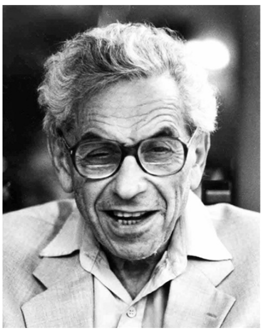
Paul Erdős – posveta matematičkom romantičaru

Braslav Rabar[1], *Siniša Slijepčević*[2]



Paul Erdős (1913.–1996.).

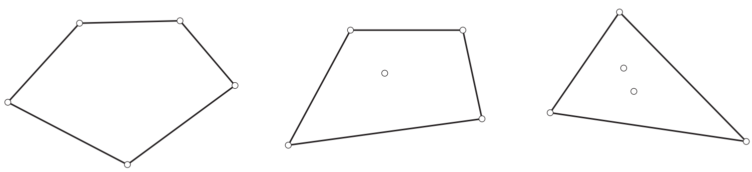
Vjerojatno najbolja moderna knjiga o Paulu Erdősu, gotovo sigurno najutjecajnijem matematičaru 20. stoljeća, počinje posvetom: "To Pali bácsi (ujku Paulu), čarobnjaku iz Budimpešte, koji je uspio uz malu pomoć prijatelja, i doživio besmrtnost sa svojim dokazima i hipotezama".

Postoji mnogo razloga za priču o Erdősu. U Budimpešti, gradu Erdősovog rođenja, u srpnju ove godine se održala velika konferencija u čast 100 godina rođenja, na kojoj su mu najpoznatiji svjetski matematičari odali počast. Erdős je objavio više od 1500 znanstvenih radova (prosječni uspješni matematičar objavi ih pedesetak u cijelom životu), svojim idejama i radom promijenio je povijest i budućnost matematike. No jedan od razloga za pisanje o Erdősu je da je naslov navedene knjige, "Čovjek koji je volio samo brojeve", izrazito pogrešan. Erdős je prije svega volio i ljude.

Jedna od priča, kako je krajem osamdesetih godina čuo za srednjoškolca Glena Whitneya koji je bio primljen na Harvard, ali nije imao za školarinu. Erdős se s njim sreo, i nakon što se uvjerio u mladićev talent, posudio mu je tisuću dolara. Desetak godina kasnije Whitney je napokon mogao vratiti Erdősu dug, ali ovaj mu je samo poručio: "Učini isto što sam i ja."

Happy Ending Problem

Jedan od prvih problema kojim se Erdős igrao je geometrijski. U Budimpešti 1932. godine, kada je Erdős bio devetnaestogodišnjak, okupljala se redovito u parku grupa mladih matematičara i postavljala jedan drugome probleme. Jednog dana Esther Klein mu je postavila sljedeće pitanje: koji je najmanji broj točaka u ravnini, tako da u bilo kojem slučaju bar četiri od njih zatvaraju konveksan skup. Podsjetimo se: skup je konveksan ako svaka dužina koja spaja dvije točke skupa jest cijela u tom skupu. Družina predvođena Erdősom je brzo našla odgovor: potrebno je i dovoljno je pet točaka.



Slika ilustrira dokaz.

[1] Znanstveni je novak na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, e-pošta: `brabar@math.hr`

[2] Izvanredni je profesor na MO PMF-a u Zagrebu, e-pošta: `slijepce@math.hr`

Dokaz je bio elementaran, jer se s četiri točke sve mogućnosti svode na tri slučaja: pet točaka zatvara konveksan skup; ili jedna točka je u unutrašnjosti četverokuta, ili su dvije točke u unutrašnjosti trokuta. U trećem slučaju pravac koji spaja te dvije točke siječe točno dvije stranice trokuta, pa zatvara konveksni četverokut s trećom.

