Problem četiriju boja

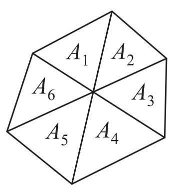
Grozdana Papić[1]

1976. g. *Kenneth Appel* i *Wolfgang Haken* riješili su glasovti problem četiriju boja, problem koji je 124 godine zaokupljao pažnju mnogih matematičara, studenata matematike i matematičara amatera. Rješenje je dobiveno uz pomoć kompjutora, jer je problem sveden na promatranje konačnog, ali vrlo velikog broja konkretnih konfiguracija. Međutim, treba istaći da su neke ključne ideje dokaza potekle upravo iz eksperimenata s komjutorom i da se uloga kompjutora nije svodila na automatsko računanje. Iako je neke dijelove dokaza moguće provjeriti ručno, u cijelosti ovaj dokaz nije moguće provjeriti bez pomoći kompjutora. Želimo opisati što je moguće jednostavnije i kraće (izbjegavajući stroge formulacije i dokaze) rješenje problema četiriju boja.[2]

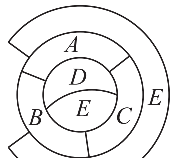
Povijest problema četiriju boja je vrlo interesantna i poučna. Priča počinje 1852. g. jednim pismom koje je *Francis Guthrie* uputio svom bratu *Fredericku*. Francis je upravo završio studij, a njegov brat Frederick je još studirao kod matematičara *A. de Morgana*. Francisu se činilo da se svaka geografska karta u ravnini može obojiti s najviše četiri boje, tako da svake dvije susjedne zemlje budu obojene različitim bojama. Molio je brata da ovu njegovu slutnju matematički dokaže. Međutim, ne samo Frederick nego ni njegov profesor A. de Morgan, koga je Frederick upoznao s problemom, nije znao dokazati Francisovu slutnju. Prije nego što nastavimo pratiti što se zbivalo s Guthriejevom slutnjom formulirat ćemo problem četiriju boja.

Može li se svaka karta u ravnini ili na sferi obojiti s najviše četiri boje tako da nikoje dvije susjedne zemlje ne budu obojene istom bojom? Pri tome smatramo da je svaka zemlja povezano područje i da su susjedne one zemlje koje imaju zajedničku granicu koja se ne sastoji od jedne točke.

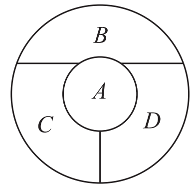
Karte na slikama 1 i 2 pokazuju da su gornja ograničenja nužna da bi problem uopće mogao imati pozitivno rješenje.



Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.

Kada bismo smatrali susjednim zemlje koje graniče samo jednom točkom (npr. zemlje A_1 i A_4 na slici 1), ne bismo mogli obojiti kartu na slici 1 s četiri boje tako da svake dvije susjedne zemlje budu obojene različitim bojama, nego bismo za takvo, nazovimo ga, pravilno bojenje trebali šest boja.

Iz istih razloga nijedna zemlja ne smije se sastojati od dva ili više komada. Zemlja E karte na slici 2 sastoji se od dva komada. Ta zemlja ima četiri susjeda, od kojih je svaki susjed s preostale tri zemlje. Za ovakvu kartu trebalo bi pet boja ako bismo je željeli obojiti na pravilan način.

---

[1] Grozdana Papić je predavač na Rudarsko-geološko-naftnom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Članak je objavljen šk. god. 1977/78.

[2] Prvi dokaz iz 1976. godine zasniva se na provjeri 1482 slučajeva na računalu. Dvadesetak godina kasnije, tj. 1997. g. dan je novi dokaz koji opet bitno koristi računalo. No, u tom dokazu provjerava se 633 slučajeva na računalu. Još uvijek ne postoji dokaz koji je proveden bez intenzivnog korištenja računala.

