Geometrijske aproksimacije

Zdravko Kurnik[1]

U ovom članku bit će opisano nekoliko aproksimativnih rješenja poznatih problema geometrije. Sama riječ geometrija ne treba značiti da dotični problemi ne mogu imati i potpuno točna rješenja. Radi se samo o sredstvima koja su matematičaru na raspolaganju. U geometriji su osnovna pomagala ravnalo i šestar i prema tome ovdje će biti govora o onim problemima koji se ne mogu riješiti elementarno, tj. samo pomoću tih pomagala. Od geometrijskih problema, koji se ravnalom i šestarom mogu samo približno riješiti, najvažnija su tri klasična: *duplikacija kocke*, *trisekcija kuta* i *kvadratura kruga*. Može se reći da su ovi problemi stari gotovo koliko i matematika i velik broj matematičara stoljećima je pokušavao riješiti te probleme. Kao rezultat tako velikog interesa pojavio se čitav niz potpunih rješenja (naravno uz dodatna geometrijska pomagala), a i niz vrijednih aproksimativnih rješenja uz pomoć ravnala i šestara. Sve do 18. st. mnogo je matematičara smatralo da su našli elementarna "rješenja" ili da se ona mogu naći. Međutim krajem 18. i početkom 19. st. dano je nekoliko strogih dokaza o nemogućnosti elementarnog rješenja klasičnih problema. Najzaslužniji za to je, svakako, veliki njemački matematičar C. F. Gauss (1777. – 1855.). Dokazi se svode na ireducibilnost nekih kubnih jednadžbi.

Egzaktna rješenja triju klasičnih problema mogu se dobiti pomoću: čunjosječnica, Nikomedove konhoide, Pascalovog puža, Dioklove cisoide, kvadratrise, trisektrise itd. jasno je da svaka od ovih krivulja rješava možda samo jedan od tih problema.

Od velikog broja približnih rješenja u članku će biti dan samo mali broj metoda, od kojih se neke izdvajaju kao vrlo točne aproksimacije, a druge su primjeri savršene elegancije i jednostavnosti. Prirodno je da su prve važnije s teorijskog stanovišta, ali su zato druge prikladnije za praktičnu upotrebu. Neke od njih su i jednostavne i precizne kao, na primjer, aproksimativna konstrukcija za π od Kochanskog. No kako se ona nalazi gotovo u svakom udžbeniku geometrije ispustit ćemo je iz razmatranja i dati opis nekih manje poznatih metoda.

Duplikacija kocke (delski problem)

Zadana je kocka brida a. Treba naći brid b druge kocke, ali tako da je njezin volumen dva puta veći od volumena prve kocke.

Brid b dobivamo iz jednakosti

$$b^3 = 2a^3, \qquad b = a\sqrt[3]{2}.$$

Ovaj znameniti problem vodi dakle na konstrukciju $\sqrt[3]{2}$. Već je starogrčki matematičar Hipokrat uvidio da bi se ova veličina mogla naći pomoću razmjera

$$1 : x = x : y = y : 2,$$

[1] Zdravko Kurnik je izvanredni profesor, metodičar i popularizator matematike. Radio je na Matematičkom odsjeku PMF-a Sveučilišta u Zagrebu. Članak je objavljen šk. god. 1965/66.

odakle slijedi

$$x = \sqrt[3]{2}, \qquad y = (\sqrt[3]{2})^2.$$

Geometrijski bi se te veličine dobile kao koordinate jednog sjecišta dviju parabola: $x^2 = y$ i $y^2 = 2x$.

Pomoću parabola problem je riješio Platonov učenik Menehmo. Sam Platon dao je rješenje pomoću jedne krivulje 3. reda, a Nikomed (3. st. pr. n. e.) je u tu istu svrhu iskoristio svoju konhoidu, krivulju 4. reda.

