ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2013. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/255.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

A) Zadaci iz matematike

3375. Racionaliziraj razlomak
$$\frac{\sqrt[3]{2}}{1+5\sqrt[3]{2}+7\sqrt[3]{4}}.$$

3376. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu
$$\sqrt{x_1-1}+2\sqrt{x_2-4}+\ldots+n\sqrt{x_n-n^2} = \frac{1}{2}(x_1+x_2+\ldots+x_n).$$

3377. Riješi diofantsku jednadžbu
$$5x+7y=8.$$

3378. Riješi logaritamsku jednadžbu
$$4^{\log_{10}x}-32+x^{\log_{10}4}=0.$$

3379. Dokaži da za svake realne brojeve x, y, z vrijedi nejednakost
$$\frac{y^2-x^2}{2x^2+1}+\frac{z^2-y^2}{2y^2+1}+\frac{x^2-z^2}{2z^2+1}\geq 0.$$

3380. Neka je $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ aritmetički niz. Dokaži da za svaki n vrijedi jednakost
$$a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3=\frac{(a_na_{n+1})^2-(a_1a_0)^2}{4d},$$
gdje je d razlika niza.

3381. Točke E i F su polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ kvadrata $ABCD$. Pravci BE i CF sijeku se u točki P. Dokaži da je $|AP|=|AB|$.

3382. Na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ dane su redom točke X i Y tako da je $|XY|=3$, $|AX|=4$, $|AY|=5$. Odredi duljinu stranice kvadrata.

3383. Dan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom u vrhu A. S vanjske strane kateta konstruirani su kvadrati $AEDB$ i $ACFG$. Pravci CD i BF sijeku stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom u točkama P i Q. Dokaži da je $|AP|=|AQ|$.

3384. Riješi sustav jednadžbi
$$2\sin x+3\cos y=3$$
$$3\sin y+2\cos x=4.$$

3385. Na koliko se načina u skupu $\{n : 1\leq n\leq 100\}$ mogu izabrati tri broja čiji je zbroj djeljiv s 3.

3386. Duljina brida tetraedra $ABCD$ je a. Na bridu $\overline{AD}$ dana je točka M takva da je $|AM|:|MD|=3:1$. Odredi površinu presjeka tetraedra ravninom koja prolazi točkom M i okomita je na brid $\overline{AD}$.

3387. Na stranici $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$ dane su točke E i H, tim redom. Zatim su konstruirani kvadrati $AEFG$, $EHIJ$ i $HBKL$ sa središtima S, Q i R. Ako je P središte kvadrata $ABCD$, dokaži da je $PQ\perp RS$ i $|PQ|=|RS|$.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 362. Učenik je u metalnu posudu ulio 5 cm^3 70-postotnog alkohola i zapalivši ga zagrijao 2 decilitra vode u vatrostalnoj čaši zanemarive mase. Voda se ugrijala od $20\,^\circ\text{C}$ na $28\,^\circ\text{C}$. Izgaranjem jednog grama alkohola oslobodi se 30 kJ topline. Gustoća alkohola je 800 kg/m^3, a vode 1000 kg/m^3. Kolika je korisnost ovakve “grijalice”? Specifični toplinski kapacitet vode je 4200 $\text{J/kg}\,^\circ\text{C}$.

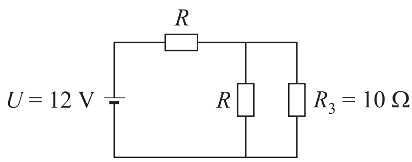
OŠ – 363. Bronca je legura bakra i kositra, ali može sadržavati i druge metale. Tvrđa je od bakra i otpornija na koroziju pa je zahvaljujući tome poznati kip Apoksiomena, otkriven 1998. godine, “preživio” boravak pod morem koji je trajao više od 2000 godina. Masa Apoksiomena je oko 300 kilograma. Pretpostavimo da bronca od koje je napravljen sadrži 90 posto bakra i 10 posto kositra. Zamislimo da su bakar i kositar od kojih se pravila bronca za izradu kipa bili u obliku kocke. Koliki bi bili bridovi tih kocki? Gustoća bakra je 8920 kg/m^3, a gustoća kositra 7280 kg/m^3.

OŠ – 364. Na jednoj strani nepomične koloture je drveni kvadar dimenzija 10 cm $\times$

25 cm $\times$ 4 cm koji kliže po stolu, a na drugoj uteg mase 200 grama koji pada stalnom brzinom. Koliki je faktor trenja između kvadra i stola? Gustoća drva je 800 $\mathrm{kg/m^3}$.

