7. srednjoeuropska matematička olimpijada 2013. g.

7th Middle European Mathematical Olympiad
University of Pannonia
Veszprém, Hungary
2013

Srednjoeuropska matematička olimpijada (MEMO) održana je od 22. do 28. kolovoza 2013. godine u Mađarskoj, u gradu Veszprému, nedaleko od Balatona. Hrvatska se natjecala u konkurenciji od još devet država: Austrija, Češka, Litva, Mađarska, Njemačka, Poljska, Slovačka, Slovenija, Švicarska.

Predstavnici Hrvatske su bili: *Kristian Vedran Budrovčan*, XV. gimnazija, Zagreb; *Ivan Lazarić*, Gimnazija Pula, Pula; *Mato Manović*, Gimnazija Požega, Požega; *Petar Orlić*, XV. gimnazija, Zagreb; *Daniel Paleka*, Gimanzija Frane Petrića, Zadar; *Josip Pupić*, XV. gimnazija,, Zagreb. Voditelji ekipe bili su *Tonći Kokan* i *Matija Bašić*.

Putovanje do Veszpréma je umjesto predviđenog trajanja od sedam sati postalo cjelodnevni boravak na hrvatsko-mađarskim željeznicama. Vrijeme smo skraćivali partijama biljara i stolnog nogometa u kojem smo se kasnije pokazali kao jedna od najboljih zemalja koje su sudjelovale na natjecanju.

Zadaci na pojedinačnom natjecanju pokazali su se kvalitetno odabranima i uzrokovali probleme mnogim natjecateljima. Ekipno natjecanje započelo je solidnim tempom rješavanja od jednog zadatka po satu, no nakon tri sata taj tempo je postao neizdrživ. Usprkos našoj upornosti, voditelji su nam sukladno pravilima odbijali odati službene rezultate do same službene podjele medalja. Također, treba istaknuti njihovu upornost kojom su nastojali dobiti što više bodova za naša rješenja.

Hrvatska ekipa nakon proglašenja rezultata i podjele nagrada.

Na završnoj dodjeli zauzeli smo nezavidno, ali ne i najgore, 8. mjesto te time nažalost nismo ponovili fenomenalnu prošlogodišnju ekipnu broncu. Ipak, sveukupni dojam popravili su u pojedinačnom dijelu, *Kristian Vedran Budrovčan* srebrom, *Daniel Paleka* broncom, te *Ivan Lazarić* i *Mato Manović* pohvalama.

Slobodno vrijeme, nakon natjecanja, provodili smo najviše na izletima organiziranim u obližnje gradove. Osim razgledavanja navedenih gradova (čija imena nismo mogli izgovoriti) najviše nas se dojmilo jezero Balaton. Ondje smo demonstrirali vratolomije igrajući picigin dok smo se u Veszpremu uz pomoć voditelja Tonćija, pokazali kao jedni od boljih stolno-nogometaša, odmah uz bok Slovacima i Švicarcima.

Kristian Vedran Budrovčan, Josip Pupić

Zadaci s pojedinačnog natjecanja, 24. kolovoza 2013.

I-1. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi

$$a+b+c=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Dokaži

$$2(a+b+c)\geqslant\sqrt[3]{7a^2b+1}+\sqrt[3]{7b^2c+1}+\sqrt[3]{7c^2a+1}.$$

Nađi sve trojke (a,b,c) za koje vrijedi jednakost.

I-2. Neka je n prirodni broj. Na ploču koja se sastoji od $4n\times 4n$ kvadrata postavljeno je točno $4n$ žetona tako da se u svakom retku i svakom stupcu nalazi točno jedan žeton. U jednom koraku, jedan žeton pomičemo horizontalno ili vertikalno na susjedni kvadrat. Više žetona se u nekom trenutku može nalaziti na istom kvadratu. Žetone trebamo pomaknuti tako da zauzimaju sve kvadrate jedne od dviju dijagonala.

Odredi najmanji broj $k(n)$ takav da to možemo postići u najviše $k(n)$ koraka za bilo koji početni raspored.

I-3. Neka je ABC jednakokračni trokut takav da je $|AC|=|BC|$. Neka je N točka unutra tog trokuta takva da je $2|\sphericalangle ANB|=180^\circ+|\sphericalangle ACB|$. Neka je D sjecište pravca BN i pravca paralelnog pravcu AN koji prolazi točkom C. Neka je P sjecište simetrale $\sphericalangle CAN$ i simetrale $\sphericalangle ABN$.