Vidljivo je da je x rješenje jednadžbe

$$x^3 - 2 = 0,$$

a ova jednadžba nema racionalne korijene pa se ni $\sqrt[3]{2}$ ne može konstruirati samo šestarom i ravnalom. Pogledajmo sad nekoliko približnih konstrukcija broja

$$\sqrt[3]{2} = 1.2599210\ldots$$

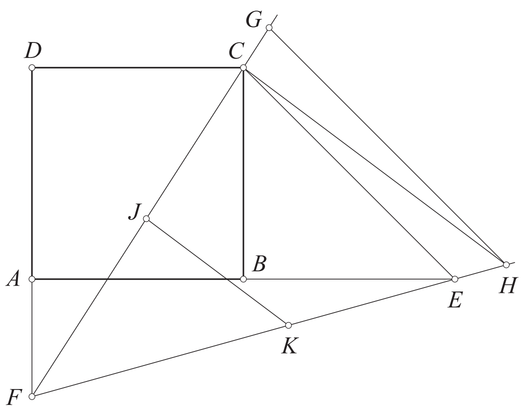
a) Jedna približna vrijednost je

$$\sqrt[3]{2} \doteq \frac{349}{277} = 1.2599277\ldots$$

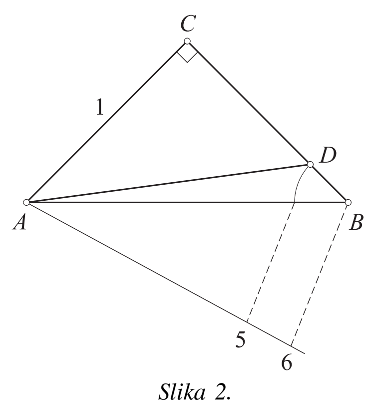
Vrijednost ove aproksimacije nije samo u tome što se ona podudara s pravom vrijednošću $\sqrt[3]{2}$ na pet decimala, nego i što dopušta relativno jednostavnu konstrukciju. Naime, lako je opaziti da se gornji razlomak može napisati u obliku

$$\frac{349}{277} = \frac{18^2 + 5^2}{9^2 + 14^2} = \frac{2^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^2}{1^2 + \left(1 + \frac{5}{9}\right)^2}.$$

Prvo se konstruira kvadrat stranice $AB = 1$ (slika 1). Zatim se na produžetak stranice DA nanese dužina $AF = \dfrac{5}{9}$, a na produžetak stranice AB dužina $BE = 1$. Spojimo F sa C, na spojnicu nanesemo dužine $FJ = 1$ i $FG = FE$. Konačno se odrede još točke H i K tako da bude $GH \| CE$ i $JK \| CH$. Tada je $FK = \sqrt[3]{2}$.



Slika 1.



Slika 2.

Jednostavan račun daje:

$$EF^2 = 2^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^2, \qquad CF^2 = 1^2 + \left(1 + \frac{5}{9}\right)^2.$$

A iz sličnosti trokuta

$$\triangle FKJ \sim \triangle FHC, \qquad \triangle FEC \sim \triangle FHG$$

slijedi

$$FH : FE = FE : FC$$

$$FK : FJ = FH : FC = FE^2 : FC^2.$$

Dakle je

$$FK = \frac{FE^2}{FC^2} = \frac{349}{277} \doteq \sqrt[3]{2}.$$

b) Gore je $\sqrt[3]{2}$ bio aproksimiran s racionalnim izrazom. Pokazat ćemo sada način kako se to može učiniti s iracionalnim izrazom, koji dopušta jednostavnu konstrukciju. Potražit ćemo rješenje kvadratne jednadžbe oblika

$$a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c \doteq 0, \tag{1}$$

gdje su a, b, c cijeli brojevi. Ovdje je jasno da ovo može biti jednako nuli samo približno, inače bi se $\sqrt[3]{2}$ mogao izraziti pomoću kvadratnih korijena i tako elementarno konstruirati. A to je dokazano da se ne može. Primjenom Jacobijevog algoritma (1868.) može se lako doći do jednadžbe oblika (1). Stavi se

$$(\sqrt[3]{2} - 1)^n = a_{n-3}\sqrt[3]{4} + (a_{n-1} - a_{n-2})\sqrt[3]{2} + (a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2}). \tag{2}$$