Erdős je odmah postavio novi problem (što je kasnije čitavog života gotovo svakodnevno činio): koliko je točaka u ravnini potrebno, i minimalno dovoljno, da u svakom slučaju pet njih zatvara konveksni peterokut? Vrlo brzo su našli odgovor: potrebno je devet točaka u ravnini, dok osam nije dovoljno. Erdős je odmah postavio hipotezu: broj točaka potreban da bar n njih zatvara konveksni skup je

$$2^{n-2} + 1.$$

Formula je točna za $n = 4$ i 5. Hipoteza također kaže da je za konveksni šesterokut potrebno 17 točaka. No priča ima sretan kraj: jedan član grupe, George Szekeres, je uspio dokazati da za bilo koji n *postoji* neki minimalni broj nelinearnih točaka $f(n)$ u ravnini takav da barem n njih zatvara konveksni skup. Szekeres nije dao odgovor koliki je $f(n)$, ni da li je hipoteza Erdősa da je $f(n) = 2^{n-2} + 1$ točna, no dokaz je bio dovoljno impresivan da se već spomenuta Esther Klein uda za Szekeresa. Problem je i danas poznat kao "Happy Ending Problem" [3]. Taj problem je i danas aktivan i još uvijek otvoren. Primjerice, George Szekeres je tek kratko prije svoje smrti, 2005. godine kao 95-godišnjak, uspio uz pomoć suradnika, te kompjutora, dokazati da je $f(6) = 17$ dok je problem koliki je $f(n)$ za $n \geq 7$ i dalje otvoren. George i Esther Szerkeres su umrli unutar sat vremena, 28. kolovoza 2005.

Problem s konveksnim likovima u ravnini je primjer matematičkog problema iz Ramseyeve teorije, u kojoj je Erdős bio vrlo često u centru zbivanja i napretka. Ramseyeva teorija postavlja pitanja tipa "koji je minimalni broj elemenata skupa s određenim svojstvom", i pojavljuje se u teoriji brojeva, teoriji grafova, kombinatorici i drugdje.

Erdős i prosti brojevi

Rezultat kojim je Erdős (prvi put) ušao u povijest objavio je 1949., i bavio se, vjerojatno Erdősovom najdražom temom, prostim brojevima. Poznato je da su prosti brojevi, to jest brojevi djeljivi samo s 1 i sa samim sobom, prilično "nepredvidljivi i neobični". Ne postoji pretjerano efikasna formula za provjeru da li je neki broj prost, te se oni naizgled pojavljuju nasumce, s gustim periodima prostih brojeva u nizu cijelih brojeva, te relativno dugačkim razmacima između dva susjedna. Ta činjenica se i danas koristi primjerice u kriptografiji, gdje se mnogi algoritmi, primjerice za provjeru unosa lozinke u kompjutor, temelje na prostim brojevima.

Pitanje koje je dugo mučilo matematičare je sljedeće: koliko, u stvari, ima prostih brojeva? Još je starim Grcima bilo jasno da prostih brojeva ima beskonačno mnogo (poznat je Euklidov dokaz), ali matematičari su željeli znati koliko, bar otprilike, ima prostih brojeva manjih od n? U devetnaestom stoljeću su istovremeno matematičari Hadamard i de la Vallée-Poussin dokazali da prostih brojeva manjih od n ima približno $n/\log n$, gdje je $\log n$ prirodni logaritam. Točnije, za broj prostih brojeva manjih od n, označen s $\pi(n)$, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log n} = 1,$$

