Kako napraviti fraktal?

Siniša Slijepčević[1]

Na slici je arktički vuk, s bijelom dugom dlakom iz koje izviruju antracit crne oči i vršak njuške te dva oštra uha. Slika je malo neoštra, obrisi grubi i kao da se vide oštri potezi kista, ali vuk izgleda sasvim stvaran. Michael Barnsley, autor slike, nije se potpisao u desni donji kut. On se uostalom rijetko potpisuje na svoja djela, ali samo zato što bi s potpisom fraktalni kod slike bio bitno dulji.

Arktički vuk je u stvari fraktal, potpuno opisan sa šestotinjak brojeva koji se zovu "IFS-KOD" fraktala. Michael Barnsley je, jasno, matematičar koji je vrlo spretan u pronalaženju "IFS-KODOVA" raznih prirodnih objekata: od jednostavnijih – lišća i drveća, pa do djevojke iz Anda i polja suncokreta. Što je objekt složeniji, kodova ima više. Ako pažljivo pročitate što slijedi, naučit ćete kako pronaći kod bilo kojeg objekta koji vidite ili zamislite i kako na kompjutoru nacrtati tu sliku – ORIGINALNI FRAKTAL.

Pronaći taj kod nije sasvim jednostavno, i potreban nam je alat za taj posao.

Afine transformacije

Fraktale ćemo crtati u ravnini, pa je najjednostavnije postaviti koordinatni sustav. Poznajemo mnoga preslikavanja ravnine: rotacija, translacija, homotetija, osna simetrija. Sva ta preslikavanja mogu se napisati kao afina preslikavanja koordinatne ravnine $\mathbf{R}^2$.

Afino preslikavanje ravnine $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ je preslikavanje oblika $f(x,y) = (ax+by+c, dx+ey+f)$ koje točki A s koordinatama $A(x,y)$ pridružuje točku $B = f(A)$ s koordinatama $B(ax+by+c, dx+ey+f)$. Koeficijenti a, b, c, d, e, f određuju afinu transformaciju.

Svaka afina transformacija je jednoznačno određena slikom tri točke.

Primjer 1. Napiši translaciju t za vektor (p,q) kao afinu transformaciju.

Rješenje. Točka s koordinatama (x,y) preslikava se u točku $(x+p, y+q)$, pa su koeficijenti tog afinog preslikavanja $a=1$, $b=0$, $c=p$, $d=0$, $e=1$, $f=q$.

Primjer 2. Napiši rotaciju s za 90° oko ishodišta kao afinu transformaciju.

Rješenje. Vrijedi: $s(0,0)=(0,0)$, $s(1,0)=(0,1)$, $s(0,1)=(-1,0)$. Uvrstimo to u formulu afine transformacije, te iz prve relacije slijedi: $c=0$, $f=0$. Iz druge slijedi: $a+c=0$, $d+f=1$, iz treće: $b+c=-1$, $e+f=0$. Rješavanjem dobijemo $a=c=e=f=0$, $d=0$, $b=-1$, i $s(x,y)=(-y,x)$.

Zadatak 3. Dokaži da je kompozicija $f \circ g$, dvije afine transformacije $f(x,y) = (ax+by+c, dx+ey+f)$ i $g(x,y) = (a'x+b'y+c', d'x+e'y+f')$ opet afina transformacija.

Rješenje. Računom se lako dobije

$$\begin{aligned} f \circ g(x,y) = f(g(x,y)) = ((aa'+bd')x + (ab'+be')y + (ac'+bf'+c),\\ (da'+ed')x + (db'+ee')y + (dc'+ef'+f)). \end{aligned}$$

[1] Siniša Slijepčević je redoviti profesor na Matematičkom odsjeku PMF-a Sveučilišta u Zagrebu. Članak je objavljen šk. god. 1995/96.

Zadatak 4. Napišite kao afine transformacije rotaciju, translaciju, osnu simetriju te njihove kompozicije.

Rješenje. Kao u primjeru 2, te pomoću formule iz zadatka 3 dobije se:

preslikavanje	koeficijenti					
	a	b	c	d	e	f
translacija za (p, q)	1	0	p	0	1	q
rotacija za $90°$ oko ishodišta	0	-1	0	1	0	0
rotacija za φ oko ishodišta	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
rotacija za φ oko (x_0, y_0)	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	$y_0\sin\varphi$ $-x_0\cos\varphi + x_0$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$y_0 - x_0\sin\varphi$ $-y_0\cos\varphi$
homotetija s koeficijentom k oko (x_0, y_0)	k	0	$x_0 - kx_0$	0	k	$y_0 - ky_0$
osna simetrija oko osi x	1	0	0	0	-1	0

Kompozicije tih afinih transformacija izračunajte sami!

Zadatak 5. Je li svaka afina transformacija kompozicija nekoliko izometrija homotetija?

Rješenje. Nije, na primjer, $f(x, y) = (0, y)$ koja sve "spljošti" na os y. I takve transformacije ćemo koristiti kod izrade fraktala.