Lako se vidi da je za naš problem svejedno je li karta u ravnini ili na sferi (kuglina ploha), pa se zato u formulaciji problema govori i o jednim i o drugim kartama.

Kao što smo vidjeli, formulacija problema četiriju boja je vrlo jednostavna i shvatljiva i nematematičaru. Ipak, taj problem je više od stoljeća odolijevao svim napadima i pokušajima da se dođe do rješenja. Većina onih koji su se bavili problemom četiriju boja tražila je pozitivno rješenje smatrajući da je Guthriejeva pretpostavka istinita. Bilo je međutim i onih koji su smatrali da pozitivno rješenje nije moguće, tj. da bar jednu kartu u ravnini ili na sferi nije moguće pravilno obojiti s najviše četiri boje pa su tražili takvu kartu.

Appel i Haken su dokazali tvrdnju:

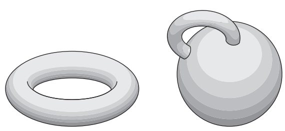
Svaku kartu u ravnini i na sferi moguće je obojiti s najviše četiri boje tako da nikoje dvije susjedne zemlje ne budu obojene istom bojom.

U daljnjem ćemo ovu tvrdnju radi jednostavnosti izražavati s "četiri boje je dovoljno".

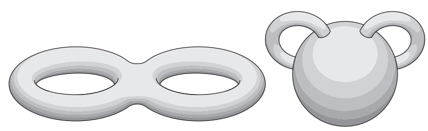
1878. g., dakle četvrt stoljeća nakon pojave problema četiriju boja, matematičar *A. Cayley* skreće na njega pažnju u Londonskom matematičkom društvu. Uskoro, 1879. g. jedan član društva, advokat *A. B. Kempe* publicira "dokaz" da je četiri boje dovoljno. U taj dokaz nitko nije sumnjao deset godina. 1890. g., tada mladi matematičar, *P. J. Heawood* otkriva pogrešku u Kempeovom dokazu. Pogreška je bila takve prirode da je nije bilo lako ispraviti. Ipak, kao što ćemo vidjeti, Kempeov dokaz sadrži većinu osnovnih ideja koje su stoljeće kasnije dovele do ispravnog dokaza.

Polazeći od Kempeovih ideja, Heawood je dokazao da je *pet boja dovoljno*, tj. da se svaka karta u ravnini može obojiti na pravilan način s najviše pet boja. Karta na slici 3 pokazuje da *tri boje nisu dovoljne*. Ova karta sastoji se od četiri zemlje, a svaka zemlja je susjedna s preostale tri, pa su potrebne četiri boje ako je želimo obojiti na pravilan način.

Nastojeći riješiti problem četiriju boja, Heawood je promatrao karte na kompliciranijim plohama kao što su torus, sfera s jednom ručkom i sfera s p ručki. Slika 4 prikazuje torus (sfera s jednom ručkom), a slika 5 sferu s dvije ručke.



Slika 4.



Slika 5.

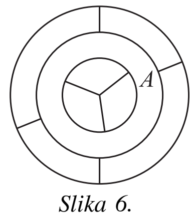
Ovako generalizirani problem pokazao se u izvjesnom smislu jednostavniji i Heawood je našao i dokazao formulu za broj boja *dovoljnih* za pravilno bojenje bilo koje karte na tim plohama. Za torus je ta formula davala broj sedam, tj. bilo koju kartu na torusu moguće je na pravilan način obojiti s najviše sedam boja.

Poput Heawooda i mnogi drugi poznati matematičari pokušavajući riješiti problem četiriju boja, dobili su brojne, vrlo oštroumne rezultate, pa ćemo se ograničiti na one koje su u direktnoj vezi s rješenjem problema.

Kempeov "dokaz" je indirektan (dokaz kontradikcijom), jer je on pretpostavio da postoji bar jedna karta u ravnini koja za pravilno bojenje zahtijeva pet boja i iz te pretpostavke nastojao izvesti kontradikciju. Da je u tome uspio, to bi značilo da je polazna pretpostavka (postoji bar jedna karta koja zahtijeva pet boja), lažna, tj. nijedna karta ne zahtijeva pet boja, odnosno za svaku kartu je četiri boje dovoljno.

