Problem 36 oficira i latinski kvadrati

Dominik Palman[1]

U ovom članku ćemo ukratko izložiti povijesni tijek razmatranja o jednom vrlo zanimljivom krugu problema vezanom uz pojam "latinskih kvadrata". Dokazi rješenja ovih problema nisu nimalo jednostavni, pa prema tome nisu u skladu s namjenom ovoga članka te ih nećemo provoditi. Rezultati tih razmatranja su primijenjeni u više različitih grana matematike kao i u nekim drugim znanostima (npr. poljoprivreda, biologija). Na kraju članka ćemo ukratko razmotriti primjenu ovih problema na "konačne projektivne ravnine" (v. članak: *D. Palman*, Konačne projektivne ravnine, Matematičko-fizički list, god. XXXI, br. 3, str. 95–98). Spomenuti članak označavat ćemo s "članak KPR".

Tim problemima se prvi temeljitije pozabavio švicarski matematičar *Leonhard Euler* (Basel, 1707. – Petrograd, 1783.). Mjesta njegovog znanstvenog djelovanja bila su Berlin i Petrograd. Osim matematike bavio se i fizikom i astronomijom. Smatran je jednim od najvećih matematičara svog vremena. Od njega potječe i ovaj problem (1772.):

Iz šest različitih vojnih jedinica izabrano je po šest oficira različitih činova, ali tako da se u svakoj šestorci oficira iz pojedine jedinice bude zastupljeno istih šest međusobno različitih činova. Od tih 36 oficira treba sastaviti jednu kvadratnu 6×6 *formaciju, takvu da u svakom retku i u svakom stupcu bude smješteno šest oficira iz različitih jedinica i s različitim činovima.*

Euler je bio uvjeren da nije moguće sastaviti takvu formaciju iako to nije i dokazao.

Osnovni pojam u našim razmatranjima predstavljaju "latinski kvadrati" pa ćemo ih najprije definirati:

Definicija 1. *Kvadratnu* $n \times n$ *tablicu u koju upisujemo* n *različitih simbola (to mogu biti brojke 1, 2,...,*n*) tako da se svaki simbol pojavljuje u svakom retku i u svakom stupcu točno jedanput zovemo* **latinskim kvadratom** n**-tog reda**.

Naziv "latinski kvadrat" potječe još iz doba Eulera, jer je umjesto brojaka, kako je to većinom danas uobičajeno, upisivao u tablicu latinska slova.

Navedimo dva najjednostavnija primjera latinskih kvadrata:

1. Na slici 1 je prikazan latinski kvadrat drugoga reda:

1	2
2	1

Slika 1.

2. Na slici 2 su prikazana dva različita latinska kvadrata trećeg reda:

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Slika 2.

[1] Dominik Palman je redoviti profesor na Matematičkom odsjeku PMF-a Sveučilišta u Zagrebu. Objavio je brojne knjige iz geometrije. Članak je objavljen šk. god. 1981/82.

Od dva latinska kvadrata n-tog reda možemo načiniti jedan tako da u $n \times n$ tablicu upišemo u svako polje najprije na lijevu stranu simbol (odnosno brojku) iz odgovarajućeg polja jednog od danih latinskih kvadrata, a desno simbol (odnosno brojku) iz odgovarajućeg polja drugog od danih latinskih kvadrata. Možemo reći da smo preklopili jedan na drugi dani latinski kvadrat. Na taj način smo dva latinska kvadrata trećeg reda prikazana na slici 2 preklopili i time dobili kvadrat na slici 3.

11	22	33
32	13	21
23	31	12

Slika 3.

Definicija 2. *Za dva latinska kvadrata koja možemo preklopiti tako da dobijemo kvadratnu $n \times n$ tablicu uređenih parova od n simbola i da se svaki takav uređeni par pojavljuje u tablici točno jedanput, kažemo da čini* **par ortogonalnih latinskih kvadrata***. Tablicu koju dobijemo takvim preklapanjem zovemo* **grčko-latinskim kvadratom n-tog reda.**

Na slici 2 imamo primjer para ortogonalnih latinskih kvadrata i prema tome na slici 3 je prikazan primjer grčko-latinskog kvadrata. Naziv grčko-latinski kvadrat potječe od toga što se običavaju označavati polja jednog od dva ortogonalna latinska kvadrata grčkim slovima, a drugog latinskim slovima.

Vratimo se sada natrag na Eulerov problem 36 oficira i označimo spomenutih šest vojnih jedinica brojkama 1, 2, ..., 6, a također istim brojkama šest činova. Upišimo sada u svako polje kvadratne 6×6 tablice najprije broj jedinice, a zatim i broj čina oficira koji bi trebao stajati u tom polju. Kada bi nam to uspjelo učiniti uz zadovoljavanje danih uvjeta, onda bismo time dobili jedan grčko-latinski kvadrat šestog reda. Prema tome možemo Eulerov problem 36 oficira izreći u sljedećem obliku:

Treba pronaći jedan grčko-latinski kvadrat šestog reda.

