O vezi Lucasovih brojeva i Pascalova trokuta

Bojan Kovačić[1]

Jedan od najpoznatijih nizova u elementarnoj teoriji brojeva je niz Fibonaccijevih[2] brojeva, ili kraće, Fibonaccijev niz $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Taj je niz definiran rekurzivno s

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad \text{za svaki} \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$
$$F_0 = F_1 = 1.$$

O Fibonaccijevim brojevima čitatelj može saznati više u knjižici [1]. Usko vezani uz Fibonaccijeve brojeve su *Lucasovi*[3] *brojevi*, odnosno niz Lucasovih brojeva $(L_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (kraće: Lucasov niz). Taj je niz definiran rekurzivno s

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, \quad \text{za svaki} \quad n \geqslant 1, \tag{2}$$
$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1.$$

Koristeći relaciju (2) ispišimo prvih deset Lucasovih brojeva:

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ \ldots$$

Fibonaccijev i Lucasov niz očito imaju istu definicijsku rekurzivnu relaciju, ali se razlikuju u početnim uvjetima. Zbog toga je zatvorena formula za računanje n-tog člana Lucasova niza malo drugačija nego poznata Binetova[4] formula kojom se računa n-ti član Fibonaccijeva niza (izvod te formule može se naći npr. u [1]). Točnije, za svaki prirodan broj $n \geqslant 1$ vrijedi jednakost

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{3}$$

Dokaz navedene jednakosti najjednostavnije se provodi matematičkom indukcijom i prepuštamo ga čitatelju. Čitatelji upoznati s osnovama rješavanja homogenih linearnih rekurzija s konstatnim koeficijentima lako mogu izvesti jednakost (3) rješavajući rekurziju (2) uz zadane početne uvjete.

Radi potpunosti izlaganja, podsjetimo da je *osnovni Pascalov*[5] *trokut* "struktura" definirana s:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & \ldots & & &
\end{array}$$

---

[1] Predavač na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu, e-pošta: `bojan.kovacic@tvz.hr`

[2] Leonardo Pisano Bigollo (1170.–1250.), poznatiji kao Leonardo Fibonacci, talijanski matematičar, zaslužan za širenje indoarapskog zapisa brojeva u Europi

[3] François Édouard Anatole Lucas (1842.–1891.), francuski matematičar, poznat po izučavanju Fibonaccijevih brojeva.

[4] Jacques Philippe Marie Binet (1786.–1856.), francuski matematičar, fizičar i astronom, značajan po svojim radovima iz teorije brojeva i algebre matrica.

[5] Blaise Pascal (1623.–1662.), francuski matematičar, fizičar, filozof, pisac i izumitelj, jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena.

Članovi i-tog retka osnovnog Pascalova trokuta su binomni koeficijenti u binomnom razvoju $(x+y)^i$, i to poredani uzlazno prema potencijama člana y. Za svaki $k \in \mathbf{N}$ osnovna svojstva članova k-tog retka Pascalova trokuta su:

(S1) Prvi i posljednji član retka jednaki su 1.

(S2) i-ti član retka jednak je zbroju i-tog člana $(k-1)$-vog retka i $(i-1)$-vog člana $(k-1)$-vog retka, za svaki $k \geqslant 2$ i za svaki $i = 2, 3, \ldots, k$.

Svojstvo (S2) posljedica je jedne od osnovnih jednakosti binomnih koeficijenata:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad \text{za sve} \quad n, k \geqslant 1 \quad \text{takve da je} \quad n \geqslant k+1. \tag{4}$$

Detaljnije o Pascalovu trokutu i svojstvima binomnih koeficijenata može se naći npr. u [2].

Pokažimo najprije kako se koeficijenti u Pascalovu trokutu pojavljuju u jednakostima koje se odnose na Lucasove brojeve. Zapišemo li relaciju (2) u obliku

$$L_{n+1} = 1 \cdot L_n + 1 \cdot L_{n-1}, \tag{5}$$

vidimo da su koeficijenti uz brojeve L_n i L_{n-1} upravo koeficijenti napisani u prvomu retku Pascalova trokuta. Nadalje, zbrajanjem relacije

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad \text{za svaki} \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geqslant 2, \tag{6}$$

i relacije (2) dobijemo

$$L_{n+1} + L_n = L_n + 2 \cdot L_{n-1} + L_{n-2}. \tag{7}$$

Opet prema relaciji (2) vrijedi

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \tag{8}$$

pa relaciju (7) možemo zapisati u obliku

$$L_{n+2} = 1 \cdot L_n + 2 \cdot L_{n-1} + 1 \cdot L_{n-2}. \tag{9}$$

Vidimo da su koeficijenti uz brojeve L_n, L_{n-1} i L_{n-2} upravo koeficijenti napisani u drugom retku Pascalova trokuta. Da ovakva veza nije slučajna, uvjerit će nas