Dokaži da su pravci DP i AN međusobno okomiti.

I-4. Neka su a i b prirodni brojevi. Dokaži da postoje prirodni brojevi x i y takvi da vrijedi

$$\binom{x+y}{2}=ax+by.$$

Zadaci s ekipnog natjecanja, 25. kolovoza 2013.

T-1. Nađite sve funkcije $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ takve da je

$$f(xf(x)+2y)=f(x^2)+f(y)+x+y-1$$

za sve x, $y\in\mathbf{R}$.

T-2. Neka su $x, y, z, w \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ takvi da je $x+y \neq 0$, $z+w \neq 0$ i $xy+zw \geqslant 0$. Dokažite nejednakost

$$\left(\frac{x+y}{z+w}+\frac{z+w}{x+y}\right)^{-1}+\frac{1}{2} \geqslant\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)^{-1}+\left(\frac{y}{w}+\frac{w}{y}\right)^{-1}.$$

T-3. Na sjevernoj strani ulice nalazi se $n \geqslant 2$ kuća. Od zapada prema istoku, kuće su označene brojevima od 1 do n. Svaka kuća ima istaknutu ploču s kućnim brojem. Jednog dana stanovnici te ulice odlučili su našaliti se s poštarom tako da su izmiješali ploče s kućnim brojevima na sljedeći način: svakim dvjema susjednim kućama su točno jednom međusobno zamijenjene ploče koje su u tom trenutku imale.

Koliko različitih nizova ploča s brojevima se moglo postići na kraju tog dana?

T-4. Promotrite konačno mnogo točaka u ravnini takvih da nikoje tri ne leže na jednom pravcu. Svaku od njih možemo obojati crvenom ili zelenom bojom tako da svaki trokut kojem su vrhovi iste boje u svojoj unutrašnjosti sadrži barem jednu točku druge boje.

Koji je najveći mogući broj takvih točaka?

T-5. Neka je ABC šiljastokutni trokut. Konstruirajte trokut PQR takav da je $|AB| = 2|PQ|$, $|BC| = 2|QR|$, $|CA| = 2|RP|$, a pravci PQ, QR i RP prolaze točkama A, B i C, redom. (Točke A, B, C, P, Q, R su međusobno različite.)

T-6. Neka je točka K unutar šiljastokutnog trokuta ABC takva da je pravac BC zajednička tangenta kružnica opisanih trokutima AKB i AKC. Neka je točka D sjecište pravaca CK i AB te neka je točka E sjecište pravaca BK i AC. Neka je točka F sjecište pravca BC i simetrale dužine $\overline{DE}$. Opisana kružnica trokuta ABC i kružnica k polumjera $\overline{FD}$ sa središtem u točki F sijeku se u točkama P i Q.

Dokažite da je dužina $\overline{PQ}$ promjer kružnice k.

T-7. Brojevi od 1 do 2013^2 napisani su redak po redak u tablicu koja se sastoji od 2013×2013 polja. Nakon toga, istovremeno su izbrisani svi reci i svi stupci koji su sadržavali barem jedan od potpunih kvadrata $1, 4, 9, \ldots, 2013^2$.

Koliko je polja preostalo?

T-8. Izraz

$$\pm\square\pm\square\pm\square\pm\square\pm\square\pm\square$$

je napisan na ploči. Dva igrača, A i B, igraju igru, naizmjence povlačeći poteze. Igrač A povlači prvi potez. U svakom potezu, igrač koji je na potezu zamjenjuje jedan znak $\square$ nekim prirodnim brojem. Nakon što su svi znakovi $\square$ zamijenjeni, igrač A zamjenjuje svaki od predznaka $\pm$ s jednim od predznaka $+$ ili $-$. Igrač A pobjeđuje ako vrijednost izraza na ploči nije djeljiva ni s jednim od brojeva 11, 12,...,18. U protivnome pobjeđuje igrač B.

Koji igrač ima pobjedničku strategiju?

Vrijeme rješavanja svakog dana: 5 sati
Vrijeme za postavljanje pitanja: 60 minuta
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.