Menelajev teorem i neke primjene

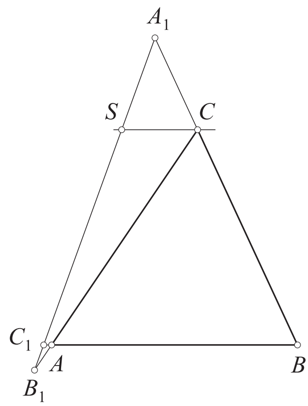
Zoran Topić[1]

U ovom članku ćemo dokazati Menelajev[2] teorem i pokazati neke njegove primjene. Menelajevo najvažnije djelo je Sphaerica u kojem dokazuje i Menelajev teorem.

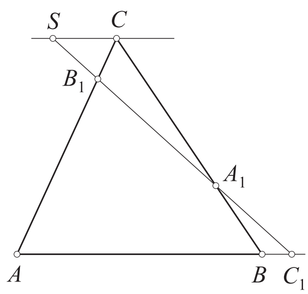
Teorem 1. (Menelajev teorem) *U trokutu ABC dane su točke A_1, B_1 i C_1 na pravcima BC, CA i AB. Točke A_1, B_1 i C_1 leže na jednom pravcu ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=1 \tag{1}$$

Dokaz. Pretpostavimo da su točke A_1, B_1 i C_1 na jednom pravcu, odnosno da su kolinearne. Dokažimo da vrijedi (1). Povucimo točkom C trokuta ABC paralelu s pravcem AB i neka ona siječe pravac A_1B_1 u točki S.



Slika 1.



Slika 2.

Primijetimo da vrijedi $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle A_1CS$ i $\triangle B_1CS \sim \triangle B_1AC_1$ (K-K-K), pa je

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|}=\frac{|BC_1|}{|CS|},\qquad \frac{|CB_1|}{|B_1A|}=\frac{|CS|}{|AC_1|}$$

pa vrijedi i (1).

Neka su sada A_1, B_1 i C_1 točke za koje vrijedi (1). Dokažimo da one leže na jednom pravcu. Možemo pretpostaviti da točka C_1 nije na stranici trokuta. Povucimo pravac C_1A_1 i neka on siječe pravac AC u točki B_2. Prema prvom dijelu teorema vrijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_2|}{|B_2A|}=1$$

[1] Profesor je matematike u Obrtničko-industrijskoj školi u Imotskom, e-pošta: topizoran@gmail.com

[2] Menelaj Aleksandrijski (70. – 140.) je starogrčki matematičar koji je djelovao u Aleksandriji.

pa je

$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=\frac{|B_2C|}{|B_2A|}=\lambda.$$

Dokažimo da je $B_1=B_2$.

1. slučaj, (slika 2). Točke A_1 i B_1 su na stranicama trokuta. Vrijedi $|AC|=|B_1A|+|B_1C|$, pa je $|B_1A|=\frac{1}{1+\lambda}|CA|$. Slično se vidi da vrijedi $|B_2A|=\frac{1}{1+\lambda}|CA|$, pa je $B_1=B_2$.

2. slučaj, (slika 1). Točke A_1 B_1 i C_1 nisu na stranicama trokuta ABC. Tada je $|AC|=|B_1C|-|B_1A|$ pa je $|B_1A|=\frac{1}{\lambda-1}|CA|$. Slično vrijedi $|B_2A|=\frac{1}{\lambda-1}|CA|$, pa je $B_1=B_2$. $\square$

Prvi teorem kojeg ćemo dokazati primjenom Menelajeva teorema je Euklidski slučaj poznatog Desargesova[3] teorema.

Teorem 2. (Desarguesov teorem) *U ravnini su dani trokuti $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ takvi da postoje točke $X=C_1A_1\cap C_2A_2$, $Y=A_1B_1\cap A_2B_2$, $Z=B_1C_1\cap B_2C_2$, $X_1=A_1A_2\cap B_1B_2$, $Y_1=B_1B_2\cap C_1C_2$ i $Z_1=A_1A_2\cap C_1C_2$. Točke X, Y i Z su kolinearne ako i samo ako je $X_1=Y_1=Z_1=O$.*

Drugim riječima (ako dani presjeci postoje) pravci A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 prolaze jednom točkom O ako i samo ako su točke X, Y i Z kolinearne.

