Međunarodno matematičko natjecanje "Klokan bez granica" 2013. g., 1. dio

Zahvaljujemo vam se što ste sudjelovali na Međunarodnom matematičkom natjecanju "Klokan bez granica". Pod pokroviteljstvom Ministarstva prosvjete i sporta i Hrvatskog matematičkog društva, ove godine je natjecanje održano po *petnaesti put* u Hrvatskoj 21. ožujka s početkom u 12 sati i 30 minuta. U proteklih petnaest godina u Hrvatskoj se ukupno natjecalo 282 526 učenika (neki i po nekoliko puta) u više od 750 osnovnih i srednjih škola iz svih krajeva Lijepe naše. S približno istim zadacima u isto vrijeme ove godine natjecalo se više od 6 800 000 učenika u 54 zemlje svijeta, što ovo natjecanje čini najvećim školskim natjecanjem u svijetu. Iste zadatke rješavali su učenici Argentine, Armenije, Austrije, Belgije, Bjelorusije, Brazila, Bugarske, Cipra, Češke, Ekvadora, Estonije, Finske, Francuske, Gruzije, Grčke, Hrvatske, Indonezije, Irana, Irske, Italije, Južnoafričke Republike, Kanade, pokrajine Katalonije, Kazahstana, Kirgistana, Kolumbije, Litve, Mađarske, Makedonije, Meksika, Moldavije, Mongolije, Nizozemske, Norveške, Njemačke, Obale Bjelokosti, Pakistana, Poljske, Paragvaja, Portorika, Portugala, Rumunjske, Rusije, Sjedinjenih Američkih Država, Slovačke, Slovenije, Srbije, Španjolske, Švedske, Švicarske, Tunisa, Ukrajine, Velike Britanije i Venecuele.

Prema odjecima koji su stigli do nas, vjerujemo da je natjecanje postiglo svoju svrhu i zainteresiralo učenike za rješavanje zadataka iz matematike. U Hrvatskoj je natjecanje održano u *402 osnovne i 80 srednjih škola* u svim županijama, a učenici su se natjecali podijeljeni u šest kategorija:

PČELICE	– II. razred osnovne škole – (5411 učenika) – **P**
LEPTIRIĆI	– III. razred osnovne škole – (5047 učenika) – **L**
ECOLIERS	– IV. i V. razred osnovne škole – (7518 učenika) – **E**
BENJAMINS	– VI. i VII. razred osnovne škole – (5232 učenika) – **B**
CADETS	– VIII. razred osnovne i I. razred srednje škole – (2643 učenika) – **C**
JUNIORS	– II. i III. razred srednje škole – (1362 učenika) – **J**
STUDENTS	– IV. razred srednjih škola – (422 učenika) – **S**

Ukupno se natjecalo 27 635 učenika.

Prilikom dolaska na natjecanje svaki je učenik dobio "poklon za svakoga", a 10% najbolje plasiranih učenika dobilo je i nagrade. Podijeljeno je *2940 nagrada i oko 750 utješnih nagrada*. Učenici ovo natjecanje plaćaju 15 kn. Tom svotom se podmiruju svi troškovi nagrada i materijalni troškovi. Učenici slabijeg materijalnog stanja oslobođeni su plaćanja (ove godine plaćanja je oslobođeno 96 učenika).

U ime povjerenstva najtoplije vam se zahvaljujem na sudjelovanju.

Sljedeće godine natjecanje će se održati **20. ožujka 2014. godine**, s početkom u **12 sati i 30 minuta**. Prijave za natjecanje primaju se *najkasnije* do **5. veljače 2014. godine na adresu HMD, Bijenička cesta 30, Zagreb**, a potvrde o uplati se trebaju **fotokopirati i poslati faxom i e-poštom** najkasnije do **12. veljače 2014. godine**. Na prijavama koje se fotokopiraju mora se lako očitati naziv škole i broj učenika po kategorijama, a na uplatnici ukupan broj učenika, naziv škole i suma novca koja je uplaćena.

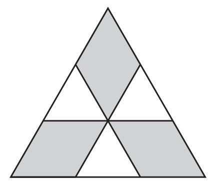
Uzorke zadataka s prošlih natjecanja možete pogledati u knjizi: Matematičko natjecanje **"Klokan bez granica 2009 – 2011"**, a možete je nabaviti na gore navedenoj adresi.