OŠ – 365. Izračunaj pad napona na svakom od tri serijski spojena otpornika kojima su otpori 10 Ω, 20 Ω i 30 Ω kad su oni spojeni na izvor napona 15 volti.

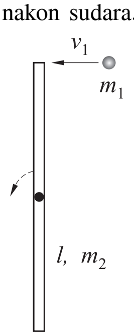
1539. Dva jednaka otpornika nepoznatog otpora R spojena su s trećim $R_3 = 10\ \Omega$ u strujni krug na slici. Odredi R ako kroz R_3 teče struja 0.2 A. Kolika maksimalna struja može teći kroz R_3 u ovisnosti od R?



1540. Element tehnecij nema niti jedan stabilan izotop. Najdulje živući, $^{97}\mathrm{Tc}$ ima vrijeme poluraspada 4.21 milijun godina. Odredi aktivnost (u raspadima u sekundi = Bq) jednog miligrama tog izotopa.

1541. U volumenu 2 litre nalazi se mješavina 2 grama kisika i 1 grama helija. Srednja brzina atoma helija veća je za 787 m/s od srednje brzine molekula kisika. Odredi temperaturu i tlak mješavine.

1542. Kuglica mase $m_1 = 0.4$ kg brzinom $v_1 = 1.2$ m/s udara u jedan kraj štapa mase $m_2 = 2$ kg duljine $l = 80$ cm koji je učvršćen u težištu tako da može slobodno rotirati. Sudar je idealno elastičan. Odredi kutnu brzinu štapa i brzinu kuglice nakon sudara.



1543. Pri mjerenju temperature i vlage, izmjereno je $T = 15\ ^\circ\mathrm{C}$ i relativna vlažnost 60%. Odredi tlak vodene pare i temperaturu rosišta. Povezanost tlaka *zasićene* vodene pare (100% relativne vlažnosti) i temperature dana je izrazom (Antoineova jednadžba)

$$p = 10^{(A-B/(C+T))},$$

gdje je p tlak u Pascalima, T je temperatura u Celzijevim stupnjevima, a konstante A, B i C iznose

$$A = 10.1932,\ B = 1730.63,\ C = 233.426.$$

1544. Mikroskop uvećava sliku 150 puta, uz objektiv jačine +150 dpt i okular žarišne daljine 4 cm. Odredi udaljenost objektiva i okulara (duljinu tubusa). Za daljinu jasnog vida oka uzimamo 25 cm.

1545. Odredi ubrzanje sile teže na Jupiterovom ekvatoru i na polovima. Koristi sljedeće podatke: masa Jupitera iznosi $1.8986 \cdot 10^{27}$ kg, radijus na ekvatoru 71 492 km, radijus prema polu 66 854 km, period rotacije 9.925 sati.

C) Rješenja iz matematike

3351. *Nađi sve parove* (x, y) *pozitivnih cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$x^3 - y^3 = 721.$$

Rješenje. Faktorizacijom dobivamo

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2),$$

$$721 = 1 \cdot 721 = 7 \cdot 103.$$

Imamo dvije mogućnosti.

1° $x - y = 1,\ x^2 + xy + y^2 = 721$:

$$y = x - 1$$

$$x^2 + x(x-1) + (x-1)^2 = 721$$

$$x^2 - x - 240 = 0, \quad x > 0$$

$$x = 16, \qquad y = 15.$$

2° $x - y = 7,\ x^2 + xy + y^2 = 103$:

$$y = x - 7$$

$$x^2 + x(x-7) + (x-7)^2 = 103$$

$$x^2 - 7x - 18 = 0, \quad x > 0$$

$$x = 9, \qquad y = 2.$$

Traženi uređeni parovi su $(16, 15)$, $(9, 2)$.

Petar Orlić (1),
XV. gimnazija, Zagreb

3352. *Dokaži da za svake pozitivne realne brojeve a, b, c, d vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{b+c+d} \geq \frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

Rješenje. Koristit ćemo nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine:

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}+\frac{1}{c_1}+\frac{1}{d_1}\right)(a_1+b_1+c_1+d_1) \geqslant 16,$$

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1 > 0.$$

Za $a_1 = a+b+c$, $b_1 = a+b+d$, $c_1 = a+c+d$, $d_1 = b+c+d$. Dakle

$$\left(\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{b+c+d}\right) \cdot(3(a+b+c+d)) \geqslant 16,$$

odakle se dobiva dana nejednakost.

Matea Prenc (4), Gimnazija Pula, Pula

3353. *Ako je $n > 4$ složen prirodan broj dokaži da ne postoji permutacija $a_1, a_2, \ldots, a_n$ brojeva $1, 2, \ldots, n$ takva da brojevi*

$$a_1,\ a_1a_2,\ \ldots,\ a_1a_2\ldots a_n$$

daju sve moguće ostatke pri dijeljenju s n. Da li to vrijedi za $n = 4$?

