Zgužvani papiri, čaša limunade, rukovanje, vjetar na Zemlji i Brouwerov teorem o fiksnoj točki

Marko Stojanović[1], *Darko Veljan*[2]

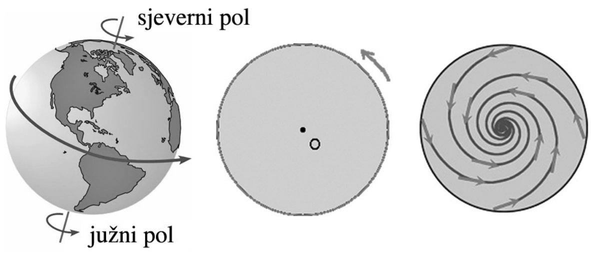
Slika 1. Zgužvani papir.

Jedan od najvažnijih i najljepših teorema u topologiji, a možda i u čitavoj matematici, jest Brouwerov[3] teorem o fiksnoj točki. Kako netko reče, ljepota tog teorema "oduzima vam dah". Pokušajmo prvo dočarati taj teorem ovako. Na stolu su (jedan iznad drugog) dva identična lista papira, recimo običnih A4. Vaš (neuredni) prijatelj uzme gornji papir, zgužva ga i baci natrag na donji list tako da je čitav zgužvani list unutar granica donjeg lista. Tada ovaj teorem (poučak) tvrdi da postoji barem jedna točka na zgužvanom listu koja leži točno iznad istog mjesta na donjem papiru gdje je bila i prije gužvanja (pretpostavljamo da "frend" nije poderao papir).

Eto, to je Brouwerov teorem o fiksnoj točki u dimenziji 2. A sada idemo u dimenziju 3. Imamo čašu u obliku kugle punu limunade. Opet dođe (neuredni) prijatelj i promiješa limunadu (recimo, protrese ispunjenu kokosovu ljusku). Tada, iako izgleda da su se sve točke u limunadi pomakle, Brouwerov teorem o fiksnoj (čvrstoj) točki tvrdi da će bar jedna točka u njoj biti točno na istome mjestu na kojemu je bila i prije nego ju je "frend" promućkao! I u svim dimenzijama vrijedi taj teorem.

Točno matematički izrečen, Brouwerov teorem o fiksnoj točki kaže da svaka neprekidna funkcija n-dimenzionalne kugle u samu sebe mora imati bar jednu točku koja je fiksna (čvrsta, nepomična, nepokretna, tj. koja je ostala na svom mjestu).

Vratimo se još malo kugli. Zamislimo da zavrtimo (zarotiramo) ili na bilo koji drugi način neprekidno "promućkamo" sve točke u kugli. Tada bar jedna ostaje na miru. Recimo, ako kuglu zarotiramo (kao što se Zemlja okreće) oko svoje osi sjever-jug (SJ), onda sve točke dužine SJ ostaju na svome mjestu, dakle fiksne su (čvrste, nepomične, odnosno nisu se uopće pomaknule).



Slika 2. Rotacija Zemlje oko svoje osi i fiksno (nepomično) središte rotirajućeg kruga.

---

[1] Student je na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, e-pošta: `marko.stojanovic@student.math.hr`

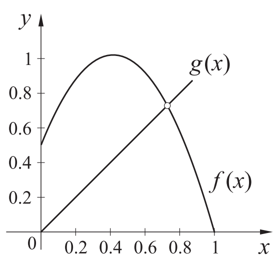
[2] Profesor je u mirovini na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, e-pošta: `darko.veljan@gmail.com`

[3] Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881.–1966.), nizozemski matematičar.

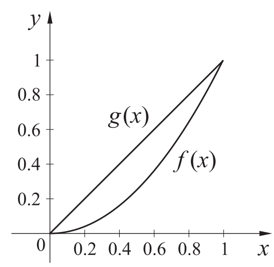
Ili, vratimo se u dimenziju 2, tj. u ravninu (list papira – samo bez granica). "Kugla" u ravnini je naprosto krug. Ako, primjerice, zavrtimo krug (obično ili spiralno, v. sliku 2), onda je središte kruga zacijelo ostalo na svome mjestu. Središte O kruga K je fiksna (ili čvrsta) točka te rotacije. Ako vrtnju ili rotaciju nazovemo slovom f (kao što je uobičajeno rabiti slovo f za bilo koju funkciju), onda se radi o preslikavanju ili funkciji, koja svakoj točki iz K pridruži (na neprekidan način) točku iz K. To zapisujemo kao $f : K \to K$. Budući je O fiksna točka od f, znači $f(O) = O$.