Neka, dakle, postoji bar jedna karta za koju četiri boje nisu dovoljne. Tada postoji i takva karta s najmanjim brojem zemalja i tu kartu s najmanjim brojem zemalja koja zahtijeva pet boja zvat ćemo minimalna 5-kromatska karta. To znači da je za svaku kartu koja ima manje zemalja od minimalne 5-kromatske karte četiri boje dovoljno.

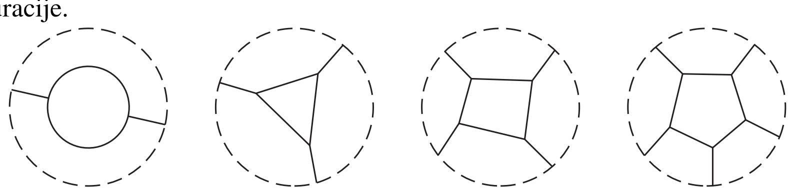
Kempe je uveo pojam *normalne karte*. Karta je normalna ako nijedna njezina zemlja ne okružuje potpuno nijednu drugu zemlju ili više zemalja i ako se najviše tri zemlje sastaju u svakoj točki. Karta na slici 6 nije normalna, jer zemlja A okružuje tri zemlje. Kempe je pokazao da je dovoljno dokazati da egzistencija minimalne 5-kromatske karte vodi na kontradikciju, tj. da se razmatranja mogu ograničiti na normalne karte. Zatim je Kempe pokazao da svaka normalna karta mora sadržavati bar jednu zemlju koja ima pet ili manje susjeda. Drugim riječima, nema normalne karte u ravnini u kojoj svaka zemlja ima šest ili više susjeda.



Slika 6.

Na slici 7 prikazane su zemlje s 2 susjeda, zemlje s 3 susjeda, zemlje s 4 susjeda i zemlje s 5 susjeda.

Prema Kempeu svaka normalna karta mora sadržavati kao svoj dio bar jednu od zemalja prikazanih na slici 7. Zato kažemo da slika 7 prikazuje potpun skup od 4 konfiguracije.



Slika 7.

Kempe je dokazao da egzistencija zemlje s 2, 3 i 4 susjeda u minimalnoj 5-kromatskoj karti sadrži jednu od te tri konfiguracije. Kempe je pokazao da tada postoji 5-kromatska karta s manjim brojem zemalja od minimalne, što se protivi definiciji minimalne 5-kromatske karte. Za ovakve konfiguracije, koje ne mogu biti dio minimalne 5-kromatske karte, jer njihova egzistencija povlači egzistenciju 5-kromatske karte s reduciranim brojem zemalja, kažemo da su *reducibilne*. Reducibilnost konfiguracije se dokazuje promatranjem konfiguracije i rasporeda zemalja koje okružuju konfiguraciju.

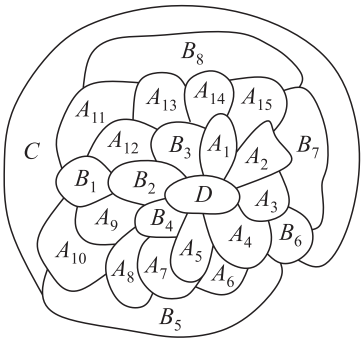
Kempe je smatrao i nastojao dokazati da su sve četiri konfiguracije njegova potpunog skupa (slika 7) reducibilan. Međutim, njegov dokaz reducibilnosti četvrte konfiguracije, tj. zemlje s 5 susjeda bio je kriv i to je jedino pogrešno u njegovu "dokazu".