Između cijelih brojeva a_i postoji rekurzivna formula

$$a_{n+1} = -3(a_n + a_{n-1}) + a_{n-2}, \tag{3}$$

koja se dobije ako u (2) prijeđemo s n na $n+1$ i izjednačimo koeficijente. Prva tri koeficijenta izlaze direktno iz (2) za slučaj $n = 2$, a ostale daje rekurzivna formula (3). Oni su redom jednaki $a_0 = 1$, $a_1 = -3$, $a_2 = 6$, $a_3 = -8$, $a_4 = 3$, $a_5 = 21$, $a_6 = -80$, $a_7 = 180$, $a_8 = -279$, ... Ako je n dovoljno velik lijeva strana u (2) približno je jednaka nuli, a desna je kvadratni izraz za $\sqrt[3]{2}$. Odnosno, za velike n imamo jednadžbu oblika (1). Evo par primjera:

$$n = 5 \qquad 8\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{2} - 19 \doteq 0 \qquad \sqrt[3]{2} \doteq \frac{-5 + \sqrt{633}}{16} = 1.2599682\ldots$$

$$n = 6 \qquad \sqrt[3]{4} + 8\sqrt[3]{2} - \frac{35}{3} \doteq 0 \qquad \sqrt[3]{2} \doteq -4 + \sqrt{\frac{83}{3}} = 1.259911\ldots$$

$$n = 8 \qquad 80\sqrt[3]{4} - 100\sqrt[3]{2} - 1 \doteq 0 \qquad \sqrt[3]{2} \doteq \frac{100 + \sqrt{10\,320}}{160} = 1.2599215\ldots$$

Povećavajući n mogu se dobiti još točnije aproksimacije, ali je za primjenu i ovo više nego dovoljno. Isto tako konstrukcija gornjih aproksimacija je sasvim jednostavna.

c) Za praktičnu upotrebu, gdje se ne traži velika točnost, najzgodnija i najjednostavnija je aproksimacija od Bunofalcea (slika 2).

Konstruira se jednakokračni pravokutni trokut ABC (radi jednostavnosti neka katete imaju duljinu 1) zatim se hipotenuza AB razdijeli na 6 jednakih dijelova i na katetu nanese dužina $BD = \frac{1}{6}AB$. Tada je $AD = \sqrt[3]{2}$. Odmah se vidi

$$CD = 1 - \frac{\sqrt{2}}{6}, \qquad AD = \sqrt{1 + CD^2} = 1.2586\ldots$$

Dakle pogreška je manja od $2 \cdot 10^{-3}$.

Problem se sastoji u tome da se proizvoljni kut razdijeli na tri jednaka dijela.

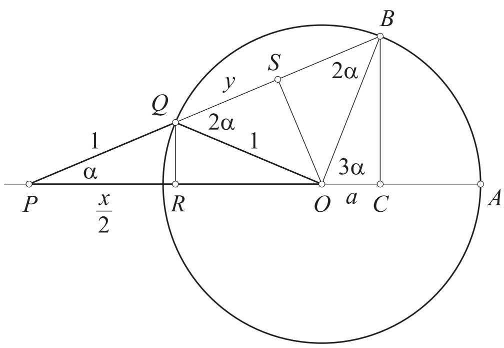
Pogledajmo na što se svodi ovaj problem. Na slici 3 konstruiran je prvo jednakokračan trokut POQ s kutom α uz bazu. Kružnica oko O radijusa $OQ = 1$ siječe produžetak kraka PQ u točki B, a produžetak PO u točki A. Pri tome je $\sphericalangle AOB$ jednak 3α. Pitamo se sada kako izvesti obrnutu konstrukciju: ako je zadan kut $AOB = 3\alpha$ kako dobiti kut $OPQ = \alpha$. Rješenje se svodi na umetanje dužine $PQ = 1$ na pravac PB. No međutim ta operacija nije elementarna. Iz sličnosti trokuta PRQ, PSO i PCB izlaze ove jednakosti