Rješenje. Pretpostavimo da za neki $n > 4$ postoji tražena permutacija. Tada je samo jedan od brojeva a_1, $a_1a_2, \ldots, a_1a_2\ldots a_n$ djeljiv s n. Jasno je da je posljednji broj $|n!|$ takav. Zato je $a_n = n$ i $a_1a_2\ldots a_{n-1} = (n-1)!$. Za složeni broj $n > 4$ broj $(n-1)!$ je djeljiv s n, što je u suprotnosti s pretpostavkom. Zato za $n > 4$ takva permutacija ne postoji. Za $n = 4$ takvi brojevi postoje: 1, $1\cdot 3$, $1\cdot 3\cdot 2$, $1\cdot 3\cdot 2\cdot 4$ daju redom pri diobi s 4 ostatke 1, 3, 2, 0.

Petar Orlić (1), Zagreb

3354. *Odredi sve cijele brojeve x za koje je $\log_2(x^2-4x-1)$ također cijeli broj.*

Rješenje. Izraz $\log_2(x^2-4x-1)$ je definiran za $x \in [\langle -\infty, 2-\sqrt{5}\rangle \cup \langle 2+\sqrt{5}, +\infty\rangle] \cap \mathbf{Z}$.

Neka je n cijeli broj za koji postoji $x \in \mathbf{Z}$ takav da je

$$\log_2(x^2-4x-1) = n.$$

Tada je

$$x^2-4x-(1+2^n) = 0, \qquad (1)$$

odakle dobivamo

$$x_1 = 2+\sqrt{5+2^n}, \qquad x_2 = 2-\sqrt{5+2^n}.$$

Kako je $x \in \mathbf{Z}$, postoji $k \in \mathbf{Z}$ takav da je $5+2^n = k^2$. Dakle, dovoljno je odrediti one n za koje je $5+2^n$ potpun kvadrat. Promatrajmo nekoliko slučajeva.

a) Ako je $n < 0$, tada je $2^n = k^2-5$, tj. $1 = 2^{-n}(k^2-5)$. Broj $2^{-n}(k^2-5)$ je paran pa ne može vrijediti jednakost.

b) Za $n = 0$, $k^2 = 6$, tj. $5+2^n$ nije potpun kvadrat.

c) Za $n > 0$ je $5+2^n$ neparan pa je $k = 2m-1$ za neko $k \in \mathbf{Z}$. Nakon sređivanja dobivamo

$$m(m-1) = 2^{n-2}+1. \qquad (2)$$

Za $n = 1$, $2^{n-2}+1$ nije cijeli broj.
Za $n > 2$, $2^{n-2}+1$ je neparan broj, a $m(m-1)$ je paran pa nema rješenja.
Za $n = 2$ je $5+2^n = 9 = 3^2$.

U (1) je $x^2-4x-5 = 0$ čija rješenja su $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Sada se lako vidi da je $\log_2(x^2-4x-1)$ cijeli broj i u oba slučaja je jednak 2.

Petar Orlić (1), Zagreb

3355. *Trokut ABC je pravokutan s pravim kutom u vrhu C. S njegove vanjske strane konstruirani su jednakostranični trokuti ADB i AEC. Pokaži da je*

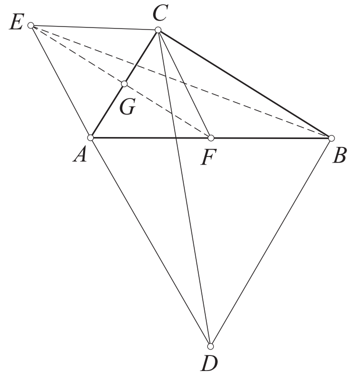
$$P(ACD) = P(AEC) + \frac{1}{2}P(ABC).$$

Rješenje. Neka je F polovište hipotenuze $\overline{AB}$. Povucimo dužine $\overline{EF}$, $\overline{CF}$, $\overline{EB}$. Dužina $\overline{EF}$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki G. Kako je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAE = 60^\circ$, $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAE$. Nadalje $\triangle ACD$ i $\triangle AEB$ su sukladni pa imaju jednake površine tj.

$$P(ACD) = P(AEB).$$

Kako je $\triangle ABC$ pravokutan i F je polovište hipotenuze $\overline{AB}$, vrijedi $|CF| = |AF|$. Trokuti

ECF i EAF su sukladni (tri jednake stranice). Zato je $\sphericalangle CEF = \sphericalangle AEF$ pa su trokuti GEC i GEA sukladni. Dakle, $\sphericalangle CGE = \sphericalangle AGE = 90^\circ$. Dakle, $EF \perp AC$ i $EF \| BC$.