Dokaz. Pretpostavimo da pravci C_1C_2, A_1A_2 i B_1B_2 prolaze kroz jednu točku O. Dokažimo da su točke X, Y i Z kolinearne (slika 3). Primijenimo Menelajev teorem na $\triangle OA_2B_2$ i kolinearne točke A_1, B_1 i Z. Vrijedi

$$\frac{|OA_1|}{|A_1A_2|}\cdot\frac{|A_2Z|}{|B_2Z|}\cdot\frac{|B_1B_2|}{|B_1O|}=1. \tag{2}$$

Primijenimo Menelajev teorem na $\triangle OA_2C_2$ i kolinearne točke A_1, C_1 i X. Vrijedi

$$\frac{|A_2X|}{|C_2X|}\cdot\frac{|C_2C_1|}{|C_1O|}\cdot\frac{|OA_1|}{|A_2A_1|}=1. \tag{3}$$

Primijenimo Menelajev teorem na $\triangle OB_2C_2$ i kolinearne točke B_1, C_1 i Y. Vrijedi

$$\frac{|OC_1|}{|C_1C_2|}\cdot\frac{|C_2Y|}{|B_2Y|}\cdot\frac{|B_2B_1|}{|B_1O|}=1. \tag{4}$$

Iz (2), (3) i (4) vrijedi

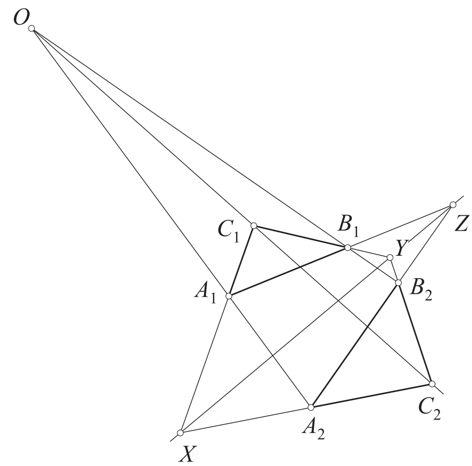
$$\frac{|A_2Z|}{|ZB_2|}\cdot\frac{|B_2Y|}{|C_2Y|}\cdot\frac{|C_2X|}{|XA_2|}=1.$$

Primjenom Menelajeva teorema na točke X, Y i Z i trokut $A_2B_2C_2$, vidimo da su točke X, Y i Z kolinearne.

Obratno, pretpostavimo da su točke X, Y i Z kolinearne. Pokažimo da pravci C_1C_2, A_1A_2 i B_1B_2 prolaze jednom točkom. Iz pretpostavki teorema je $X_1=B_1B_2\cap A_1A_2$. Pokažimo da i pravac C_1C_2 prolazi kroz X_1. Promatrajmo trokute B_2B_1Y i A_2A_1X.

[3] Girard Desarges (1591. – 1661.) je francuski matematičar i jedan od osnivača projektivne i nacrtne geometrije.

Pravci XY, A_1B_1 i A_2B_2 prolaze kroz Z, pa primjenom upravo dokazanog dijela ovog teorema, slijedi da su točke C_1, C_2 i X_1 kolinearne. Prema tome, pravci C_1C_2, A_1A_2 i B_1B_2 se sijeku u točki $X_1 = O$, što je trebalo i dokazati. □



Slika 3.

Poligoni upisani u kružnicu imaju neka zanimljiva svojstva. Jedno od najzanimljivijih svojstava je otkrio Blase Pascal[4] i to u dobi od 16 godina.

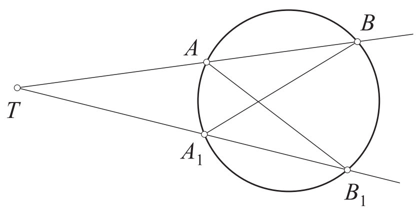
Teorem 3. (Pascalov šesterokut) *Sjecišta parova nasuprotnih stranica šesterokuta upisanog u kružnicu leže na istom pravcu.*

Prije dokaza teorema dokažimo sljedeću lemu koju ćemo koristiti u dokazu teorema.

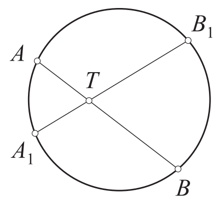
Lema 1. *Neka je K kružnica i T točka u ravnini. Povucimo točkom T bilo koje pravace p_1 i p_2 i neka oni sijeku kružnicu K redom u točkama A i B i A_1 i B_1 (slike 4 i 5). Tada vrijedi*

$$|TA| \cdot |TB| = |TA_1| \cdot |TB_2|.$$

Dokaz. Primijetimo da vrijedi $\sphericalangle TBA_1 = \sphericalangle TB_1A$, pa je $\triangle TA_1B \sim \triangle TAB_1$ (K-K-K). Prema tome vrijedi $\dfrac{|TA|}{|TB_1|} = \dfrac{|TA_1|}{|TB|}$ pa onda i tvrdnja leme. □