Koordinator natjecanja, Neda Lukač, prof.

Zadaci za učenike 8. razreda osnovne i 1. razreda srednje škole (Cadet)

Pitanja za 3 boda:

1. Na slici je veliki jednakostraničan trokut koji ima površinu 9. Dužine paralelne stranicama dijele stranicu na tri jednaka dijela. Kolika je ukupna površina osjenčanih dijelova?



A. 1 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6 **E.** 7

Rješenje: D. Presječemo li rombove po manjoj dijagonali vidimo da je veliki trokut sastavljen od 9 manjih jednakostraničnih trokuta, od kojih je 6 osjenčano.

2. Istina je da vrijedi $\frac{1111}{101} = 11$. Kolika je onda vrijednost izraza $\frac{3333}{101} + \frac{6666}{303}$?

A. 5 **B.** 9 **C.** 11 **D.** 55 **E.** 99

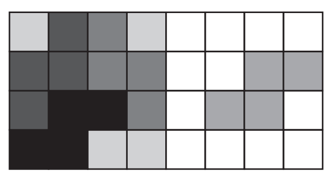
Rješenje: D. $\frac{3333}{101} + \frac{6666}{303} = 33 + 22 = 55$.

3. Masa soli i čiste vode u moru kod Protarasa (Cipar) je u omjeru $7:193$. Koliko kilograma soli ima u 1000 kg morske vode?

A. 35 **B.** 186 **C.** 193 **D.** 200 **E.** 350

Rješenje: A. U 200 kg morske vode ima 7 kg soli i 193 kg čiste vode, a u 1000 kg morske vode ima 35 kg soli.

4. Ana ima list papira podijeljen dužinama na kvadrate, kao na slici lijevo. Rezanjem po tim dužinama izrezuje oblike poput ovog na slici desno. Koliko će najmanje kvadrata ostati nakon što Ana izreže sve željene oblike s papira?



A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6 **E.** 8

Rješenje: C. Vidi jedan od primjera.

5. Vlado želi reći Petru broj kojemu je umnožak znamenki 24. Koliki je zbroj znamenki najmanjeg takvog broja?

A. 6 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10 **E.** 11

Rješenje: E. $24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$, pa to mogu biti brojevi 38 i 46, manji je 38, a zbroj njegovih znamenki je 11.

6. U vrećici se nalaze kuglice pet različitih boja. Dvije su crvene, tri plave, deset bijelih, četiri zelene i tri crne. Ne gledajući iz vrećice vadimo jednu po jednu kuglicu i ne vraćamo je natrag. Koliko najmanje kuglica moramo izvući, da bi bili sigurni da su dvije od njih iste boje?

A. 2 **B.** 12 **C.** 10 **D.** 5 **E.** 6

Rješenje: E. S obzirom da imamo 5 različitih boja i od svake najmanje 2 kuglice, moramo izvući 6 kuglica.

7. Edita pali svijeće svakih deset minuta. Svaka svijeća gori 40 minuta, a zatim se gasi. Koliko svijeća gori 55 minuta nakon što je Edita upalila prvu svijeću?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 6

Rješenje: C. Za 55 minuta Edita je upalila 6 svijeća, a ugasile su se dvije.

8. Marko i Vana stoje jedan nasuprot drugog oko okrugle fontane. Oboje počinju istovremeno trčati u smjeru kazaljke na satu oko fontane. Markova brzina je 9/ 8 Vanine brzine. Koliko će krugova Vana optrčati kad će je Marko po prvi put sustići?

A. 4 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 2 **E.** 72

Rješenje: A. Razlika između Marka i Vane je pola kruga, a Marko trči za 1/ 8 brže od Vane, pa će je sustići za 4 kruga.

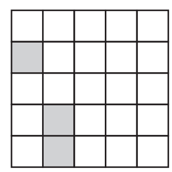
Pitanja za 4 boda:

9. Prirodni brojevi x, y i z zadovoljavaju $x \cdot y = 14$, $y \cdot z = 10$ i $z \cdot x = 35$. Kolika je vrijednost $x + y + z$?