Brouwerov teorem kaže da je uvijek tako. Dakle, neka je K^n kugla dimenzije n, i neka je $f : K^n \to K^n$ neprekidno preslikavanje kugle u samu sebe. Tada postoji bar jedna fiksna točka od f, tj. postoji $x \in K^n$ tako da je $f(x) = x$.

Pogledajmo pobliže što nam kaže Brouwerov poučak kada je $n = 1$, odnosno kada je dimenzija jednaka 1. "Kugla" polumjera r sa središtem u ishodištu O koordinatnog sustava na pravcu (tj. u prostoru dimenzije 1) je skup svih točaka koje su od 0 udaljene najviše r. Možemo slobodno uzeti da je $r = 1$. Stoga je ta "kugla" zapravo dužina $[-1, 1]$. Dakle, u dimenziji 1, kugla je bilo koja dužina odnosno segment. Opet, možemo slobodno uzeti da se radi o jediničnoj dužini odnosno segmentu $[0, 1]$. (Podsjetimo zaboravne, $[0, 1] = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 1\}$.) Promotrimo bilo koju neprekidnu funkciju $f : [0, 1] \to [0, 1]$. Brouwer kaže (i pri tom ne laže) da postoji $x \in [0, 1]$, tako da je $f(x) = x$. U to se možemo uvjeriti i sljedećom slikom i grafom funkcije $y = f(x)$.



Slika 3. Točka presjeka funkcija $f(x) = -3x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ *i* $g(x) = x$ *je fiksna točka funkcije* f *na* $[0, 1]$.

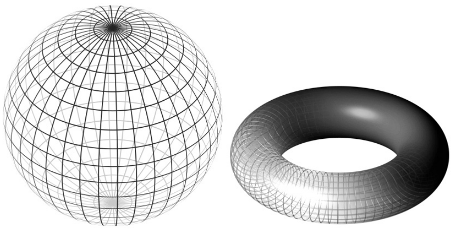


Slika 4. Funkcije $f(x) = x^2$ *i* $g(x) = x$ *nemaju točku presjeka na* $\langle 0, 1 \rangle$, *pa time ni* f *nema fiksnu točku.*

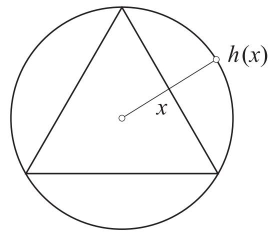
Neprekidna krivulja $y = f(x)$ koja je definirana na jediničnom segmentu $[0, 1]$ na osi x s vrijednostima u segmentu $[0, 1]$ na osi y siječe pravac $y = x$, tj. simetralu prvog kvadranta. Dakle, postoji $x_0 \in [0, 1]$ tako da je $f(x_0) = x_0$. To je očito, a znalo se i točno dokazati još u 17. stoljeću – Rolleov teorem. Za vježbu nađite fiksne točke funkcija definiranih za $0 \le x \le 1$ formulama: $f(x) = 0$, $f(x) = 1/2$, $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = 1 - x^2$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $(x \in [0, \pi])$, $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ (uporabite računalo).

U dimenziji 2 Brouwerov teorem kaže da neprekidno preslikavanje kruga K^2 u krug K^2 ima fiksnu točku. (Naglasimo, zatvorenog kruga, dakle uključujući rubnu kružnicu.) No, na početku smo imali primjer sa (zgužvanim) papirom. Za topologe je pravokutnik isto što i kvadrat (četvorina), kao što je kružnica za topologe isto što i elipsa. Uostalom, topologija se ponekad i zove geometrija neizmjerno elastične gume. Kvadrat je pak topološki ekvivalentan, odnosno, kako se to učeno kaže, homeomorfan krugu.

