overline{WY}$ promjer kružnice ω_2. Dokaži da su točke X, Y i H kolinearne.

Zadatak 5. Neka je $Q_{>0}$ skup pozitivnih racionalnih brojeva. Neka funkcija $h : Q_{>0} \to R$ zadovoljava sljedeća tri uvjeta:

(i) za sve $x, y \in Q_{>0}$ vrijedi $f(x)f(y) \geq f(xy)$;
(ii) za sve $x, y \in Q_{>0}$ vrijedi $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;
(iii) postoji racionalan broj $a > 1$ takav da je $f(a) = a$.

Dokaži da je $f(x) = x$ za sve $x \in Q_{>0}$.

Zadatak 6. Neka je $n \geq 3$ prirodni broj. Na kružnici je dano $n+1$ točaka koje je dijele na lukove jednake duljine. Promatrajmo sva moguća označavanja tih točaka brojevima $0, 1, \ldots, n$ u kojima se svaka oznaka koristi točno jednom; dva takva označavanja smatraju se istima ako se jedno može dobiti od drugog rotacijom dane kružnice. Označavanje zovemo *lijepim* ako se svake četiri oznake $a < b < c < d$ za koje je $a + d = b + c$, tetiva koja spaja točke označene s a i d ne siječe tetivu koja spaja točke označene s b i c. Neka je M broj lijepih označavanja, a N broj uređenih parova (x, y) prirodnih brojeva za koje je $x + y \leq n$ i $M(x, y) = 1$. Dokaži da je $M = N + 1$.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

Rang-lista

	nagrade				broj
	I	II	III	poh.	bod.
Kina	5	1			208
Južna Koreja	5	1			204
SAD	4	2			190
Rusija	4	2			187
Sjeverna Koreja	2	4			184
Singapur	1	5			182
Vijetnam	3	3			180
Tajvan	2	4			176
Velika Britanija	2	3	1		171
Iran	2	3	1		168
Kanada	2	2	2		163
Japan		6			163
Izrael	1	3	2		161
Tajland	1	4	1		161
Australija	1	2	3		148
Ukrajina	1	3	1	1	146
Meksiko		3	3		139
Turska	1	2	3		139
Indonezija	1	1	4		138
Italija	1	2	1	2	137
Francuska		2	4		136
Bjelorusija	1	2	3		134
Mađarska		2	4		134
Rumunjska		3	3		134
Nizozemska		2	3	1	133
Peru		3	2	1	132
Njemačka		2	4		127
Brazil		3	1	2	124
Indija		2	3		122
Hrvatska	2		2	2	119
Hong Kong		1	5		117
Malezija		2	3		117
Kazahstan		1	4	1	116
Slovačka		1	3	2	112
Srbija	1	1	2	2	112
Portugal	1		4	1	111
Češka	1		3	2	108
Bugarska		1	2	3	101
Grčka		2	1	3	101
Armenija		1	1	4	88
Švicarska			3	2	88
Mongolija			3	3	84
Saudijska Arabija			4		84
Belgija		1	2	2	82
Poljska		1	1	3	79
Litva			3	3	78
Turkmenistan			4	1	78
Austrija		1	1	2	77
Kolumbija			2	2	77

	nagrade				broj
	I	II	III	poh.	bod.
Novi Zeland			2	3	77
Gruzija			2	4	75
Azerbejdžan			2	3	73
Filipini (5)			3	2	72
Moldavija			2	4	71
Estonija			2	3	67
Šri Lanka			1	4	65
Tadžikistan			1	4	65
Južnoafrička Republika			2	3	64
Španjolska			2	3	63
Švedska		1	1	2	62
Bangladeš (4)			3	1	60
Kostarika			1	5	59
Bosna i Hercegovina			1	4	56
Cipar (5)			1	3	52
Tunis (5)			1	3	49
Latvija			1	3	47
Argentina			1	1	46
Finska		1			46
Ekvador			1	2	45
Paragvaj			2	1	38
Kirgistan			1	2	36
Norveška			1	1	36
Čile (3)			1	2	35
Makedonija			1	1	34
Slovenija				4	34
Irska				4	33
Danska				3	31
Island				2	27
Kosovo				3	25
Luksemburg (2)			1		25
Pakistan				3	25
Nikaragva (3)				3	22
Panama (4)				2	19
Nigerija (1)			1		18
Maroko				1	17
Trinidad i Tobago				1	16
Lihtenštajn (1)			1		15
Portoriko (4)				1	14
Salvador (2)				2	14
Sirija (4)				1	14
Kuba (1)				1	11
Venecuela (1)				1	9
Urugvaj					7
Bolivija (5)					5
Crna Gora (4)					1
Uganda (5)					1
Honduras (1)					0