Potpunost i reducibilnost su osnovni pojmovi i u dokazu Appela i Hakena. Oni su našli potpun skup reducibilnih konfiguracija, koji se za razliku od Kempeova potpunog skupa sastoji od oko 1500 složenih reducibilnih konfiguracija. Budući da svaka normalna karta mora sadržavati bar jedan element toga skupa, a minimalna 5-kromatska karta ne smije sadržavati nijedan element toga skupa, dobivena je kontradikcija i teorem je dokazan.

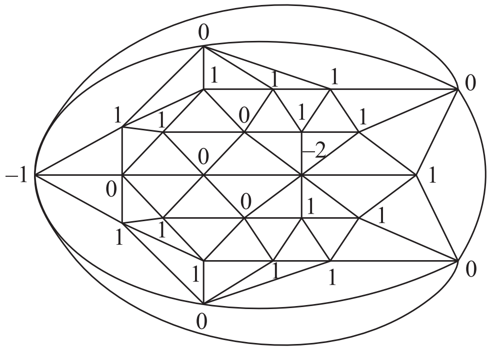
Metode dokaza reducibilnosti konfiguracija razvile su se iz Kempeova dokaza da zemlja s 4 susjeda ne može biti dio minimalne 5-kromatske karte. Kempeovu tehniku redukcije poboljšao je 1913. g. *G. Birkhoff*. Koristeći neke njegove rezultate, *P. Franklin* je pokazao da minimalna 5-kromatska karta mora imati bar 22 zemlje, tj. za svaku kartu koja ima manje od 22 zemlje dovoljne su četiri boje. Nakon 1913. g. mnogi matematičari su poboljšavali Birkhoffovu metodu redukcije i za mnoge konfiguracije je dokazano da su reducibilne. Međutim, sve do 50-tih godina, reducibilne konfiguracije su uglavnom korištene za poboljšanje Franklinova rezultata. Ocjena za broj zemalja minimalne 5-kromatske karte je povećana i 1975. g. je pokazano da je taj broj > 96.

Teorijom reducibilnosti bavio se s puno uspjeha matematičar *H. Heesch*. On je formalizirao poznate metode reducibilnosti i uočio da su neke od njih dovoljni mehanički postupci da bi se mogli izvoditi kompjutorom, Prilozi koje je Heesch dao teoriji reducibilnosti toliko su značajni da je, unatoč nekim kasnijim poboljšanjima, sve što se tiče reducibilnosti, a što je potrebno za dokaz, bilo poznato već 60-tih godina. Do tada je znatno manje pažnje posvećivao pojmu potpunosti. Heesch je, kao i Kempe, smatrao da se problem četiriju boja može riješiti konstrukcijom potpunog skupa reducibilnih konfiguracija. On je uveo i jednu metodu pomoću koje je želio graditi potpun skup konfiguracija. To su začeci postupka *rasterećenja* koji je, u mnogo razvijenijem i složenijem obliku, omogućio Appelu i Hakenu konstrukciju potpunog skupa reducibilnih konfiguracija. Da bismo opisali taj postupak, koji je postao bitan element u rješenju problema, upoznat ćemo se s prijelazom s karte na tzv. *dualni ravninski graf*.

Neka je dana neka karta u ravnini (slika 8). Uočimo u svakoj njezinoj zemlji jednu točku, npr. glavni grad. Glavne gradove susjednih zemalja spojimo crtom koja siječe njihovu zajedničku granicu. Skup tako dobivenih točaka i crta nazivamo dualni ravninski graf dane karte. Svaka točka toga skupa naziva se *vrh grafa* i reprezentira jednu zemlju dane karte. Crta koja spaja dva vrha zove se *brid grafa* i reprezentira granicu. Slika 9 prikazuje dualni graf karte na slici 8.



Slika 8.



Slika 9.

Bojenje karte možemo zamijeniti bojenjem njezina dualnog grafa, tj. umjesto cijele zemlje obojimo vrh koji tu zemlju reprezentira u grafu. Očito je da će za kartu biti dovoljne četiri boje dovoljne za njezin graf.