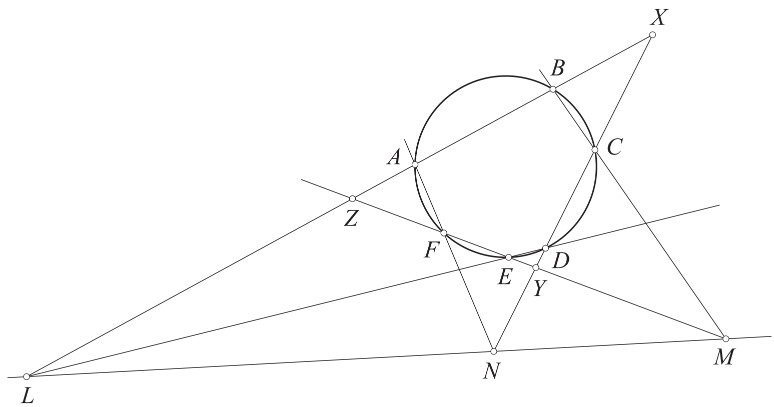
Slika 4.



Slika 5.

[4] Blase Pascal (1623. – 1662.) je francuski matematičar, fizičar i filozof.

Dokaz teorema. Neka je $L = AB \cap DE$, $M = BC \cap EF$, $N = CD \cap AF$, $X = AB \cap DC$, $Y = EF \cap DC$, $Z = AB \cap FE$. Trebamo dokazati da su točke L, M i N kolinearne (slika 6). Dokažimo najprije teorem u slučaju kad postoje točke X, Y i Z.



Slika 6.

Primijenimo li Menelajev teorem na $\triangle XYZ$ i kolinearne točke B, C i M vrijedi

$$\frac{|ZB|}{|XB|} \cdot \frac{|XC|}{|CY|} \cdot \frac{|YM|}{|MZ|} = 1. \tag{5}$$

Primijenimo li Menelajev teorem na $\triangle XYZ$ i kolinearne točke A, F i N dobivamo

$$\frac{|ZA|}{|XA|} \cdot \frac{|XN|}{|NY|} \cdot \frac{|YF|}{|FZ|} = 1. \tag{6}$$

Primijenimo li Menelajev teorem na $\triangle XYZ$ i kolinearne točke D, E i L imamo

$$\frac{|ZL|}{|XL|} \cdot \frac{|XD|}{|DY|} \cdot \frac{|YE|}{|EZ|} = 1. \tag{7}$$

Iz (5), (6) i (7) dobivamo

$$\frac{|ZL|}{|XZ|} \cdot \frac{|XN|}{|YN|} \cdot \frac{|YM|}{|ZM|} = \frac{|DY| \cdot |EZ| \cdot |XA| \cdot |FZ| \cdot |XB| \cdot |CY|}{|XD| \cdot |YE| \cdot |ZA| \cdot |YF| \cdot |ZB| \cdot |XC|}.$$

Primjenom leme 1 vrijedi

$$\frac{|ZL|}{|XL|} \cdot \frac{|XN|}{|YN|} \cdot \frac{|YM|}{|ZM|} = 1.$$

pa iz Menelajevog teorema slijedi da su točke L, N i M kolinearne. Ako jedna od točaka X, Y i Z ne postoji neka je $X_1 = BC \cap DE$, $Y_1 = DE \cap FA$ i $Z_1 = FA \cap BC$. Slično kao u prethodnom slučaju primijenimo Menelajev teorem tri puta na trokut $\triangle X_1Y_1Z_1$ i kolinearne točke ($\{L, A, B\}$, $\{N, D, C\}$ i $\{M, E, F\}$). Primjenom leme 1 dobijemo

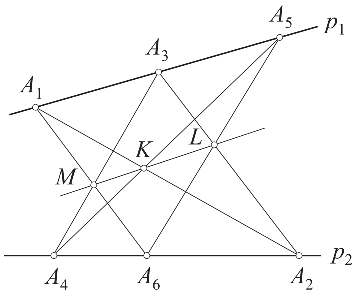
$$\frac{|Z_1N|}{|NY_1|} \cdot \frac{|Y_1L|}{|X_1L|} \cdot \frac{|X_1M|}{|Z_1M|} = 1$$

pa iz Menelajeva teorema slijedi da su točke L, N i M kolinearne. $\square$

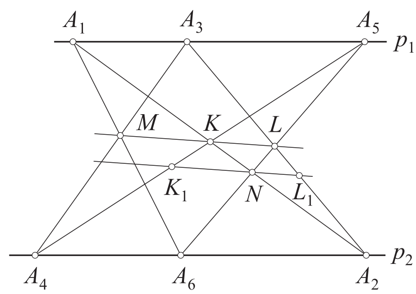
Sljedeći teorem je otkrio starogrčki matematičar Pappus[5], i mnogo kasnije postao je bitan u izgradnji projektivne geometrije.