Afine transformacije u kompleksnoj ravnini

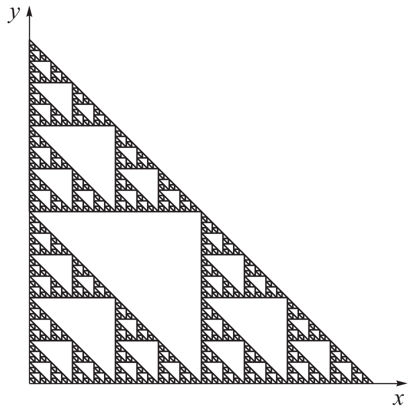
S afinim preslikavanjima se puno lakše računa ako se pišu u kompleksnom obliku. Oni koji nisu spretni s kompleksnim brojevima mogu preskočiti ovaj dio.

Možemo napisati homotetiju i izometrije kao preslikavanja $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ u kompleksnoj ravnini.

preslikavanje	funkcija
translacija za (p, q)	$f(z) = z + z_0, \quad z_0 = p + iq$
rotacija oko ishodišta za kut φ	$f(z) = z \cdot e^{i\varphi} = z \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$
rotacija oko točke (p, q) za kut φ	$f(z) = (z - z_0) \cdot e^{i\varphi} + z_0, \quad z_0 = p + iq$
osna simetrija oko realne osi	$f(z) = \overline{z}$
homotetija s centrom u ishodištu i koeficijentom k	$f(z) = kz$
homotetija s centrom u z_0 i koeficijentom k	$f(z) = k(z - z_0) = z_0$

Kompozicije tih preslikavanja računaju se jednostavno kao kompozicije funkcija. Ako transformaciju ravnine možete napisati u kompleksnom obliku, uvrštavanjem $z = x + iy$ lako se dobivaju kodovi afine transformacije.

IFS fraktali ("Iterated function sistem") su posebna vrsta fraktala takva da svaki dio fraktala izgleda kao čitav fraktal. Najjednostavniji je trokut Sierpinskog, S, koji postavljen u koordinatni sustav izgleda ovako (slika 1).



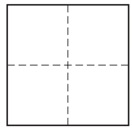
Slika 1.

Izrezujemo srednji trokut, pa iz svakog preostalog srednji trokut i tako nastavljamo. Ključna ideja je da se cijeli trokut Sierpinskog sastoji od tri svoje upola manje kopije. Pronađimo afina preslikavanja koja preslikavaju S u svaki od ta tri trokuta. To su sljedeća: Smanjimo trokut na pola: $f_1(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$; smanjimo trokut na pola i pomaknemo ga za pola u desno: $f_2(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right)$; smanjimo na pola i pomaknemo ga za pola gore: $f_3(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right)$. Kada ta tri trokutića slijepimo, dobivamo opet S, $S = f_1(S) \cup f_2(S) \cup f_3(S)$. Trokut Sierpinskog je potpuno određen s te tri afine transformacije. Koeficijenti tih transformacija čine IFS-kod trokuta Sierpinskog:

a	b	c	d	e	f
0.5	0	0	0	0.5	0
0.5	0	0.5	0	0.5	0
0.5	0	0	0	0.5	0.5

Pronalaženje IFS-koda nekog fraktala je ekvivalentno pronalaženju afinih transformacija f_1, f_2, $\ldots$, f_n koje taj fraktal F, sljepljene, preslikavaju u samog sebe: $f = f_1(F) \cup f_2(F) \cup \ldots \cup f_n(F)$.

Zadatak 6. Nađite IFS-kod kvadrata!



Slika 2.

Rješenje. Kvadrat K se sastoji od četiri svoje kopije, i svako preslikavanje je kompozicija homotetije i translacije.

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right),\\
f_2(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right)\\
f_3(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right),\\
f_4(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

i zaista $K = f_1(K) \cup f_2(K) \cup f_3(K) \cup f_4(K)$. Napišite tablicu IFS-koda sami!

Zadatak 7. Pogledajte sliku paprati i rastavite je na četiri manje, identične paprati. Nakon toga pronađite kodove četiri afine transformacije koje preslikavaju paprati u svaki od tih dijelova i napišite IFS-kod paprati.

Slika 3.

Rješenje. IFS-kod paprati je

	a	b	c	d	e	f
1	0	0	0	0.16	0	0
2	0.85	0.04	–0.04	0.85	0	1.6
3	0.2	–0.26	0.23	0.22	0	1.6
4	–0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44

Zadatak 8. Napišite fraktalno svoje ime!