A. 10 **B.** 12 **C.** 14 **D.** 16 **E.** 18

Rješenje: C. $x \cdot y = 14 = 7 \cdot 2$, $y \cdot z = 10 = 2 \cdot 5$, $z \cdot x = 35 = 7 \cdot 5$, $x = 7$, $y = 2$, $z = 5$, a $x + y + z = 14$.

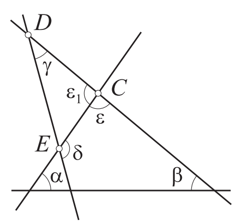
10. Karen i prijateljica se igraju "potapanja brodova" na ploči od 5×5 kvadrata. Karen je dva svoja broda postavila kao na slici. Još joj je preostalo da postavi najveći brod od 3 kvadrata. Ako znamo da se dva broda nikako ne smiju dodirivati, na koliko mjesta na ploči Karen može postaviti svoj brod?



A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7 **E.** 8

Rješenje: E. Karen može postaviti brod vodoravno: u prvom redu zadnja tri kvadrata desno ili u drugom redu zadnja tri kvadrata desno, a može ga postaviti okomito: u četvrtom stupcu desno tako da započinje s prvim retkom u petom stupcu desno tako da započinje s prvim retkom u četvrtom stupcu desno tako da započinje s drugim retkom u petom stupcu desno tako da započinje s drugim retkom u četvrtom stupcu desno tako da započinje s trećim retkom u petom stupcu desno tako da započinje s trećim retkom

11. Pravci na slici zatvaraju kutove $\alpha = 55°$, $\beta = 40°$ i $\gamma = 35°$. Koliki je kut δ?



A. 100° **B.** 105° **C.** 120° **D.** 125° **E.** 130°

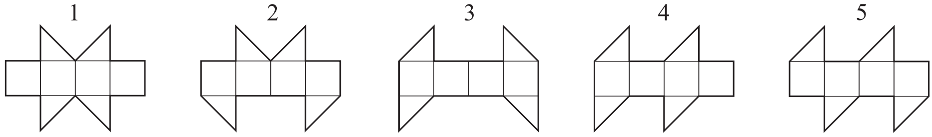
Rješenje: E. Treći kut u trokutu $\varepsilon = 180° - (\alpha + \beta) = 85°$. Njegov sukut je $\varepsilon_1 = 95°$. Kut δ je vanjski kut trokuta CDE. $\delta = \gamma + \varepsilon_1 = 130°$.

12. Opseg trapeza je 5, a duljine njegovih stranica su cijeli brojevi. Kolika su dva najmanja kuta?

A. 30° i 30° **B.** 60° i 60° **C.** 45° i 45° **D.** 30° i 60° **E.** 45° i 90°

Rješenje: B. Označimo trapez s $ABCD$. $|AB| = 2$, $|BC| = 1$, $|CD| = 1$ i $|DA| = 1$. Povučemo li kroz točku C paralelu s krakom AD ona će sjeći bazu AB u točki E. Trokut EBC je jednakostraničan, pa su najmanja dva kuta 60°.

13. S kojom od sljedećih mreža ne možemo sastaviti kocku?



A. mreža 1 **B.** mreža 2 **C.** mreža 3 **D.** mreža 4 **E.** mreža 5

Rješenje: C.

14. Na završnoj utakmici hokejskog prvenstva bilo je mnogo golova. U prvom poluvremenu bilo je 6 golova i gostujuća momčad bila je u vodstvu. U drugom poluvremenu domaćini su zabili 3 gola i postali pobjednici. Koliko su domaćini ukupno zabili golova?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6 **E.** 7

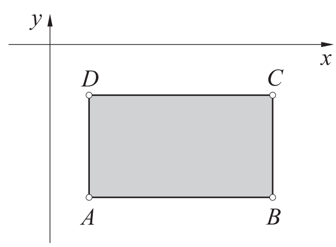
Rješenje: C. Ako je gostujuća momčad bila u vodstvu znači da je zabila najmanje 4 gola, a domaćini 2 gola. Budući su domaćini zabili 3 gola u drugom poluvremenu, znači da su ukupno zabili 5 golova.

15. Na ploču su uzlaznim redom od najmanjeg napisani svi četveroznamenkasti pozitivni cijeli brojevi s istim znamenkama kao i broj 2013. Kolika je najveća moguća razlika između dva susjedna broja na ploči?