Kažemo da su podskupovi X i Y (recimo iz 3-dimenzionalnog prostora $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$) homeomorfni, ako postoji neprekidna bijekcija $h : X \to Y$ čije je i inverzno preslikavanje h^{-1} također neprekidno. Tako su, primjerice, svake dvije dužine homeomorfne, krug i kvadrat su homeomorfni, ili krug i trokut su također homeomorfni, kugla i elipsoid, kugla i kocka, elipsoid i tetraedar itd. Dok recimo, dužina i kružnica nisu homeomorfni, kao što nisu kvadrat i sfera (površina kugle), a niti torus i sfera (iako oba 2-dimenzionalni) itd.



Slika 5. Sfera i torus nisu homeomorfni.



Slika 6. Rastezanje dužine $\overline{Ox}$ na dužinu $\overline{Oh(x)}$ za svaku točku x, jest jedan homeomorfizam.

Uvjerimo se, primjerice, da su trokut T i krug K homeomorfni. Oko trokuta T opišemo kružnicu k. Tada radijalnim rastezanjem dužine Ox na dužinu $Oh(x)$ dobivamo neprekidnu bijekciju $h : T \to K$ (rub od K je k), a inverzno preslikavanje $h^{-1} : K \to T$ je radijalno stezanje pripadnih dužina (v. sliku 6). Očito su h i h^{-1} neprekidne funkcije, tj. neprekidno ovise o tome kako se točka giba po svojoj domeni.

Što točno znači neprekidnost? Neka je $f : X \to Y$ funkcija ili preslikavanje među skupovima u prostoru $\mathbf{R}^3$ (to nam je ovdje dovoljno), a x_0 točka iz X. Tada kažemo da je funkcija f neprekidna u točki x_0 ako se točke koje su bliske točki x_0 preslikavaju u točke koje su bliske točki $f(x_0)$, tj. ako nema naglih skokova. Točnije, ako se bilo koji niz $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ po volji blizu približava točki x_0, onda se i niz slika $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ mora po volji blizu približavati vrijednosti funkcije f u točki x_0, tj. vrijednosti $f(x_0)$. (Za one koji znaju malo više, to znači $\lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(x_0)$, kada $n \to \infty$, tj. kada n teži u beskonačnost.) Kažemo da je f neprekidna funkcija ako je neprekidna u svakoj točki x_0 iz svoje domene.

Pokažimo, ako krug K ima svojstvo fiksne točke, onda i trokut T ima to isto svojstvo. Svojstvo fiksne točke za krug K znači da svako neprekidno preslikavanje $K \to K$ ima fiksnu točku. Uzmimo sada bilo koje neprekidno preslikavanje trokuta T u sama sebe, tj. neka je $f : T \to T$ bilo koje neprekidno preslikavanje. Neka je $h : T \to K$ homeomorfizam, recimo radijalno rastezanje. Prema Brouwerovom teoremu o fiksnoj točki, neprekidno preslikavanje $h \circ f \circ h^{-1} : K \to K$ ima fiksnu točku, nazovimo je $y_0 \in K$. To znači da vrijedi $h(f(h^{-1}(y_0))) = y_0$. Ako ovo "napadnemo" s h^{-1} (h je bijekcija!), dobivamo $f(h^{-1}(y_0)) = h^{-1}(y_0)$, pa je $x_0 = h^{-1}(y_0)$ fiksna točka preslikavanja f. Dakle, Brouwerov teorem vrijedi ne samo za kuglu K^n u dimenziji n, nego i za svaki skup homeomorfan kugli K^n.

Sad smo, nadajmo se, razumjeli izreku ovog značajnog teorema. Dokazao ga je Brouwer za dimenziju 3 još 1909. godine, a francuski matematičar Jacques Hadamard (1865.–1963.) za sve dimenzije 1910., i onda opet Brouwer 1912. još malo općenitije.

Teorem ima puno različitih primjena. Na primjer, budući je osnovna izreka "postoji fiksna točka...", onda nije čudno da se poučak primjenjuje u pitanjima kao "postoji li uopće rješenje nekog sustava jednadžbi?".

Primjerice, u fizici često neki fenomen opisujemo diferencijalnim jednadžbama i pitamo se postoji li rješenje jednadžbe (ili sustava jednadžbi). Brouwerov se teorem tada pokazuje bar djelomice spasonosnim. Jer, ako želimo biti sigurni da neka jednadžba $g(x) = 0$ ima rješenje, to može biti posljedica toga da neka funkcija f ima fiksnu točku $f(x) = x$, pa $g(x) = f(x) - x = 0$ ima rješenje, tj. g ima nultočku.