Prilično je očito da ne postoje dva ortogonalna latinska kvadrata (odn. grčko-latinski kvadrat) drugog reda, što se uostalom može lako provjeriti. Euler je pokazao da postoje ortogonalni latinski kvadrati u slučaju kada je red n neparan broj ili broj djeljiv s četiri. Ostalo je tada još samo pitanje postojanja latinskih kvadrata reda n, gdje je n parni broj koji nije djeljiv s četiri, dakle za brojeve $n = 4k + 2$ (gdje je k bilo koji prirodan broj). Za $k = 1$ je $n = 6$, što odgovara problemu 36 oficira odnosno postojanju grčko-latinskog kvadrata šestog reda. Kako smo već spomenuli Euler je bio uvjeren da takav grčko-latinski kvadrat ne postoji. No on je otišao još dalje pretpostavljajući, odnosno postavljajući hipotezu: *ne postoje ortogonalni kvadrati* (odn. grčko-latinski kvadrat) *reda $n = 4k + 2$, gdje je k prirodan broj.*

Da potvrditi, odnosno oboriti, tu Eulerovu hipotezu nije baš lako, svjedoči i činjenica da je taj problem ostao vrlo dugo neriješen. Tek je 1901. francuski matematičar *Gaston Tarry* načinio prvi korak dokazavši nemogućnost postojanja grčko-latinskog kvadrata reda $n = 6$, s tim što je pronašao sve moguće latinske kvadrate šestog reda pa odatle pokazao da nijedan par nije ortogonalan. Time je izgledalo da Eulerova hipoteza ima dobre izglede da bude potvrđena. Međutim već pri prijelazu na sljedeći $k = 2$ i $n = 10$ Tarryjevom se metodom nailazi na nepremostive poteškoće.

00	47	18	76	29	93	85	34	61	52
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87

Slika 4.

Nakon neuspjelog pokušaja da se problem s Eulerovom hipotezom riješi računskim strojem, napokon su 1959. tri matematičara: *E. T. Parker*, *R. C. Bose* i *S. S. Shrikhande* oborili Eulerovu hipotezu bez uporabe računskog stroja. Ne samo da su našli grčko-latinski kvadrat reda $n = 10$ nego su dokazali postojanje takvih kvadrata za red $n = 4k + 2$ (za svaki $k \geqslant 2$). Na slici 4 prikazan je grčko-latinski kvadrat reda $n = 10$.

Promotrimo sada na slici 5 prikazana četiri latinska kvadrata petoga reda. Lako se provjeri da su u tom skupu od četiri latinska kvadrata svaka dva međusobno ortogonalna. Vidimo dakle da za neki red n može postojati skup od više od dva latinska kvadrata tako da je svaki par latinskih kvadrata u tom skupu ortogonalan. Prirodno se postavlja sada pitanje: Koliko najviše latinskih kvadrata može postojati za neki red n tako da je svaki par međusobno ortogonalan? Dokazano je, *da za neki dani n može postojati najviše $n - 1$ takvih kvadrata.*

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Slika 5.

Definicija 3. *Za neki dani red n skup od $n - 1$ u parovima međusobno ortogonalnih latinskih kvadrata zovemo* **potpunim skupom ortogonalnih latinskih kvadrata reda** n.

Kako ne postoje dva ortogonalna latinska kvadrata drugog reda to ne možemo govoriti o potpunom skupu latinskih kvadrata za taj red.

Na slici 2 su prikazana dva ortogonalna latinska kvadrata koji čine potpun skup latinskih kvadrata trećeg reda. Na slici 5 je također prikazan potpuni skup latinskih kvadrata petog reda.

Sljedeće pitanje na koje bi trebalo odgovoriti je: *Postoji li za svaki red n potpuni skup latinskih kvadrata, odnosno za koji red n postoji skup, a za koji ne?* Na to pitanje nema do sada potpunog odgovora. Ipak znamo da postoji potpuni skup latinskih kvadrata za svaki red $n = p^{\alpha}$ $(n \geqslant 3)$, gdje je p primbroj, a α bilo koji pozitivan cijeli broj. Prema tome postoji potpuni skup latinskih kvadrata za redove 3, $4 = 2^2$, 5, 7,

$8 = 2^3$, $9 = 3^2$, 11, 13, itd. Za red $n = 6$ iz prethodnih izlaganja znamo da ne postoji grčko-latinski kvadrat pa prema tome ne može postojati ni potpuni skup ortogonalnih latinskih kvadrata. *Najmanji red za koji ne znamo postoji li potpuni skup ortogonalnih latinskih kvadrata je, dakle,* $n = 10$.[2]

Na kraju ovog članka pokazat ćemo kako možemo primijeniti izložene rezultate na "konačne projektivne ravnine". Pri tome ćemo se koristiti pojmovima izloženim u članku KPR, pa stoga pretpostavimo poznavanje tog članka.