A. 702 **B.** 703 **C.** 693 **D.** 793 **E.** 198

Rješenje: A. Red čine brojevi: 1023, 1032, 1203, 1230, 1302, 1320, 2013, 2031, 2103, 2130, 2301, 2310, 3012, 3021, 3102, 3120, 3201, 3210. Najveća razlika je $3012 - 2310 = 702$.

16. Stranice pravokutnika $ABCD$ paralelne su s koordinatnim osima i on leži ispod osi x i desno od osi y. Koordinate točaka A, B, C, D su cijeli brojevi. Za svaku točku odredite vrijednost $\frac{y}{x}$. Koja od četiri točke ima najmanju vrijednost?

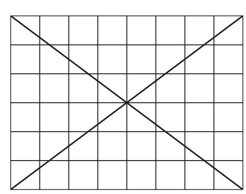


A. A **B.** B **C.** C **D.** D
E. ovisi o pravokutniku

Rješenje: A. Budući je $y < 0$, onda je $y : x$ to manji što je $|y : x|$ veći. $|y : x|$ je to veći što je x manji, a $|y|$ veći. Najmanji x, a najveći $|y|$ ima točka A.

Pitanja za 5 bodova:

17. U rešetki 6×8 kvadrata, 24 kvadrata nisu presječena dijagonalama. Ako rešetku povećamo na 6×10 kvadrata koliko kvadrata neće biti presjećeno dijagonalama u toj rešetki?



A. 28 **B.** 29 **C.** 30 **D.** 31 **E.** 32

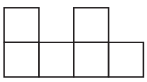
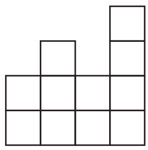
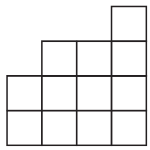
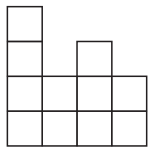
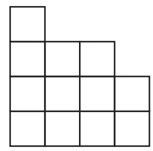
Rješenje: E.

18. Ana, Beti, Gita, Dora i Eva rođene su 20/02/2001, 12/03/2000, 20/03/2001, 12/04/2000 i 23/04/2001 (dan / mjesec / godina). Ana i Eva su rođene istog mjeseca. Također su istog mjeseca rođene Beti i Gita. Ana i Gita rođene su istog dana, ali različitih mjeseci. Dora i Eva rođene su također istog dana, ali različitih mjeseci. Koja je od njih najmlađa?

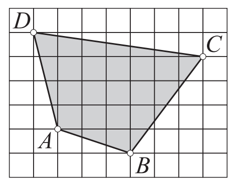
A. Ana **B.** Beti **C.** Gita **D.** Dora **E.** Eva

Rješenje: B. Ana 12/3/2000, Eva 20/3/2001, Beti 23/4/2001, Gita 12/4/2000, Dora 20/2/2001. Najmlađa je Beti.

19. Ivan je sagradio zgradu od kocki. Na slici vidite zgradu odozgo. U svakom polju je broj kocki koje su smještene jedna na drugu u obliku tornja. Ako tu zgradu gledate sa stražnje strane koju ćete od sljedećih slika vidjeti?

A.  **B.**  **C.**  **D.**  **E.** 

Rješenje: C.



20. Na slici vidimo osjenčani četverokut $ABCD$ nacrtan u rešetki. Svaki kvadratić rešetke ima stranicu duljine 2 cm. Kolika je površina četverokuta $ABCD$?

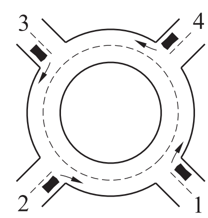
A. 96 cm^2 **B.** 84 cm^2 **C.** 76 cm^2 **D.** 88 cm^2 **E.** 104 cm^2

Rješenje: B. Promotrimo četverokut opisan oko našeg osjenčanog četverokuta. Njegova je površina $P = (7 \cdot 5) \cdot 4 = 140$ cm^2. Od te površine oduzimamo one koje nisu osjenčane. Ispod stranice $\overline{AB}$ je površina $P_1 = [(3 \cdot 1) : 2] \cdot 4 = 6$ cm^2, ispod stranice $\overline{BC}$ je površina $P_2 = [(3 \cdot 4) : 2] \cdot 4 = 24$ cm^2, iznad stranice $\overline{CD}$ je površina $P_3 = [(7 \cdot 1) : 2] \cdot 4 = 14$ cm^2, ispod stranice $\overline{DA}$ je površina $P_4 = [(1 \cdot 4) : 2] \cdot 4 = 8$ cm^2 i na kraju površina kvadrata kod vrha A je $P_5 = 4$ cm^2. $P - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5) = 140 - (6 + 24 + 14 + 8 + 4) = 84$ cm^2.