Teorem 4. (Pappusov teorem) *Neka su* p_1 *i* p_2 *dva pravca u ravnini, te neka su točke* A_1, A_3 *i* A_5 *na* p_1, *a točke* A_4, A_6 *i* A_2 *na* p_2. *Točke* $K = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $L = A_5A_6 \cap A_3A_2$ *i* $M = A_1A_6 \cap A_4A_3$ *su kolinearne (slika 7).*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su pravci paralelni. Naime, ako se oni sijeku onda na pravcu koji je okomit (u točki presjeka) na ravninu određenu pravcima uzmemo bilo koju točku i iz nje projiciramo te pravce na ravninu koja je paralelna tom pravcu. Točka presjeka se zbog paralelnosi okomice i ravnine (na koju se projicira) ne projicira na tu ravninu pa su projicirani pravci paralelni.



Slika 7.



Slika 8.

Pri projiciranju se čuva incidencija i kolinearne točke se preslikavaju u kolinearne pa je tvrdnju dovoljno dokazati za paralelne pravce. Dokažimo tvrdnju za paralelne pravce p_1 i p_2. Neka je $N = A_1A_2 \cap A_5A_6$. Točkom N povucimo paralelu s danim pravcima i označimo s K_1 i L_1 sjecišta te paralele s pravcima A_4A_5 i A_2A_3 (slika 8).

Primijetimo da u ovim uvjetima vrijedi

$$\frac{|A_1N|}{|A_5N|} = \frac{|A_1A_2|}{|A_5A_6|},$$

$\triangle A_1MA_3 \sim \triangle A_6MA_4$, $\triangle A_2LA_6 \sim \triangle L_1LN$, $\triangle A_1KA_5 \sim \triangle NKK_1$, $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle NA_2L_1$, $\triangle A_4A_6A_5 \sim \triangle K_1NA_5$, $\triangle A_2A_6N \sim \triangle A_1A_5N$ (K-K-K) pa imamo

$$\begin{aligned}\frac{|A_1M|}{|MA_6|}\cdot\frac{|LA_6|}{|LN|}\cdot\frac{|NK|}{|A_1K|} &= \frac{|A_1A_3|}{|A_4A_6|}\cdot\frac{|A_2A_6|}{|L_1N|}\cdot\frac{|NK_1|}{|A_5A_1|} = \frac{|A_1A_3|}{|L_1N|}\cdot\frac{|NK_1|}{|A_4A_6|}\cdot\frac{|A_2A_6|}{|A_5A_1|}\\ &= \frac{|A_1A_2|}{|A_2N|}\cdot\frac{|NA_5|}{|A_5A_6|}\cdot\frac{|A_2A_6|}{|A_5A_1|} = \frac{|A_1N|}{|A_2N|}\cdot\frac{|NA_5|}{|A_5N|}\cdot\frac{|A_2N|}{|NA_1|} = 1.\end{aligned}$$

Primijenimo sada Menelajev teorem na $\triangle A_1A_6N$ i točke K, L i M pa slijedi da su te točke kolinearne. □

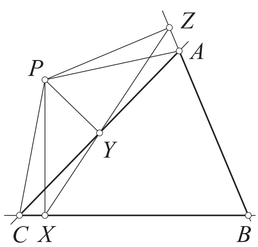
Pokažimo još neke rezultate koji se mogu dokazati pomoću Menelajeva teorema.

Primjer 1. (Simsonov teorem) Zadan je trokut ABC i točka P u ravnini. Neka su X, Y i Z nožišta okomica iz točke P na pravce BC, CA i AB. Točke X, Y i Z su kolinearne ako i samo ako je točka P na tom trokutu opisanoj kružnici.

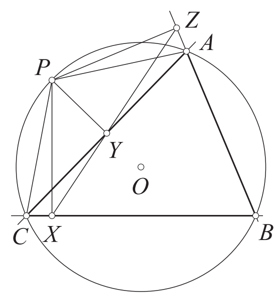
[5] Papus (290. – 350.), jedan od posljednjih velikih starogrčkih matematičara, djelovao je u Aleksandriji.