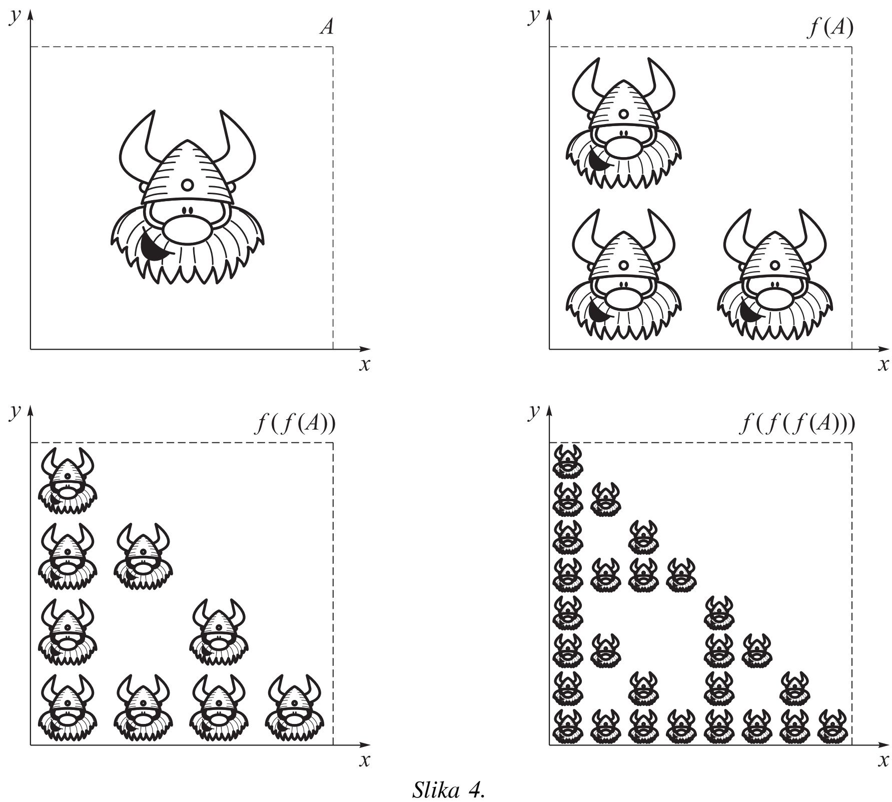
Program za crtanje IFS-fraktala

Program je sasvim jednostavan. Ako je n broj IFS-koda (afinih preslikavanja) i ako su ta preslikavanja $f_1, f_2, \ldots, f_n$, shematski prikaz dijagrama je sljedeći:

$$\left.\begin{array}{l} x=0,\ y=0 \\ \text{nacrtaj točku } (x,y) \\ \text{odaberi slučajan broj } i \text{ između 1 i } n \\ (x,y)=f_i(x,y) \end{array}\right\} \quad \text{ponavljaj puno puta.}$$

Puno puta znači 1000–10 000 puta u praksi.

U dodatku je napisan program u BASIC-u. Kod programiranja treba paziti (transformirati koordinate), tako da je fraktal zadan kodom zaista u oviru ekrana.



Slika 4.

Zaista je iznenađujuće da taj algoritam na kraju nacrta fraktal. Ovo je, otprilike razlog. Ako su zadane transformacije $f_1, f_2, \ldots, f_n$, definiramo preslikavanje koje skupu točaka A pridružuje skup točaka $f(A)=f_1(A)\cup f_2(A)\cup\ldots\cup f_n(A)$. Nas zanimaju skupovi točaka $f(A)$, $f(f(A))=f^2(A)$, $f(f(f(A)))=f^3(A), \ldots, f^n(A), \ldots$ Evo kako oni izgledaju. Ako je A Hogar Strašni, a f_1, f_2, f_3 preslikavanja trokuta Sierpinskog.

Zaista, slika sve više liči na trokut Sierpinskog S, i u nekom smislu konvergira prema njemu. Za bilo koji (ograničeni) početni skup A, $f^n(A)$ će konvergirati prema S (zbog važnog Banachovog teorema o fiksnoj točki). To je upravo ono što algoritam i radi, s tim da je početni skup samo jedna točka $(0,0)$. Isprobajte algoritam s drugim početnim točkama!

Čitateljima sada preostaje da isprobaju sve kodove na računalu. Mogu ih malo i mijenjati i proučavati kako se i slika malo mijenja.

Arktičkog vuka s početka možete vidjeti u knjizi M. Barnsley: *Fractals everywhere*. U knjizi nisu objavljeni kodovi tih slika; oni su na prodaju. Možda i sami nešto zaradite?

Dodatak: Program za crtanje IFS-fraktala

(Za crtanje trokuta Sierpinskog; n – broj linija IFS-koda;
$A(i)$, $B(i)$, $C(i)$, $D(i)$, $E(i)$, $F(i)$ – kodovi)

```
5 n=3
10 DIM a(10), b(10), c(10), d(10), e(10), f(10)
20 FOR i = 1 TO n

30 READ a(i), b(i), c(i), d(i), e(i), f(i)
40 NEXT i

50 DATA 0.5, 0, 0, 0, 0.5, 0
60 DATA 0.5, 0, 0.5, 0, 0.5, 0
70 DATA 0.5, 0, 0, 0, 0.5, 0.5

90 x = 0
100 y = 0
110 FOR f = 1 TO 50000
120 i = INT(RND(1) * n) + 1
130 z = a(i) * x + b(i) * y + c(i)
140 y = d(i) * x + e(i) * y + f(i)

150 x = z
160 xsc = INT(x * 250 + 30)
170 ysc = INT(400 - y * 400)
180 PLOT xsc, ysc
200 NEXT f
```