21. Vrtlar želi uzduž šetnice u parku posaditi 20 stabala (javora i lipe). Broj stabala između bilo koja dva javorova stabla ne smije biti tri. Koliko najviše stabala javora može tako posaditi?

A. 8 **B.** 10 **C.** 12 **D.** 14 **E.** 16

Rješenje: C. Javor, javor, lipa, javor, lipa, javor, javor, lipa, javor, lipa, javor, javor, lipa, javor, lipa, javor, javor, lipa, javor, lipa.



22. Četiri automobila ulaze u kružni tok u isto vrijeme, svaki iz svog smjera. Niti jedan od njih nije odvozio puni krug oko kružnog toka, a svaki je izašao u svom smjeru. Na koliko različitih načina ti automobili mogu izaći iz ovog kružnog toka?

A. 9 **B.** 12 **C.** 15 **D.** 24 **E.** 81

Rješenje: A. Automobile označimo brojevima 1, 2, 3, 4, a ceste koje dolaze u kružni tok slovima a, b, c, d. Mogući načini za izlaz iz kružnog toka su: $(1b, 2c, 3d, 4a)$, $(1b, 2d, 3a, 4c)$, $(1b, 2a, 3d, 4c)$, $(1c, 2a, 3d, 4b)$, $(1c, 2d, 3a, 4b)$,

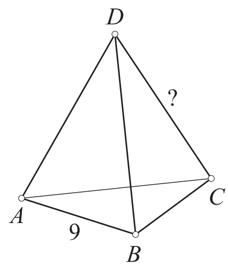
$(1c, 2d, 3b, 4a)$, $(1d, 2a, 3d, 4b)$, $(1d, 2c, 3a, 4b)$. U svakom od načina moraju se naći sve brojke 1, 2, 3, 4 i sva slova a, b, c, d, ali ne smiju se nalaziti kombinacije $1a$, $2b$, $3c$, $4d$.

23. Niz počinje brojevima 1, -1, -1, 1, -1. Poslije petog člana niza svaki sljedeći član jednak je umnošku dvaju svojih predhodnika. Na primjer, šesti član niza jednak je umnošku četvrtog i petog člana. Koliki je zbroj prvih 2013 članova niza?

A. -1006 **B.** -671 **C.** 0 **D.** 671 **E.** 1007

Rješenje: B. Napišimo još nekoliko članova niza: $\underline{1,\ -1,}\ -1,\ \underline{1,\ -1,}\ -1,\ \underline{1,\ -1,}\ -1,\ \underline{1,\ -1,}\ldots$ Dokidaju se dva člana, a svaki treći član ostaje i to je -1. Zbroj prvih 2013 članova niza je -671.

24. Sva četiri vrha i šest bridova tetraedra označeni su brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 (broj 10 je izostavljen). Svaki je broj upotrijebljen samo jednom. Zbroj brojeva bilo koja dva vrha jednak je broju na bridu koji ta dva vrha povezuje. Brid $\overline{AB}$ je označena brojem 9. Koji je broj upotrijebljen kao oznaka za stranicu $\overline{CD}$?



A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 8 **E.** 11

Rješenje: B. Prvi slučaj: $A(2)$, $B(7)$, $C(1)$, $D(4)$, $\overline{AB}(9)$, $\overline{BC}(8)$, $\overline{CA}(3)$, $\overline{BD}(11)$, $\overline{CD}(5)$ i drugi slučaj: $A(7)$, $B(2)$, $C(3)$, $D(1)$, $\overline{AB}(9)$, $\overline{BC}(6)$, $\overline{CA}(11)$, $\overline{BD}(3)$, $\overline{CD}(5)$.