Zatim, $P(AEB) = P(AEF) + P(FEB) = P(AEF) + P(FEC)$ (jer je $EF\|BC$) pa je $P(AEB) = P(AFCE) = P(AEC) + P(ACF) = P(AEC) + \frac{1}{2}P(ABC)$. Kako je $P(ACD) = P(AEB)$ imamo $P(ACD) = P(AEC) + \frac{1}{2}P(ABC)$.

Ur.

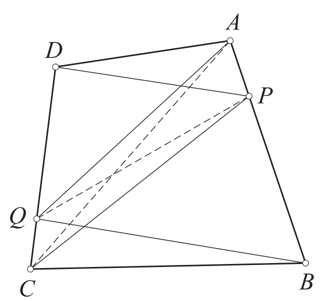
3356. *Točke P i Q su na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ četverokuta $ABCD$ tako da vrijedi*

$$|AP| : |PB| = |CQ| : |QD|.$$

Pokaži da je zbroj površina trokuta QAB i PCD jednak površini četverokuta $ABCD$.

Rješenje. Spojimo A i C, te P i Q. Stavimo $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|CQ|}{|QD|} = \frac{a}{b}$. Tada je

$$\frac{P_{APQ}}{P_{QAB}} = \frac{a}{a+b}, \quad \text{tj.} \quad P_{QAB} = \frac{a+b}{a}P_{APQ}.$$



Slično je

$$\frac{P_{CPQ}}{P_{PCD}} = \frac{a}{a+b}, \quad \text{tj.} \quad P_{PCD} = \frac{a+b}{a}P_{CPQ}.$$

Zbrajanjem dobivamo

$$P_{QAB} + P_{PCD} = \frac{a+b}{a}(P_{APQ} + P_{CPQ}).$$

S druge strane,

$$\frac{P_{ACQ}}{P_{ACD}} = \frac{a}{a+b}, \quad \text{tj.} \quad P_{ACD} = \frac{a+b}{a}P_{ACQ}.$$

Također je

$$P_{ABC} = \frac{a+b}{a}P_{ACP}.$$

Sada je

$$P_{ACD} + P_{ABC} = \frac{a+b}{a}(P_{ACQ} + P_{ACP}).$$

Dakle,

$$P_{QAB} + P_{PCD} = P_{ACD} + P_{ABC} = P_{ABCD}.$$

Ur.

3357. *Ako za kutove α i β vrijedi*

$$\operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta$$

dokaži da je $\sin\alpha\sin\beta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rješenje. Iz dane jednakosti dobivamo

$$\operatorname{tg}^2\beta = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = -\frac{1}{\cos 2\alpha}.$$

Ovo je ekvivalentno sa

$$\frac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta} = \frac{1}{2\sin^2\alpha - 1}.$$

Odavde je

$$2\sin^2\alpha\sin^2\beta = 1 \quad \text{tj.} \quad \sin\alpha\sin\beta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ur.

3358. *Neka je n cijeli broj koji nije djeljiv niti s 2 niti s 3. Dokaži da $24 | n^2 + 47$.*

Rješenje. Imamo

$$n^2 + 47 = n^2 - 1 + 48 = (n-1)(n+1) + 48.$$

Sada slijedi

1° $2 \nmid = n \implies n$ je neparan broj pa je $(n-1)(n+1)$ produkt dva uzastopna parna broja pa je djeljiv s $2 \cdot 4 = 8$.

2° $3 \nmid \; = n \Longrightarrow (n-1)(n+1)$ je produkt dvaju cijelih brojeva od kojih je jedan djeljiv s 3, pa je $(n-1)(n+1)$ djeljivo s 3.

Dakle, $(n-1)(n+1)$ je djeljiv s $8 \cdot 3 = 24$, tj. $24 \mid (n-1)(n+1) + 2 \cdot 24 = n^2 + 47$.