R. C. Bose i *W. L. Stevens* su nezavisno jedan od drugoga dokazali: *Konačna projektivna ravnina reda n postoji točno onda ako postoji potpuni skup ortogonalnih latinskih kvadrata n-tog reda*. Na ovoj tvrdnji se temelji primjena latinskih kvadrata na konačne projektivne ravnine. Mi ćemo ovdje pokazati bez dokaza kako se na temelju potpunog skupa ortogonalnih latinskih kvadrata trećeg reda (slika 2) može konstruirati tablica konačne projektivne ravnine trećeg reda.

U konačnoj projektivnoj ravnini trećeg reda sa svakim su pravcem incidentne četiri točke i svakom točkom prolaze četiri pravca. Takva ravnina ima ukupno 13 točaka i isto toliko pravaca. Tablica incidencije te ravnine dana je u članku KPR, slike 5 i 6. Ovdje ćemo prikazati tu projektivnu ravninu tablicom drugačijeg oblika, koja je pogodnija za ova razmatranja. Na slici 6 prikazana je ta tablica.

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]	[13]
1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
2	5	8	11	5	6	7	5	6	7	5	6	7
3	6	9	12	8	9	10	9	10	8	10	8	9
4	7	10	13	11	12	13	13	11	12	12	13	11

Slika 6.

Svaki stupac iz tablice predstavlja jedan pravac označen simbolima [1], [2], ..., [13]. U svakom su stupcu upisana četiri broja kao oznake četiriju točaka koje su incidentne s pravcem koji predstavlja taj stupac. Ova tablica svakako mora zadovoljavati neke uvjete koji su u skladu s aksiomima projektivne ravnine (v. KPR, str. 96). Navodimo ovdje te uvjete u lijevom stupcu dok su u desnom stupcu izložena njihova geometrijska tumačenja:

(1)	U svakom se stupcu tablice nalaze točno četiri različita broja;	Na svakom se pravcu nalaze četiri različite točke;
(2)	Svaki se broj mora u tablici nalaziti točno četiri puta u četiri različita stupca;	Svakom točkom prolaze točno četiri različita pravca;
(3)	U svaka dva različita stupca postoji točno jedan isti broj;	Dva se različita pravca sijeku u točno jednoj točki;
(4)	Jedan određeni par brojeva nalazi se u točno jednom stupcu.	Postoji točno jedna spojnica dvije različite točke.

Izložit ćemo sada postupak kojim ćemo brojeve 1, 2, ..., 13, kao oznake za 13 točaka, upisati u tablicu tako da ona zadovoljava uvjete (1), ..., (4):

[2] Ovaj članak je objavljen 1981., no godine 1989. dokazano je da ne postoji projektivna ravnina reda 10. Iz toga posebno slijedi da ne postoji potpuni skup ortogonalnih latinskih kvadrata reda 10.

Ispišemo najprije u prvi redak redom u prva četiri stupca broj 1. Taj broj više ne smijemo upotrijebiti (v. (2)). Zatim dalje u prvi redak ispišemo redom po tri puta brojeve 2, 3 i 4. Nadalje u prvi stupac upišemo redom brojeve 2, 3 i 4. Time smo i ta tri broja do kraja iskoristili (slika 7).

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]	[13]
1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
2	5	8	11	5	6	7	5	6	7	5	6	7
3	6	9	12	8	9	10	9	10	8	10	8	9
4	7	10	13	11	12	13	13	11	12	12	13	11
		I			II			III			IV	

Slika 7.

U kvadrat koji je označen s I upišemo ostale brojeve 5, 6, ..., 13 redom po stupcima tog kvadrata i te iste brojeve upišemo redom po recima kvadrata II. Lako možemo provjeriti da dosada nismo prekršili naše uvjete (1), ..., (4).

Možemo još ispuniti kvadrate III i IV na slici 7. U tu svrhu promotrimo lijevi od dva ortogonalna latinska kvadrata na slici 2 koji zajedno čine potpuni skup. Na slici 8 pokazana su tri kvadrata takva da su u svakom upisani: broj 1 odn. 2 odn. 3 na ona mjesta koja taj broj zauzima u spomenutom lijevom kvadratu slike 2. Na kvadratu II slike 7 na mjestima na kojima stoji broj 1 (slika 8) stoje brojevi 5, 9, 13. Ta tri broja sada upišimo redom u prvi stupac kvadrata III. Na poljima na kojima se nalazi broj 2 (slika 8) nalaze se u kvadratu II brojevi 6, 10, 11, pa njih upišemo u drugi stupac kvadrata III. I napokon: na poljima na kojima se nalazi broj 3, nalaze se u kvadratu II brojevi 7, 8, 12, pa ih upišemo redom u treći stupac kvadrata III.

1		
	1	
		1

	2	
		2
2		

		3
3		
	3	

Slika 8.

Na potpuno isti način pomoću desnog latinskog kvadrata na slici 2 i kvadrata II ispunimo kvadrat IV na slici 7. Time smo upotpunili tablicu na slici 7 i lako se provjeri da je sve u skladu s uvjetima (1), ..., (4).

Na analogan način može se primijeniti ovaj postupak i za konačne projektivne ravnine viših redova, ukoliko postoji potpun skup ortogonalnih kvadrata tog dotičnog reda.