Dokaz. Dokažimo, ako je P na opisanoj kružnici trokuta ABC onda su točke X, Y i Z kolinearne (slika 10). Budući da je četverokut $PCBA$ tetivni vrijedi $\sphericalangle PAY = \sphericalangle PBX$ pa je $\triangle PXB \sim \triangle PYA$ (K-K-K), i vrijedi $\dfrac{|BX|}{|YA|} = \dfrac{|PX|}{|PY|}$. Iz istog razloga je $\sphericalangle PAZ = \sphericalangle PCX$ pa je $\triangle PZA \sim \triangle PXC$ (K-K-K), pa vrijedi $\dfrac{|AZ|}{|XC|} = \dfrac{|PZ|}{|PX|}$. Slično se vidi $\triangle PZB \sim \triangle PYC$ pa je $\dfrac{|CY|}{|ZB|} = \dfrac{|PY|}{|PZ|}$. Množeći ove tri jednakosti i primjenjujući Menelajev teorem na trokut ABC i točke X, Y i Z vidimo da točke X, Y i Z leže na jednom pravcu.

Obrnuto, neka su točke X, Y i Z kolinearne. Dokažimo da je točka P na opisanoj kružnici trokuta (slika 9). Vrijedi $\sphericalangle AYZ = \sphericalangle XYC$. Četverokuti $PYZA$ i $PCXY$ su tetivni pa je $\sphericalangle AYZ = \sphericalangle APZ$ i $\sphericalangle CYX = \sphericalangle CPX$. Dalje je i četverokut $PXZB$ tetivni, pa je kut $\sphericalangle XPZ = \pi - \beta$ i $\sphericalangle CPA = \pi - \beta$, a to povlači da je četverokut $APBC$ tetivni, pa mu se može opisati kružnica. $\square$



Slika 9.



Slika 10.

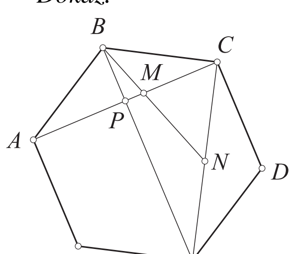
Pravac kroz točke X, Y i Z zove se Simsonov pravac trokuta ABC pridružen točki P opisane kružnice trokuta.

Sljedeći zadatak se pojavio na natjecanju učenika srednjih škola.

Primjer 2. Na dijagonalama $\overline{AC}$ i $\overline{CE}$ pravilnog šesterokuta $ABCDEF$ izabrane su unutrašnje točke M i N, takve da je $\dfrac{|AM|}{|AC|} = \dfrac{|CN|}{|CE|} = \lambda$. Ako se zna da su točke B, M i N na istom pravcu, odrediti λ.

(23. IMO 1982., Mađarska, vidi [2])

Dokaz.



Slika 11.

Neka je $P = BE \cap AC$. Primijenimo Menelajev teorem na trokut CPE i kolinearne točke B, M i N (slika 11).

Vrijedi,

$$\frac{|CM|}{|MP|} \cdot \frac{|PB|}{|BE|} \cdot \frac{|EN|}{|NC|} = 1. \tag{8}$$

Računajući faktore u (8) dobijemo

$$\frac{|CM|}{|MP|} = \frac{1-\lambda}{\lambda - \frac{1}{2}} = \frac{2-2\lambda}{2\lambda - 1} \tag{9}$$

$$\frac{|PB|}{|BE|}=\frac{1}{4} \tag{10}$$

$$\frac{|EN|}{|NC|}=\frac{1-\lambda}{\lambda}. \tag{11}$$

Uvrstimo (9), (10) i (11) u (8) dobijemo

$$\frac{2-2\lambda}{2\lambda-1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\lambda}{\lambda}=1,$$

pa je $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\square$

Primjenom Menelajeva teorema mogu se riješiti i sljedeći zadaci koje prepuštamo čitatelju.

Zadatak 1. Dokazati da tangente povučene u vrhovima trokuta na njemu opisanu kružnicu sijeku nasuprotne stranice trokuta u tri kolinearne točke.

Zadatak 2. (Ptolemejev teorem) Za četiri točke A, B, C i D u ravnini vrijedi

$$|AB|\cdot|CD|+|BC|\cdot|AD|\geq|CA|\cdot|BD|.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su A, B, C i D uzastopne točke na nekoj kružnici ili pravcu. (Koristite Simsonov teorem.)

Zadatak 3. (Cevin teorem) Neka su točke A_1, B_1 i C_1 na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC. Pravci AA_1, BB_1 i CC_1 prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=1.$$

Literatura

[1] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1.* i *2.*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[2] Ž. Hanjš, *Međunarodne matematičke olimpijade*, Element, Zagreb, 2009.