Poučak 1. Za svaki prirodan broj $k \in \mathbf{N}$ i za sve prirodne brojeve $n \in \mathbf{N}$ takve da je $n \geqslant k$ vrijedi

$$L_{n+k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot L_{n-i}. \tag{10}$$

Dokaz. Koristit ćemo jednakosti

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \tag{11}$$

i

$$\frac{3 \pm \sqrt{5}}{1 \pm \sqrt{5}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \tag{12}$$

(Jednakost (11) se dobije uvrštavanjem $y = 1$ u binomni poučak.) Prema jednakosti (3) vrijedi

$$L_{n-i} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i}. \tag{13}$$

Stoga redom imamo:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot L_{n-i}\\
&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i}\right]\\
&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i}+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i}\\
&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-i}+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-i}\\
&=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-i}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-i}\\
&\overset{(11)}{=}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)^{k}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)^{k}\\
&=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\\
&=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{k}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)^{k}\\
&\overset{(12)}{=}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\\
&=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+k}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+k}\overset{(3)}{=}L_{n+k},
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. □

Grubo (i neprecizno) možemo reći da konačna “linearna kombinacija” uzastopnih Lucasovih brojeva (s koeficijentima iz *istog* retka Pascalova trokuta!) daje ponovno Lucasov broj.

Pokažimo sada svojevrsni obrat, tj. kako Lucasove brojeve možemo dobiti iz elemenata Pascalova trokuta. Na temelju Pascalova trokuta formiramo beskonačnu realnu matricu $A=[a_{ij}]$ čiji su elementi definirani s

$$a_{ij}=\binom{i}{j-i},\quad \text{za svaki}\quad (i,j)\in\mathbf{N}^2. \tag{14}$$

Pritom dogovorno pretpostavljamo da vrijedi jednakost:

$$\binom{n}{k}=0\quad \text{za } n<k \text{ ili za } k<0. \tag{15}$$

Tako dobivamo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 15 & 20 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 21 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Očito, nenulelementi i-tog retka (u danom poretku) su upravo binomni koeficijenti u binomnom razvoju $(x+y)^i$ poredani kao u Pascalovu trokutu. Za svaki element a_{ij} matrice A definiramo *nenegativne cijele brojeve* b_{ij} s

$$b_{ij} = \frac{j}{i} \cdot a_{ij} = \frac{j}{i} \cdot \binom{i}{j-i}, \quad \text{za svaki} \quad (i,j) \in \mathbf{N}^2. \tag{17}$$

Dobivene vrijednosti "složimo" u novu beskonačnu realnu matricu B

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 9 & 7 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 14 & 16 & 9 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 20 & 30 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 27 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{18}$$

Pomoću elemenata matrice B mogu se dobiti svi Lucasovi brojevi L_n, $n \geqslant 1$. Točnije, vrijedi

Poučak 2.

$$\sum_{i=1}^{j} b_{ij} = L_j, \quad j \geqslant 1. \tag{19}$$

Napomena. Zbog jednakosti

$$b_{ij} = 0, \quad \text{za sve } i,j \in N \text{ takve da je } i > j, \tag{20}$$

koja izravno slijedi iz jednakosti (15) i (17), poučak 2 zapravo tvrdi da je zbroj svih elemenata u j-tom stupcu matrice B jednak j-tom članu Lucasova niza. Podsjetimo da Lucasov niz počinje članom $L_0 = 2$, pa taj (i samo taj!) član nije moguće dobiti kao zbroj svih elemenata u nekom stupcu matrice B.

Provjerimo tvrdnju poučka 2, npr. za $j = 6$. Dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{6} b_{i6} = b_{16} + b_{26} + b_{36} + b_{46} + b_{56} + b_{66} = 0 + 0 + 2 + 9 + 6 + 1 = 18 = L_6. \quad (21)$$

Dokaz poučka 2. Za svaki $j \in \mathbf{N}$ neka je

$$c_j = \sum_{i=1}^{j} b_{ij}. \quad (22)$$

Niz $(c_j)_{j\in\mathbf{N}}$ tvore zbrojevi prvih j elemenata u j-tom stupcu matrice B. Pokazat ćemo da taj niz zadovoljava jednakosti:

$$c_{j+2} = c_{j+1} + c_j, \quad \text{za svaki} \quad j \in \mathbf{N}, \quad (23)$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 3.$$

Iz (1) i (23) tada će izravno slijediti $c_j = L_j$, za svaki $j \in \mathbf{N}$, čime će poučak biti dokazan.