Halil Lačević (9),
OŠ "Čengić Vila I", Sarajevo, BiH

3359. *Od sedam mladića i četiri djevojke želimo napraviti šesteročlanu ekipu za odbojku, ali tako da u njoj bude barem jedna djevojka. Na koliko načina se to može napraviti?*

Rješenje. Podijelimo sve mogućnosti u četiri grupe S_1, S_2, S_3, S_4 tako da u grupi S_i, $i = 1, 2, 3, 4$ bude točno i djevojaka. Tih i djevojaka se može izabrati na $\binom{4}{i}$ načina, a preostalih $6-i$ članova ekipe može se izabrati na $\binom{7}{6-i}$ načina. Dakle imamo

$$|S_i| = \binom{4}{i}\binom{7}{6-i},$$

pa je ukupan broj različitih mogućnosti

$$\begin{aligned} n &= |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| \\ &= \binom{4}{1}\binom{7}{5} + \binom{4}{2}\binom{7}{4} \\ &\quad + \binom{4}{3}\binom{7}{3} + \binom{4}{4}\binom{7}{2} \\ &= 4 \cdot 21 + 6 \cdot 35 + 4 \cdot 35 + 1 \cdot 21 = 455. \end{aligned}$$

Petar Orlić (1), Zagreb

3360. *Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost*

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geqslant 1.$$

Prvo rješenje. Napišimo danu nejednakost u obliku

$$\left(\frac{2a}{b+c} + 1\right)\left(\frac{2b}{a+c} + 1\right)\left(\frac{2c}{a+b} + 1\right) \geqslant 8.$$

Stavimo

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad y = \frac{a+c}{2}, \quad z = \frac{b+c}{2},$$

tj.

$$a = x+y-z, \quad b = x+z-y, \quad c = y+z-x.$$

Sada dobivamo

$$\frac{x+y}{z} \cdot \frac{x+z}{y} \cdot \frac{y+z}{x} \geqslant 8.$$

Primjenom A-G nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned} &\frac{x+y}{z} \cdot \frac{x+z}{y} \cdot \frac{y+z}{x} \\ &\geqslant \frac{2\sqrt{xy}}{z} \cdot \frac{2\sqrt{xz}}{y} \cdot \frac{2\sqrt{yz}}{x} = 8. \end{aligned}$$

Time je dokazana dana nejednakost.

Petar Orlić (1), Zagreb

Drugo rješenje. Iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(a+b)+(a+c)}{2(b+c)} \cdot \frac{(b+c)+(b+a)}{2(c+a)} \cdot \frac{(c+a)+(c+b)}{2(a+b)} \\ &\geqslant \frac{2\sqrt{(a+b)(a+c)} \cdot 2\sqrt{(b+c)(b+a)} \cdot 2\sqrt{(c+a)(c+b)}}{8(b+c)(c+a)(a+b)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Halil Lačević (9), Sarajevo, BiH

3361. *Koliko je $x+y$ ako su x i y od nule različita rješenja sustava jednadžbi*

$$\begin{aligned} y^2x &= 15x^2 + 17xy + 15y^2, \\ x^2y &= 20x^2 + 3y^2. \end{aligned}$$

Rješenje. Iz druge jednadžbe je

$$x^2 = \frac{3y^2}{y-20},$$

a iz prve imamo

$$\begin{aligned} x(y^2 - 17y) &= 15x^2 + 15y^2 \\ &= 15 \cdot \frac{3y^2}{y-10} + 15y^2 \\ &= \frac{45y^2 + 15y^3 - 300y^2}{y-20} \\ &= 15y^2 \cdot \frac{y-17}{y-20}. \end{aligned}$$

Kako $y = 17$ nije rješenje (slijedi iz druge jednadžbe $17x^2 = 20x^2 + 3 \cdot 17^2$, tj. $0 = 3x^2 + 3 \cdot 17^2$ što je kontradikcija), odavde slijedi

$$xy(y-17) = 15y^2 \cdot \frac{y-17}{y-20}$$

$$x = \frac{15y}{y-20} \quad \Big/ ^2$$

$$x^2 = \frac{225y^2}{(y-20)^2}$$

$$\frac{3y^2}{y-20} = \frac{225y^2}{(y-20)^2}$$

$$y - 20 = 75$$

$$y = 95$$

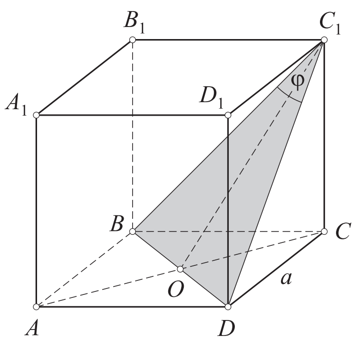
pa je $x = \dfrac{15 \cdot 95}{95 - 20} = 19$.

Konačno je $x + y = 95 + 19 = 114$.