Bridovi grafa dijele ravninu na likove. Ako je karta normalna (a samo takve promatramo u vezi s našim problemom) i ako vrhove spajamo pravcima ti likovi su trokuti, a dualni graf se tada naziva *triangulacija*. Broj bridova koji izlaze iz danog vrha naziva se *stupanj vrha* i jednak je broju zemalja koje su u karti susjedne zemlji koju vrh reprezentira. Npr. zemlja D karte na slici 8 ima 8 susjeda i reprezentirana je u dualnom grafu te karte (slika 9) vrhom stupnja 8 koji je označen brojem 2. Vrhove koji reprezentiraju susjedne zemlje nazivamo susjednima.

Konfiguracija je dio triangulacije koji se sastoji od skupa vrhova i bridova koji spajaju te vrhove. Skup svih vrhova koji su susjedni konfiguraciji i bridova koji spajaju te vrhove naziva se *prsten konfiguracije*. Prsten u grafu reprezentira one zemlje karte koji okružuju danu konfiguraciju. Konfiguracije se često opisuju brojem vrhova njihova prstena. Taj broj je u direktnoj vezi s teškoćama koje se javljaju pri provjeri reducibilnosti neke konfiguracije. U početku se vjerovalo da će traženi potpuni skup sadržavati velike konfiguracije, npr. takve čiji prsten ima 18 vrhova. Procjena vremena potrebnog da se pomoću kompjutora provjeri reducibilnost takve konfiguracije bila je toliko velika da je još oko 1970. g. rušila nadu u uspjeh. Kasnije je pokazano da je dovoljno promatrati konfiguracije čiji prsteni imaju najviše 14 vrhova.

Prema Kempeu svaki vrh triangulacije koja je pridružena minimalnoj 5-kromatskoj karti mora imati stupanj $\geqslant 5$. Pod triangulacijom ćemo ubuduće podrazumijevati takvu triangulaciju. Ako neki vrh ima stupanj k, kažemo da je broj $6 - k$ njegova *težina*. To znači da će u triangulaciji pozitivnu težinu 1 imati samo vrhovi stupnja 5, težinu 0 vrhovi stupnja 6, a svi vrhovi čiji je stupanj $\geqslant 7$ imat će negativnu težinu. Brojevi kojima su označeni vrhovi grafa na slici 9 su upravo težine tih vrhova. Iz Kempeovih rezultata slijedi da je suma svih težina za bilo koju ravninsku triangulaciju jednaka 12.

Činjenica da je ta suma pozitivna od osnovne je važnosti, jer to znači da u svakoj triangulaciji ima vrhova pozitivne težine.

Postupak "rasterećenja" sastoji se u tome da se pozitivna težina iz nekih pozitivnih vrhova premjesti u neke negativne vrhove. Drugim riječima, vršimo preraspodjelu težine tako da ukupna težina ostane nepromijenjena. Pri tome neki pozitivno opterećeni vrhovi mogu izgubiti svu težinu (postaju rasterećeni) dok neki negativno opterećeni vrhovi mogu primiti toliko težine da postanu pozitivno opterećeni. O odabranom postupku rasterećenja ovisi koji će vrhovi biti opterećeni, a koji rasterećeni. Međutim, ako je postupak rasterećenja odabran, tada za bilo koju triangulaciju možemo načiniti konačan popis svih konfiguracija koje nakon izvedenog postupka rasterećenja imaju vrhove pozitivne težine (takvih uvijek ima). Svaka triangulacija mora sadržavati bar jednu konfiguraciju s toga konačnog popisa, jer se taj postupak može primijeniti na svaku triangulaciju, pa tako dobivamo potpun skup konfiguracija. Za problem četiriju boja bilo je važno naći takav postupak rasterećenja koji osigurava da se nakon izvedenog postupka rasterećenja pozitivna težina pojavi samo u reducibilnim konfiguracijama.