gdje gornji "limes" u izrazu znači da se razlomak $\pi(n)/(n/\log n)$ približava broju 1 proizvoljno blizu ("konvergira") kako n raste prema beskonačnosti. Matematičari su stoljećima znali da je to vjerojatno točno, ručno računajući izraze iz gornje formule (to danas svaki učenik može brzo i relativno lako provjeriti kompjutorom za prilično velike n). No nisu znali zašto. Prvi dokaz objavljen je 1896., te koristi "tešku matematičku artiljeriju". Dokaz je primjer rezultata iz analitičke teorije brojeva, što znači da koristi integrale, kompleksne brojeve i slične ideje. Matematičare je dugo mučilo da je jedini dokaz jedne relativno jednostavne tvrdnje iz teorije brojeva sve samo ne jednostavan i široko razumljiv. Erdős je 1949. to promijenio, i (istovremeno kada i norveški matematičar Atle Selberg) objavio "elementaran" dokaz tog teorema o prostim brojevima. To znači da Erdősov dokaz može razumijeti i srednjoškolac (kada bi se jako, jako potrudio), dok prijašnje dokaze ne može dok ne savlada napredne tehnike matematičke analize.

Erdős je tada postao omiljen gost mnogih matematičara širom svijeta. Njemu je to odgovaralo, te je proveo ostatak života bez stalnog zaposlenja na fakultetu, bez svog stana, živeći život matematičkog nomada. Pojavio bi se na vratima nekog od svojih kolega (ponekad i u četiri sata ujutro), pokucao te ušao s riječima "my brain is open" (moj mozak je otvoren). To je značilo da je spreman za novi matematički problem, a ako ga ne bi čuo, brzo bi ga sam smislio. Kolege matematičari su ga rado primali, jer bi njegov vešednevni boravak u gostima značio i gotovo sigurno objavljen znanstveni rad, ili barem neki savjet matematičkog genija.

Najbliža aproksimacija Erdősovog doma je, uz gostinjsku sobu Mađarske akademije znanosti, bio stan američkog matematičara Ronalda Grahama. Ovaj je čak uredio jednu sobu za redovite Erdősove posjete, te vodio njegovu korespondenciju. To je značilo i ogroman ormar s kopijama Erdősovih radova, te gotovo svakodnevno slanje kopija brojnim Erdősovim matematičkim suradnicima širom svijeta. Za Erdősa je postojala samo matematika, te je putovao okolo sa svom svojom imovinom u jednom koferu.

Otvoreni problem 1 (Nagrada \$100/\$25 000):
Uzastopni prerani prosti brojevi (Consecutive early primes).

Prerani prosti broj je prost broj p_n, takav da ako su p_{n-1} i p_{n+1} prosti brojevi koji mu prethode, odnosno slijede ga, tada je

$$p_n < \frac{p_{n-1} + p_{n+1}}{2}.$$

Treba dokazati ili opovrgnuti da postoji beskonačno mnogo parova uzastopnih prostih brojeva p_n, p_{n+1} takvih da su p_n i p_{n+1} prerani.

Veća nagrada dodjeljuje se za dokaz da ih je konačno mnogo.

Dolar za dokaz

Erdősova ekscentričnost je s godinama postajala jednako legendarna kao i njegovi matematički rezultati. Na fotografijama s matematičkih konferencija često jedino Erdős ne gleda u kameru, već koncetrirano gleda u smjeru vlastitih cipela, istovremeno, gotovo sigurno, dokazujući neki teorem. Erdős se nikad nije ženio, prema vlastitom prizanju nikad nije imao djevojku (ni dečka), te je svoj život "optimizirao" tako da ima što je moguće više vremena za matematiku. "Matematičar je stroj za pretvaranje kave u teoreme", znao bi reći. Ron Graham bi često u četiri ujutro čuo lupanje lonaca iz kuhinje, što je obično značilo da Erdős želi hitno razgovarati o nekom novom svojstvu kromatskog broja grafa, ili nečeg sličnog i hitnog, što zaista nije moglo čekati svitanje.