Petar Orlić (1), Zagreb

3362. *Neka je a duljina stranice baze pravilne uspravne četverostrane prizme. Kroz dijagonalu donje baze i nasuprotni vrh gornje baze prolazi ravnina koja siječe dvije bočne strane prizme po pravcima koji zatvaraju kut φ. Koliki je volumen prizme?*

Rješenje. Stavimo $|CD| = a$, $\sphericalangle BC_1D = \varphi$. Tada je $|BD| = a\sqrt{2}$, $|OD| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Iz $\triangle OC_1D$ je:

$$|C_1D| = \frac{|OD|}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Iz $\triangle C_1CD$ je:

$$|CC_1| = \sqrt{|C_1D|^2 - |CD|^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} - a^2}$$

$$= \frac{a}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\frac{1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2}}$$

$$= \frac{a}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\frac{\cos\varphi}{2}};$$

$$V = P_{ABCD} \cdot |CC_1|$$

$$= a^2 \cdot \frac{a}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\frac{\cos\varphi}{2}}$$

$$= \frac{a^3}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\frac{\cos\varphi}{2}}.$$

Ur.

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 354. *Poluga, s osloncem u sredini, ima duljinu osamdeset centimetara. Uravnotežena je pomoću šest jednakih prstena i jedne kocke. Na lijevoj strani, deset centimetara od kraja poluge, ima obješena četiri prstena, a na desnoj dva prstena i jednu kocku. Kocka je od oslonca udaljena deset centimetara, a prsteni dvadeset. Koliko je puta veća masa kocke od mase jednog prstena?*

Rješenje.

$l = 80$ cm

$k_{4p} = 30$ cm

$k_k = 10$ cm

$k_{2p} = 20$ cm

$\dfrac{m_k}{m_p} = ?$

$$4m_p \cdot 30 = m_k \cdot 10 + 2m_p \cdot 20$$

$$120m_p = 10m_k + 40m_p$$

$$120m_p - 40m_p = 10m_k$$

$$80m_p = 10m_k$$

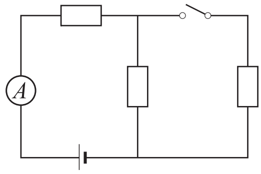
$$m_k = 8m_p.$$

Masa kocke je 8 puta veća od mase prstena.

Lovro Rački (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 355. *Svi otpornici na slici imaju jednak otpor. Kad je prekidač otvoren amper-*

metar pokazuje struju od 0.9 ampera. Koliko će pokazivati kad se prekidač zatvori?



Rješenje.

$$\frac{I_1 = 0.9 \text{ A}}{I_2 = ?}$$

$R_1 = 2R$ jer su otpornici spojeni serijski, a kroz treći ne prolazi struja.

Kad zatvorimo prekidač dobit ćemo paralelni spoj dva otpornika kojem je otpor $\frac{R}{2}$, a ukupni otpor R_2, tada iznosi:

$$R_2 = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

$$U_1 = U_2$$

$$I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2$$

$$0.9 \text{ A} \cdot 2R = I_2 \cdot \frac{3R}{2}$$

$$I_2 = 1.2 \text{ A}.$$

Ampermetar će pokazivati struju jakosti $I_2 = 1.2$ A.

Lovro Rački (8), Zagreb

OŠ – 356. *Autobusi dva različita prijevoznika polaze iz Zagreba u Rijeku u razmaku od pola sata. Prvi je vozio prosječnom brzinom od 65 km/h. Kolika je bila prosječna brzina drugog autobusa ako je u Rijeku stigao istovremeno s prvim? Udaljenost od Zagreba do Rijeke iznosi oko 184 kilometra.*

Rješenje.

$$t_2 = t_1 - 0.5 \text{ h}$$

$$v_1 = 65 \text{ km/h}$$

$$\underline{s = 184 \text{ km}}$$

$$v_2 = ?$$

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{184 \text{ km}}{65 \text{ km/h}} = 2.83 \text{ h}$$

$$t_2 = t_1 - 0.5 \text{ h} = 2.83 \text{ h} - 0.5 \text{ h} = 2.33 \text{ h}$$

$$v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{184 \text{ km}}{2.33 \text{ h}} = 79 \text{ km/h}.$$

Drugi autobus je vozio prosječnom brzinom $v_2 = 79$ km/h.

Sanjin Jurić Fot (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 357. *Bazen je dugačak 30 i širok 20 metara. Napunjen je vodom do visine 2 metra. Ako se u vodu stavi jedan gram soli koliko će molekula te soli biti u jednom kubnom milimetru vode kad se sol otopi i jednoliko rasporedi? Masa jedne molekule soli iznosi $9.7 \cdot 10^{-26}$ kg.*

Rješenje.