Opisat ćemo jedan jednostavan postupak rasterećenja, Premjestimo iz svakog vrha stupnja 5 u svaki od njegovih negativnih susjeda $\frac{1}{5}$ težine. Pri tome postupku vrh stupnja 5 će zadržati pozitivnu težinu samo onda ako bar jedan od njegovih pet susjeda nema negativnu težinu. To je moguće na dva načina, tj. da je bar jedan od njegovih susjeda stupnja 5 ili stupnja 6. Vrh stupnja 6 ne može ovim postupkom postati pozitivan. Vrh stupnja 7 ima težinu -1 i može postati pozitivan ako je bar 6 njegovih susjeda stupnja 5. Tada naime, on prima $6 \cdot \frac{1}{5}$ težine i postaje pozitivan. No, tada su dva od njegovih susjeda stupnja 5 spojeni bridom, a to je već uočena konfiguracija. Vrhovi stupnja 8 ne mogu ovim postupkom postati pozitivni. Prema tome, ovaj postupak daje skup od dvije konfiguracije: par vrhova stupnja 5 spojenih bridom i vrh stupnja 5 spojen bridom s vrhom stupnja 6. Budući da se ovaj postupak može primijeniti na bilo koju ravninsku triangulaciju, svaka od njih mora sadržavati bar jednu od te dvije konfiguracije, tj. dobiveni skup je potpun skup konfiguracija. Te konfiguracije nisu reducibilne. Graf na slici 9 sadrži obje konfiguracije i one se ponavljaju više puta.

Kada su 1972. g. Appel i Haken počeli rad na problemu četiriju boja, izveli su niz pokusa s programom koji je izvodio jedan specijalni postupak rasterećenja. Iako je dobiveni rezultat ukazivao na izvjesne pogreške, obilje vrlo korisnih informacija dobivenih za relativno kratko vrijeme, ohrabrivalo ih je da nastave radom. Od tada, pa do početka 1976. g. Appel i Haken su izveli niz pokusa stalno modificirajući program i postupak rasterećenja. Krajem 1974. g. imali su i formalan dokaz da postoji konačan skup izvjesnih specijalnih (još ne reducibilnih) konfiguracija, kao i postupak za konstrukciju takvog skupa. Početkom 1975. g., ponovno modificiranim programom mogu dobiti i općenitije konfiguracije. Tada počinju raditi na programima za testiranje reducibilnosti. Krajem 1975. g. nalaze novi postupak rasterećenja. U konačnom obliku program za postupak rasterećenja otkrivao je kritična mjesta (konfiguracije za koje se činilo da se opiru redukciji) i sam se modificirao tako da premjesti pozitivnu težinu na drugo mjesto. Ovim postupkom u siječnju 1976. g. Appel i Haken počeli su konstrukciju potpunog skupa reducibilnih konfiguracija. Načinjeno je oko 500 modifikacija početnog postupka, provjerena reducibilnost 1482 konfiguracije i utrošeno 1200 sati na tri razna kompjutora. U lipnju 1976. g. završena je konstrukcija potpunog skupa reducibilnih konfiguracija. *Time je*, doduše ne standardnim matematičkim sredstvima, *potvrđena Guthriejeva slutnja*. Možda će se jednoga dana pojaviti kratak i elegantan dokaz ovog teorema bez pomoći kompjutora. Ne može se isključititi ni druga mogućnost, tj. da takav dokaz nije moguć.

Appel i Haken u svom članku *The Solution of the Four-Color-Map Problem* (Scientific American, vol. 237, n. 4, 1977) izražavaju uvjerenje da ima teorema koji su od velikog interesa za matematiku, a koji se mogu dokazati samo uz pomoć kompjutora. Vjeruju da ima mnogo problema koji zahtijevaju ovakve analize i smatraju da njihov dokaz teorema o četiri boje upućuje na zaključak da su mogućnosti koje matematici pružaju samo teoretske metode ograničene.