No matematičari su tolerirali Erdősovu ekscentričnost (po čemu, uostalom, i nije bio izuzetak među matematičarima), jer bi Erdős svojim idejama nesebično pomagao svim kolegama. Mađarski matematičar Vázsonyi se sjeća kako je jednom dokazao dio jednog novog teorema o grafovima, te je "napravio grešku" i u telefonskom razgovoru s Erdősom rekao svoj rezultat. Erdős ga je nazvao 20 minuta kasnije s ostatkom dokaza. Vázsonyi nije bio sasvim sretan, jer je sad taj rezultat trebao objaviti u koatorstvu s Erdősom. Poslije mu je činjenica da je objavio rad s Erdősom donijela i malo matematičke slave. Naime, Vázsonyi ima "Erdősov" broj 1. Što je to? Erdős je objavio toliko radova u koautorstvu s drugim matematičarima, da su oni, više kao interni "štos" koji samo oni razumiju, počeli proučavati svojstva grafa o koautorstvu s Erdősom. Zamislite da je svaki profesionalni matematičar jedna točka (zovemo je vrh), npr. u ravnini, te da spojimo linijom svaka dva matematičara koji su objavili zajednički znanstveni rad. Ta matematička struktura se zove graf. U tom opisanom grafu o koautorstvu, Erdős je vrh iz kojeg polazi daleko najviše linija. Erdősov broj svakog matematičara je duljina najkraćeg puta u tom grafu do Erdősa. Postalo je dio matematičkog prestiža imati što manji Erdősov broj, tim više što nakon njegove smrti 1996. broj matematičara s Erdősovim brojem 1 više ne raste. Autori ovog članka imaju Erdősove brojeve 4, odnosno 3, i trude se dalje ga smanjiti.

Vratimo se malo na proste brojeve. Jedan od najpoznatijih otvorenih matematičkih problema je Riemannova hipoteza. Jedan od načina da se razumije je da bi odgovor na Riemannovu hipotezu dao i odgovor koliko se brzo izraz $\pi(n)/(n/\log n)$, od maloprije, približava jedinici. Sam iskaz Riemannove hipoteze bi zahtijevao malo jaču matematiku, te ćemo samo spomenuti da je Riemannova hipoteza jedan od sedam "milenijskih" problema, za koje je 2000. godine američki Clay Mathematics Institute raspisao nagradu od milijun dolara za rješenje svakog od njih.

Riemannova hipoteza Erdősa nije pretjerano zanimala jer je znao da je taj problem iznimno težak, te da vjerojatno današnji razvoj matematike nije dovoljan za njegovo rješenje. Erdős je, naprotiv, imao gotovo savršen instinkt i znanje matematike za postavljanje problema koji su rješivi s postojećim razvojem matematike. Često je uz problem, Erdős obećao i nagradu onom koji ga riješi. Nagrada je nekad bila 1 dolar, nekad 10, a nekad i više tisuća ili, u slučajevima kada je Erdős bio gotovo siguran da je problem s današnjim znanjem matematike nerješiv, i veća. U okviru uz tekst su primjeri tri još uvijek neriješena matematička problema, te nagrada koju je Erdős obećao, a koja bi se i danas u njegovu čast dodijelila. Prvi problem koji navodimo je vezan uz Erdősove ljubimce, proste brojeve, a nagrada od 25 000 dolara za dokaz jedne mogućnosti tog problema je vjerojatno najveća koju je Erdős ikad obećao.

Erdős se često znao šaliti da njegove nagrade krše zakone o minimalnoj plaći. No zaista, vrijeme koje je potrebno uložiti u bilo koji Erdősov problem je, uz solidno matematičko predznanje, stotine ili tisuće sati, te novčana nagrada sigurno nije glavna motivacija. Matematičari koji bi dobili ček potpisan od Erdősa za neki riješen problem ne bi ga često niti unovčili, već bi ga uramljenog stavili na zid uz najvrjednije svoje životne diplome i priznanja.