Lako se provjeri da vrijede jednakosti $c_1 = 1$ i $c_2 = 3$, pa su početni uvjeti zadovoljeni. Pokažimo sada da za svaki $(i, j) \in \mathbf{N}^2$ vrijedi jednakost

$$b_{i+1,j+2} = b_{ij} + b_{i,j+1}. \quad (24)$$

Imamo redom:

$$\begin{aligned}
b_{ij} + b_{i,j+1} &= \frac{j}{i} \cdot \binom{i}{j-i} + \frac{j+1}{i} \cdot \binom{i}{j-i+1} \\
&= \frac{j}{i} \cdot \frac{i!}{(j-i)!(2i-j)!} + \frac{j+1}{i} \cdot \frac{i!}{(j-i+1)!(2i-j-1)!} \\
&= \frac{j(i-1)!}{(j-i)!(2i-j)!} + \frac{(j+1)(i-1)!}{(j-i+1)!(2i-j-1)!} \\
&= \frac{j(j-i+1)(i-1)! + (j+1)(2i-j)(i-1)!}{(j-i+1)!(2i-j)!} \\
&= \frac{(j+2)i(i-1)!}{(j-i+1)!(2i-j)!} = \frac{(j+2)i!}{(j-i+1)!(2i-j)!} \\
&= \frac{j+2}{i+1} \cdot \frac{(i+1)!}{(j-i+1)!(2i-j)!} = \frac{j+2}{i+1} \cdot \binom{i+1}{j-i+1} = b_{i+1,j+2}.
\end{aligned}$$

Nije teško vidjeti da se iz jednakosti (24) formalnim zbrajanjem po varijabli i dobije:

$$c_{j+2} = c_j + c_{j+1}, \quad (25)$$

što smo i željeli pokazati. $\square$

Na kraju spomenimo da se Lucasovi brojevi pojavljuju u razmatranju tzv. *Pascalovih trokuta druge vrste*. Pascalov trokut druge vrste je sljedeća trokutasta shema

2									
1	2								
1	3	2							
1	4	5	2						
1	5	9	7	2					
1	6	14	16	9	2				
1	7	20	30	25	11	2			
1	8	27	50	55	36	13	2		
1	9	35	77	105	91	49	15	2	
1	10	44	112	182	196	140	64	17	2

Svi elementi smješteni na "hipotenuzi" jednaki su 2, dok su svi elementi (osim prvog) smješteni na vertikalnu "katetu" jednaki 1. Zanimljiviji su elementi smješteni na prve tri "usporednice" s "hipotenuzom". Na prvoj su "usporednici" smješteni svi neparni brojevi, na drugoj svi potpuni kvadrati prirodnih brojeva, a na trećoj tzv. *kvadratični piramidalni brojevi*.[6] Svaki od ostalih brojeva dobiven je uobičajeno, tj. svaki broj y dobiven je kao zbroj broja x smještenog neposredno iznad broja y i broja z smještenog neposredno lijevo od broja x.

U ovom se slučaju svi Lucasovi brojevi dobiju kao zbrojevi elemenata smještenim na "pravcima" "usporednim" s "visinom" povučenom na "hipotenuzu". Na prvom takvom "pravcu" nalazi se samo broj 2, na drugom broj 1, na trećem brojevi 2 i 1, na četvrtom brojevi 3 i 1, na petom brojevi 2, 4, i 1 itd. Računanjem navedenih zbrojeva dobije se niz 2, 1, 3, 4, 7,..., tj. niz Lucasovih brojeva. Dokaz ove tvrdnje nije elementaran, pa ga ovdje izostavljamo.

Literatura

[1] A. Dujella, *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo, 2011.

[2] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[3] M. Milanović, *Lucas Numbers and Pascal Triangle*, javno dostupno na `http://milan.milanovic.org/math/english/fibo/fibo3.html` (01.08.2012.)

[4] R. Knott, *Lucas Numbers*, javno dostupno na `http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/lucasNbs.html#pascal` (01.08.2012.)

[5] A. T. Benjamin, *The Lucas Triangle Recounted*, javno dostupno na `http://www.math.hmc.edu/~benjamin/papers/LucasTriangle.pdf` (01.08.2012.)

[6] Naziv se odnosi na ukupan broj međusobno jednakih sfera koje je moguće složiti tako da oblikuju pravilnu uspravnu četverostranu piramidu, ali primjenjuje se i na ukupan broj različitih kvadrata sadržanih u kvadratnoj $n \times n$ mreži.