$$a = 30 \text{ m}$$

$$b = 20 \text{ m}$$

$$c = 2 \text{ m}$$

$$m = 1 \text{ g}$$

$$\underline{m_1 = 9.7 \cdot 10^{-26} \text{ kg}}$$

$$n/\text{mm}^3 = ?$$

$$V = a \cdot b \cdot c = 30 \text{ m} \cdot 20 \text{ m} \cdot 2 \text{ m}$$

$$= 1200 \text{ m}^3 = 1.2 \cdot 10^3 \text{ m}^3$$

$$= 1.2 \cdot 10^{12} \text{ mm}^3$$

$$n = \frac{m}{m_1} = \frac{1 \text{ g}}{9.7 \cdot 10^{-23} \text{ g}} = 1.03 \cdot 10^{22}$$

$$\frac{n}{V} = \frac{1.03 \cdot 10^{22}}{1.2 \cdot 10^{12} \text{ mm}^3} = 8.58 \cdot 10^9 \text{ mm}^{-3}$$

U svakom bi kubnom milimetru bilo 8.58 milijardi molekula.

Sanjin Jurić Fot (8), Zagreb

1525. *Oko planeta prosječne gustoće 4500 kg/m^3 kruži satelit na visini 350 km, tako da mu je ophodno vrijeme 100 minuta. Odredi radijus planeta i brzinu kruženja satelita.*

Rješenje. Uvjet kruženja izjednačava centripetalnu i gravitacijsku silu:

$$F = \frac{m_s v^2}{R+h} = G \cdot \frac{m_s m_p}{(R+h)^2}$$

$$v^2 = G \cdot \frac{m_p}{R+h} = G \cdot \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} R^3 \pi}{R+h}.$$

Uvrstimo li izraz za brzinu kao opseg putanje podijeljen s periodom,

$$v = \frac{2(R+h)\pi}{T},$$

dobijemo

$$\frac{(R+h)^3}{R^3} = \frac{G\rho T^2}{3\pi}.$$

Kako je desna strana zadana ophodnim vremenom i gustoćom, umjesto rješavanja kubne jednadžbe izvadimo kubni korijen na obje strane. Uz $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$, $\rho = 4500$ $\mathrm{kg/m^3}$, $T = 100$ min $= 6000$ s imamo:

$$\frac{R+h}{R} = \sqrt[3]{\frac{G\rho T^2}{3\pi}} = \sqrt[3]{1.1465} = 1.0466,$$

a odatle je $R = 7500$ km. Brzina kruženja je tada

$$v = \frac{2(R+h)\pi}{T} = 8.22 \text{ km/s}.$$

Ivan Korotaj (4), Elektrostrojarska škola, Varaždin

1526. *Uz površinu nabijene metalne kugle električno polje iznosi* 500 V/m*, a na udaljenosti 15 cm od površine* 280 V/m*. Odredi radijus i naboj kugle.*

Rješenje. Primijenimo Coulombov zakon na udaljenosti R i $R+x$ od središta kugle. R je radijus kugle, a $x = 15$ cm $= 0.15$ m. Imamo

$$E_1 = k \cdot \frac{Q}{R^2}$$

$$E_2 = k \cdot \frac{Q}{(R+x)^2}.$$

Dijeljenjem jednadžbi dobivamo:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R^2 + 2Rx + x^2}{R^2}.$$

Odatle je

$$\left(\frac{E_1}{E_2} - 1\right)R^2 - 2Rx - x^2 = 0,$$

$$\left(\frac{500}{280} - 1\right)R^2 - 0.3 \cdot R - 0.15^2 = 0.$$

Rješenje kvadratne jednadžbe je $R = 0.446$ m (drugo je negativno). Odatle je ukupni naboj kugle

$$Q = \frac{E_1 R^2}{k} = 11.1 \text{ nC}.$$

Ivan Korotaj (4), Varaždin

1527. *Minimalni kut devijacije snopa svjetlosti za prizmu od stakla indeksa loma 1.5 iznosi* 10°*. Koliki je kut prizme? Koliki je kut devijacije ako snop upada okomito na prizmu?*

Rješenje. Kut prizme dobije se iz jednadžbe

$$n \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\delta_{min} + \alpha}{2}.$$

Odatle je (adicijska formula za sinus)

$$n = \cos\frac{\delta_{\min}}{2} + \frac{\sin\frac{\delta_{\min}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Slijedi $\alpha = 19.63^\circ$. Ako snop upada okomito na prvu plohu prizme, tu se ne lomi, pa na drugu plohu dolazi pod kutom α iz stakla. Tada je sinus lomljenog kuta jednak $\sin(\delta+\alpha) = n\sin\alpha$, pa je odatle $\delta = 10.63^\circ$.