Dokazi iz Knjige

Drugi Erdősov problem koji navodimo vezan je uz egipatske razlomke. Stari Egipćani imali su neobičan način zapisivanja razlomaka, odnosno racionalnih brojeva. Nisu koristili današnje oznake oblika p/q (kvocijent dva prirodna broja), već su ih iskazivali kao sumu invezra prirodnih brojeva. Primjerice, u sljedećoj tablici su primjeri modernog i egipatskog zapisa racionalnog broja:

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$
$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$$
$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{759} + \frac{1}{208\,725}.$$

Ni danas nije jasno zašto su Egipćani koristili takav način zapisa, jer je s njim teško računati i uspoređivati dva racionalna broja. André Weil, legendarni matematičar koji je nešto znao i o povijesti, rekao je o tome: “Egipćani su jednostavno odabrali pogrešno skretanje.” To je značilo da ponekad razvoj znanosti odabere pogrešan smjer kojim pođe većina, te da treba mnogo vremena (ponekad i nova civilizacija) dok se ne pronađe pravilan put. Neki vodeći znanstvenici danas vjeruju da je primjerice teorija struna kao smjer moderne teorijske fizike primjer takve stranputice, ali to je već tema za neku drugu priču.

Premda nisu pretjerano korisni u svakodnevnom računanju, egipatski razlomci su gotovo nepresušan izvor otvorenih matematičkih problema. Jedan od najpoznatijih, još otvorenih, u našem drugom okviru je na temu: koliko je minimalno brojeva potrebno za prikaz nekog racionalnog broja u sustavu egipatskih razlomaka.

Erdős nije samo očekivao dokaz neke tvrdnje, nego mu je bilo bitno kakav je taj dokaz. Matematičare često pitaju da li smatraju da stvaraju neku matematičku teoriju ili dokaz u svojoj mašti ili, u stvari, otkrivaju neku “otprije zapisanu” istinu. Iako to pitanje zvuči religiozno, mnogi matematičari koji su vrlo racionalni ateisti, uključujući i Erdősa, vjerovali su, ili još uvijek vjeruju, da se matematičke teorije otkrivaju, a ne izmišljaju. Erdős je tu imao gotovo ekstreman stav: vjerovao je da za svaku matematičku tvrdnju postoji “savršen” dokaz, koji je toliko elegantan, lijep i informativan da ga se ne može poboljšati. To bi često opisivao metaforom o Knjizi (The Book), u kojoj pišu savršeni dokazi svih matematičkih tvrdnji, i u koju samo Svevišnji ima uvid, bez obzira postojao ili ne. No iako matematičari nemaju uvid u Knjigu, oni najbolji, poput Erdősa, mogu odmah prepoznati da li je neki dokaz iz Knjige ili nije.

Matematičarima se ta metafora tako sviđala, da su dvojica vrhunskih matematičara, Aigner i Ziegler, pokušala zaista skupiti one poznate, “savršene” dokaze “iz Knjige”. Zaista je njihov rad “Dokazi iz Knjige” [1] prvi put izdan 1998., sa željom da Erdős bude koautor, što je spriječila njegova smrt dvije godine ranije. Do danas su “Dokazi iz Knjige” doživjeli četiri izdanja i sadrže već 270 stranica, te su jedno od najinspirativnijih štiva za svakog matematičara.

Otvoreni problem 2 (Nagrada \$300):
O egipatskim razlomcima (Erdős-Straussova hipoteza).

Za svaki prirodni broj $n \geq 2$, postoje prirodni brojevi x, y, z, koji su rješenja jednadžbe
$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Više ne postajem gluplji...