Zanimljivo je da je Brouwerov teorem našao brojne primjene ne samo u matematici i fizici, nego i u ekonomiji, kao što je to učinio matematičar John Nash, dobitnik Nobelove nagrade za ekonomiju 1994. godine. On je dokazao da pod izvjesnim uvjetima u nekom modelu tržišnog gospodarstva postoji izvjesni "ekvilibrijum" – svojevrsna ravnoteža. Ima primjena Brouwerovog teorema i u teoriji igara, posebno u igri HEX itd. Dakle, evo kako od apstraktne topologije brzo dolazimo do gospodarstva i zarade!

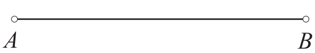
Mi nećemo ovdje dokazivati ovaj netrivijalni apstraktni teorem. Ima Brouwerov teorem i brojna netrivijalna poopćenja, inačice i kako rekosmo, brojne važne posljedice. Već je i 1912. sam Brouwer našao neke primjene. Jedna od njih je poznata pod nazivom "sfera se ne može počešljati" (a u engleskom matematičkom žargonu "hairy ball theorem"): ako iz svake točke sfere izlazi vlas kose, onda kosu ne možemo počešljati tako da sve vlasi budu ravne, tj. tako da svaka dodiruje (tangencijalno) sferu samo u točki gdje raste. Stoga će bar jedna vlas stršati.

Možemo to i ovako slikovito izreći. Znamo da vjetar neprestano na Zemlji puše tangencijalno na njenu površinu. Stoga u svakom trenutku mora postojati bar jedno mjesto na Zemlji gdje nema vjetra, tj. brzina vjetra je na tom mjestu nula. Uočite: brzina vjetra je vektor tangencijalan na Zemljinu plohu. Zato možemo reći da je u svakom trenutku bar jedan od vektora u tom "vektorskom polju" na sferi jednak nuli.

Uočite da se, za razliku od sfere, "torus može počešljati". Pokušajte zamisliti neprekidno tangencijalno "polje-vektor" na torusu (u svakoj točki ne-nul vektor!). Taj se teorem koristi i u geofizici i drugdje, a odnedavno i u elektronici, nanotehnologiji, kompjutorskoj (računalnoj) grafici i drugdje.

Zadnje dane Brouwer je živio s izvjesnim zdravstvenim poteškoćama i bojaznima od bankrota i bolesti. Prelazeći ulicu pregazio ga je auto i tako je nažalost preminuo 1966.

Danas se zna više dokaza tog teorema. Postoji i kombinatorni dokaz. Nećemo u detalje, ali u biti se dokaz svodi na vrlo jednostavnu činjenicu: lemu o rukovanju. Ta lema kaže sljedeće. U bilo kojem društvu od koliko god ljudi, među kojima se neki rukuju (možda i nitko s nikim, a možda i svatko sa svakim), uvijek, ali baš uvijek će broj onih koji su se rukovali s neparnim brojem drugih biti paran. Pokušajte sami dokazati tu lemu!



Slika 7. A se rukuje s B, a B s A. Broj onih koji su se rukovali s neparnim brojem drugih je paran.

Postoje danas i dokazi Brouwerovog teorema u dva retka. Naš prijatelj, profesor, koautor i prvi urednik (i zapravo osnivač) "Matke" prof. dr. sc. Boris Pavković (1931.–2007.) bi na to duhovito odgovorio: "Da, da, dva retka, ali dovoljno dugačka dva retka...". I doista, takav kratki dokaz (rabeći algebarsku topologiju) u sebi krije sve ono što se na fakultetima uči par godina, pa se u takvim kratkim dokazima (u "dva retka") prešutno pozivamo na poznate činjenice – "folklor". Prof. B. Pavković je šk. god. 1961/ 62. u okviru Seminara za topologiju na PMF-u Zagrebu održao nekoliko predavanja s naslovom "Brouwerov teorem o fiksnoj točki" i magistrirao kod profesora Sibe Mardešića. Prošlo je već 50-ak godina od Pavkovićevih predavanja o tom važnom teoremu. A samom Brouwerovom teoremu o fiksnoj točki sto je godina tek!