$$\frac{x}{2} = \frac{1+y}{x} = \frac{x+a}{1+2y}.$$

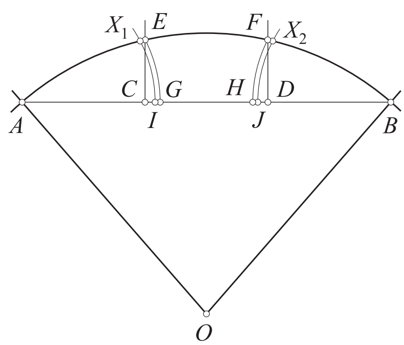
Nakon sređivanja dolazimo do kubne jednadžbe

$$x^3 - 3x - 2a = 0,$$

koja je ireducibilna, tj. korijeni joj se ne daju izraziti racionalnim izrazom ili izrazom od konačno mnogo kvadratnih korijena. To pak znači da je $x = OP$ nemoguće konstruirati (odnosno $PQ = 1$ umetnuti na pravac PB), samo pomoću ravnala i šestara. Točno rješenje moguće je dobiti pomoću gotovo svih krivulja spomenutih u uvodu, o čemu će biti govora možda nekom drugom prilikom. Ovdje ćemo se zadržati na nekoliko približnih rješenja.



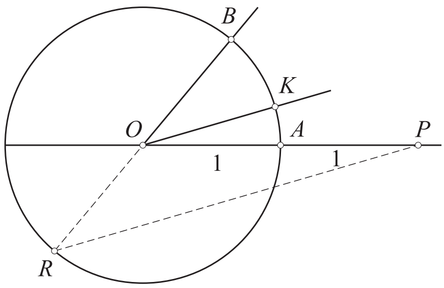
Slika 3.



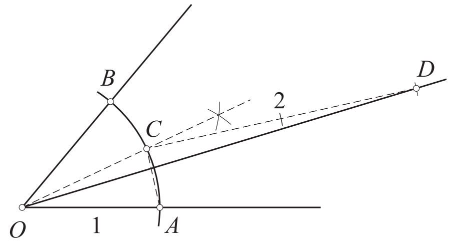
Slika 4.

a) Aproksimacija A. Dürera (1471.–1528.)

Neka je AOB kut koji treba razdijeliti na tri jednaka dijela (slika 4). Povučemo tetivu AB i na njoj odredimo točke C i D tako da je $AC = CD = DB$. U točkama C i D postave se okomice na tetivu AB te odrede sjecišta tih okomica s kružnim lukom AB. Neka su to točke E i F. Oko A opišemo kružni luk s polumjerom AE, oko B sa polumjerom BF. Ti kružni lukovi sijeku tetivu AB u točkama G i H. Sada se potraže točke I i J koje dužine CG, odnosno DH dijele u omjeru $2:1$. Konačno se oko A i B opišu novi kružni lukovi s polumjerima AI i BJ i potraže sjecišta tih lukova s lukom $\overset{\frown}{AB}$. Dobivene točke X_1 i X_2 dijele luk $\overset{\frown}{AB}$ na tri približno jednaka dijela, a isto tako pravci OX_1 i OX_2 polazni kut AOB.



Slika 5.



Slika 5'.

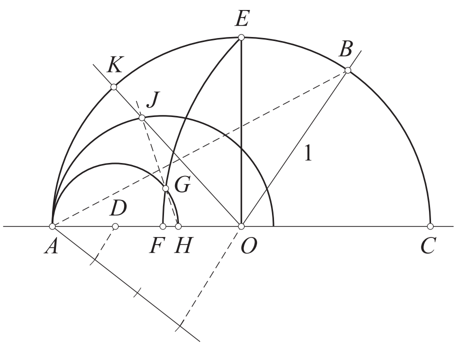
b) Ch. Huyghens (1629.–1695.) dao je jednu jednostavnu konstrukciju koja je to točnija što je kut manji. Oko vrha kuta AOB opiše se kružnica jediničnog polumjera. Produženi krak BO siječe kružnicu u točki R. Nanesemo zatim na produženi krak OA dužinu $AP = OA = 1$. Spojimo R s P i kroz O povučemo paralelu s tom spojnicom. Paralela OK zatvara s krakom OA približno trećinu kuta AOB (slika 5).

c) Metoda I. Newtona (1643.–1727.)