Ivan Korotaj (4), Varaždin

1528. *Dvije spektralne linije vodika imaju u vakuumu valne duljine 1874.6 nm i 1943.9 nm. Kojim prijelazima (glavnim kvantnim brojevima* n*) odgovaraju te linije?*

Rješenje. Energije prijelaza u vodikovom atomu određene su izrazom

$$E(n,m) = 13.6 \text{ eV} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

Gdje je $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$. Za $n \geq 5$ energija je premala za svaki $m > 4$, pa ćemo prvo razmotriti $n = 4$, zatim $n = 3, \ldots$ Za odabrani m dobivamo (1 eV $= 1.6 \cdot 10^{-19}$ J, $hc = 1.986446 \cdot 10^{-25}$).

n	m	E	λ (nm)
4	5	0.30600	4057.3
4	6	0.47222	2629.1
4	7	0.57245	2168.8
4	8	0.63750	1947.5
4	$\vdots$		
3	4	0.66111	1877.9
3	5	0.96711	1283.8
$\vdots$			

Lako se uočava da su odabiri $(n,m) = (4,8)$ i $(3,4)$ vrlo blizu zadanih valnih duljina, razlika uglavnom potječe od zaokruživanja Rydbergove konstante (13.6 eV).

Ivan Korotaj (4), Varaždin

1529. *Niz kosinu kuta α kolica ubrzavaju akceleracijom a. Koeficijent trenja kolica i kosine je $\mu = 0.2$. Ako nagib kosine povećamo za 10°, akceleracija će porasti za 40%. Odredi α i a.*

Rješenje. Akceleracija za kut α iznosi:

$$a = \frac{F_v - F_{tr}}{m} = g \sin\alpha - \mu g \cos\alpha.$$

Za 10° veći nagib kosine vrijedi

$$1.4a = g\sin(\alpha + 10^\circ) - \mu g \cos(\alpha + 10^\circ).$$

Dijeljenjem s prvom jednadžbom i korištenjem adicijskih formula dobivamo:

$$\begin{aligned} &1.4\sin\alpha - 1.4\mu\cos\alpha \\ &= \sin\alpha \cdot \cos 10^\circ + \cos\alpha \cdot \sin 10^\circ \\ &\quad - \mu\cos\alpha \cdot \cos 10^\circ + \mu \sin\alpha \cdot \sin 10^\circ. \end{aligned}$$

Dijeljenje s $\cos\alpha$ daje izraz iz kojeg se direktno izračuna $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1.4\mu + \sin 10^\circ - \mu\cos 10^\circ}{1.4 - \cos 10^\circ - \mu \sin 10^\circ}.$$

Odatle je $\alpha = 34^\circ$, a onda iz prve jednadžbe slijedi $a = 3.86\ \mathrm{m/s^2}$.

Ivan Korotaj (4), Varaždin

1530. *Bikonveksna leća načinjena od stakla indeksa loma 1.5 ima dva dioptra jednakih radijusa zakrivljenosti $R_1 = R_2 = 40$ cm. Debljina leće duž optičke osi iznosi 3 cm. Odredi žarišnu daljinu pomoću jednadžbe tanke leće i pomoću izraza za leću debljine d:*

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{(n-1)d}{nR_1R_2}\right).$$

Izrazi pogrešku izraza za tanku leću u postocima.

Rješenje. Jednadžba tanke leće daje žarišnu daljinu:

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

$f' = 40$ cm. Koristeći zadani izraz za leću debljine d dobijemo $f = 40.506$ cm. Razlika podijeljena s drugim iznosom je relativna pogreška:

$$\delta f_{rel} = \frac{|f - f'|}{f} = 0.0125 = 1.25\%.$$

Ivan Korotaj (4), Varaždin

1531. *Vodik i ugljik imaju po dva stabilna izotopa. Prirodni ugljik sadrži 1.11% izotopa ^{13}C (ostatak je ^{12}C), a vodik 0.015% izotopa ^{2}H (ostatak je ^{1}H). Koliko ima molekula koje sadrže jedan ^{13}C i četiri ^{2}H atoma u jednom gramu metana (CH_4)?*

Rješenje. Ukupan broj molekula metana u jednom gramu iznosi

$$\begin{aligned} N &= \frac{m}{M} \cdot N_A \\ &= \frac{1\ \mathrm{g}}{12 + 4 \cdot 1\ \mathrm{g/mol}} \cdot 6.022 \cdot 10^{24}\ \mathrm{mol^{-1}} \\ &= 3.763 \cdot 10^{22}. \end{aligned}$$

Izotop $^{13}\mathrm{C}$ se javlja s udjelom 0.0111, a $^{2}\mathrm{H}$ s udjelom 0.00015. Molekula koja sadrži samo te izotope javlja se učestalošću $p = 0.0111 \cdot 0.00015^4$. Broj takvih molekula je $Np = 211\,500$ molekula.

Ivan Korotaj (4), Varaždin