Treći matematički problem je o aritmetičkim nizovima. Aritmetički niz prirodnih brojeva je, primjerice, niz 2, 5, 8, 11; ili 72, 82, 92, 102, 112, ili bilo koji konačni niz koji možemo zapisati općenito
$$x,\ x+d,\ x+2d, \ldots,\ x+(n-1)d,$$
gdje su x, d, n bilo koji prirodni brojevi. Erdősa je zanimalo da li u proizvoljno odabranim podskupovima prirodnih brojeva, ako ih odaberemo “dovoljno mnogo”,

možemo uvijek pronaći aritmetički niz proizvoljne duljine. Primjerice, da li u skupu prostih brojeva možemo naći aritmetički niz proizvoljne duljine? Primjer aritmetičkog niza prostih brojeva duljine $n = 10$ je

$$199,\ 409,\ 619,\ 829,\ 1039,\ 1249,\ 1459,\ 1669,\ 1879,\ 2089,$$

gdje je $d = 210$. Kompjutorom se mogu naći puno dulji aritmetički nizovi prostih brojeva, ali je uz njegovu pomoć nemoguće dokazati da duljina može biti proizvoljno velika.

Primjer još uvijek takvog otvorenog problema je u trećem okviru, te je bio Erdősu jedan od najdražih. Danas bi dokaz te "Erdős-Turanove hipoteze" bio jedan od najvećih događaja matematike. Primjerice u zadnjih 15 godina, čak je dva puta Fieldsova medalja, veliko matematičko priznanje, dodijeljeno za djelomičan odgovor na Erdős-Turanovu hipotezu: Timothyju Gowersu iz Cambridgea 1998., te Terenceu Taou iz Princetona 2006. No odgovor na pitanje da li tvrdnja o proizvoljno dugim aritmetičkim nizovima u skupu prostih brojeva vrijedi, je pozitivan. To je danas poznato kao Tao-Greenov teorem, a dokaz je objavljen 2008. u matematičkom časopisu "Annals of Mathematics", koji objavljuje samo najveća matematička dostignuća. Niz vrhunski aktivnih matematičara danas radi na problemima usko vezanim uz taj otvoren Erdősov problem, postavljen pred više od pola stoljeća.

Na Erdősovom grobu stoji epitaf koji je sam odabrao: "Napokon ne postajem više gluplji." Sam se znao žaliti da s godinama razmišlja sve sporije, no to njegovi suradnici nikako nisu primjećivali. Do smrti je svakodnevno ispaljivao dokaze i hipoteze, te je svojim tempom i koncetracijom nadmašivao matematičare svih godina.

Reći da "Erdősevo djelo i dalje živi" bi bio bez veze završetak ove posvete. No to se može provjeriti i egzaktno: alatom koji matematičari koriste svakodnevno, "MathSciNet", za pretraživanje matematičke literature, može se vidjeti da broj citata Erdősovih radova svake godine raste. To znači da aktivni matematičari sve više koriste njegove rezultate i propituju njegove hipoteze. A oni koji su još uvijek sumnjali, mogli su uzeti ruksak, sjesti na vlak, i od 1. do 5. srpnja 2013. godine "poviriti" na neko predavanje u Mađarskoj akademiji znanosti u Budimpešti na konferenciji Erdősu u čast. Vidjeli bi i čuli što vrhunski matematičari današnjice govore o jednom od najvećih romantičara matematike.

Otvoreni problem 3 (Nagrada $3000):
O aritmetičkim nizovima (Erdős-Turanova hipoteza).

Neka je A skup prirodnih brojeva, takav da je

$$\sum_{x\in A} \frac{1}{x} = \infty.$$

Tada skup A sadrži aritmetičke nizove proizvoljne duljine. To znači da za svaki prirodni broj n, postoji $x \in A$ i prirodni broj d takav da vrijedi:

$$x \in A,\ x + d \in A, \ldots,\ x + (n-1)d \in A.$$

Literatura

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler, *Proofs from the Book*, 4. izdanje, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010.

[2] Paul Hoffman, *The man who loved only numbers*, Fourth Estate, London 1998.

[3] *The Happy Ending Problem*, Wikipedia, `http://en.wikipedia.org/wiki/Happy_Ending_problem`

[4] Richard Guy, *Unsolved Problems in Number Theory* (3rd edition), Springer-Verlag, 2004.