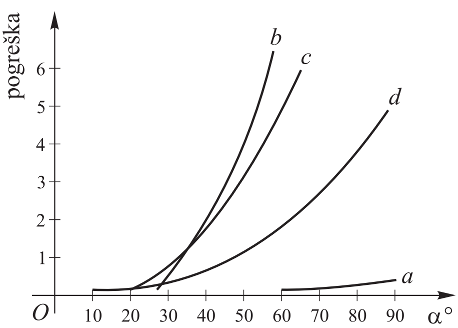
Dani kut AOB (slika 5') najprije se raspolovi. Simetrala kuta siječe jediničnu kružnicu u točki C. Zatim se na tetivu AC u točki C postavi normala i na nju nanese dužina $CD = 2$. Spojimo li konačno O s D dobili smo kut AOD koji je nešto manji nego prava trećina kuta AOB.

d) Aproksimacija N. Fialkowskog

Nikolaus Fialkowski objavio je 1860. godine knjigu o trisekciji kuta i u njoj dao preko stotinu raznih konstrukcija. Objasnit ćemo jednu njegovu originalnu ideju.



Slika 6.



Slika 7.

Ponovo neka je AOB dani kut, koji treba trisecirati (slika 6). Oko vrha O opišemo kružnicu s polumjerom $AO = OB = 1$. Na promjer AOC postavimo okomit polumjer OE, zatim polumjer OA podijelimo točkom D u omjeru $2 : 1$. Onda povučemo tri pomoćna kružna luka: oko C s polumjerom CE, oko sjecišta F toga luka s promjerom AC, a polumjera FA i oko D s polumjerom DA. Luk oko D siječe promjer AC u točki H; luk oko C polumjera CF siječe luk oko D u točki G. Spojimo li H i G ova spojnica siječe luk oko F u točki J. Konačno spojnica OJ siječe polaznu kružnicu u točki K. Kut AOK je približno trećina kuta AOB. Na slici 7 prikazano je kako se kreću krivulje pogrešaka ovih aproksimacija i koja je od njih točnija.

Kvadratura kruga

Konstruirati kvadrat čija je površina jednaka površini zadanog kruga.

Ako je polumjer danog kruga r onda stranica traženog kvadrata ima vrijednost

$$a = r\sqrt{\pi}.$$

Kvadratura kruga (odnosno rektifikacija kružnog luka koja je u uskoj vezi s kvadraturom) svodi se dakle na određivanje broja π. Nemogućnost elementarne konstrukcije slijedi iz činjenice da je broj π transcendentan (Lindemann 1882.), a to znači da on ne može biti korijen algebarske jednadžbe niti se može prikazati pomoću racionalnih izraza i kvadratnih korijena povezanih s konačnim brojem osnovnih računskih operacija. Nećemo se upuštati u dublju analizu ovog problema, jer to nije ni cilj članka. Možda samo da napomenemo da se korektna konstrukcija može izvesti pomoću kvadratrise Hipije (oko 460. pr. n. e.).

Najstarija približna vrijednost za broj π nalazi se na jednom egipatskom papirusu. Na njemu je stranica traženog kvadrata aproksimirana s $\frac{8}{9}$ promjera što za π daje

$$\pi \doteq \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.1604\ldots$$

Arhimed je prvi izračunao vrijednost broja π na više decimala točno i to na temelju proučavanja opsega: opisanih poligona krugu, kruga i upisanih poligona u krug. Našao je sljedeće ograničenje

$$\frac{211\,872}{67\,441} < \pi < \frac{197\,882}{62\,351}, \qquad 3.1415904 < \pi < 3.1416016.$$

Ptolemej je našao dobru približnu vrijednost

$$\pi \doteq \frac{377}{120} = 3.1416.$$

Viète (1540. – 1603.) je vrijednost π izračunao na 9 decimala pomoću $6 \cdot 2^{16}$-terokuta, Ludolf van Ceulen (1596.) je izračunao π na 35 decimala koristeći 2^{62}-erokut. Elektronski mozgovi danas računaju vrijednost broja π na nekoliko tisuća decimala. Postoji i velik broj aproksimativnih konstrukcija toga broja od kojih ćemo upoznati njih nekoliko.

a) Adrian Antonisz (1527. – 1607.) našao je za

$$\pi = 3.141592653\ldots$$

vrlo jednostavnu približnu vrijednost

$$\pi = \frac{355}{113} = 3.1415929\ldots$$

koja je na šest decimala točna, a može se jednostavno konstruirati. Uočimo da se gornji razlomak može napisati u obliku prikladnom za konstrukciju

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113} = 3 + \frac{4^2}{7^2 + 8^2}.$$

Na slici 8 uzme se $OD = 1$, $OE = \frac{7}{8}$, $AF = \frac{1}{2}$, $FG \| OD$, $HF \| GE$. Tada je

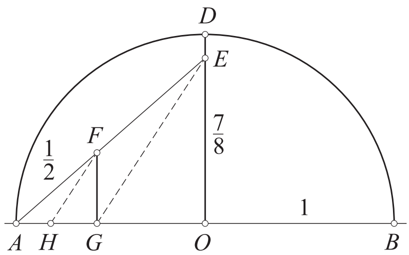
$$AH : AG = AF : AE = AG : AO$$

odnosno

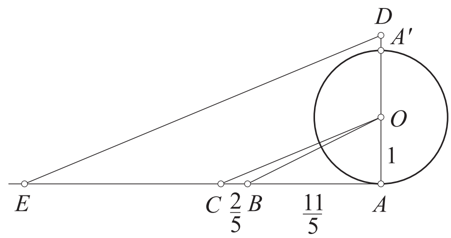
$$AH = \left(\frac{AF}{AE}\right)^2 = \frac{\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{7}{8}\right)^2} \quad \text{tj.} \quad \pi \doteq 3AO + AH.$$

b) Aproksimacija Spechta (1828.)

Ovo je jedna od najboljih i najjednostavnijih konstrukcija broja π. Po svojoj točnosti ona nadmašuje i poznatu aproksimaciju Kochanskog.



Slika 8.



Slika 9.

Konstruira se (slika 9) jedinična kružnica, povuče njen promjer AOA', zatim tangenta u točki A na kružnicu. Na tangentu se nanesu redom dužine $AB = \frac{11}{5}$ i $BC = \frac{2}{5}$; zatim se na promjer AOA' nanese dužina $AD = OB$, a kroz D povuče paralela s OC. Tada je

$$AE \doteq 2\pi.$$

To slijedi iz razmjera

$$AC : AE = AO : AD$$

a odavde je

$$AE = \frac{AC \cdot AD}{AO} = \frac{13}{25}\sqrt{146} \qquad \text{ili} \qquad \pi \doteq \frac{13}{50}\sqrt{146} = 3.141592\ldots$$

c) Za praktičnu upotrebu najbolja je ova jednostavna aproksimacija: opseg pravokutnog trokuta s katetama $\frac{6}{5}$ i $\frac{3}{5}$ približno je jednak broju π. Lako se izračuna da je

$$\pi \doteq o = \frac{9+\sqrt{45}}{5} = 3.1416407\ldots$$

Navest ćemo još nekoliko aproksimacija, ali bez konstrukcije. Naime, cilj je ovog članka da čitateljima pokaže neke od metoda, koje im mogu poslužiti u praksi. Išlo se za tim da te metode budu jednostavne, zorne i dovoljno točne. A ovo dolje navodimo samo kao potpuniji povijesni pregled:

$$\pi \doteq \sqrt{9-3\sqrt{6}} + \sqrt{1+\sqrt{5}} = 3.142399\ldots \quad \text{(Macheroni 1797., samo šestarom)}$$

$$\pi \doteq \frac{501+80\sqrt{10}}{240} = 3.1415926536\ldots \quad \text{(Pioche 1818.)}$$

$$\pi \doteq \frac{13}{50}\sqrt{146} + \frac{7}{10^7} = 3.1415926531\ldots \quad \text{(Specht 1828.)}$$

$$\pi \doteq \sqrt{\left(9\frac{7}{22}\right)^2 + \left(2\frac{16}{22}\right)^2 + \left(1\frac{17}{22}\right)^2} = 3.1415926526\ldots \quad \text{(Reichenbächer 1902.).}$$