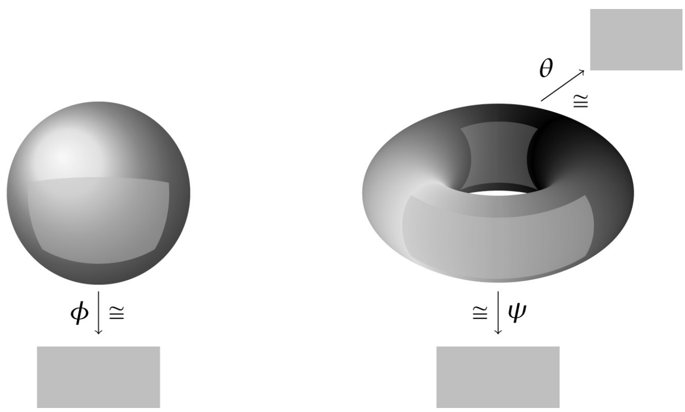
Slutnja koja je postala teorem[1]

Šime Ungar[2]

Poincaréova hipoteza, jedna od najpoznatijih matematičkih slutnji, stotinu je godina odolijevala nastojanjima mnogih vrhunskih matematičara, prije svega topologa i diferencijalnih geometričara, da ju dokažu ili opovrgnu. Napokon je, početkom 21. stoljeća, Poincaréova slutnja dokazana.

U čast matematike na početku novog milenija, a stotinu godina nakon poznatog predavanja Davida Hilberta 8. kolovoza 1900. održanog na Drugom međunarodnom kongresu matematičara u Parizu, u kojem je prikazao deset od dvadeset i tri problema čije je rješavanje obilježilo matematiku dvadesetog stoljeća, *Clay Mathematics Institute* iz Cambridgea, Massachusetts, koji je posvećen unapređenju i širenju matematičkih znanja, odlučio je dodijeliti nagrade od po milijun dolara za rješenje svakog od sedam klasičnih problema koji su godinama odolijevali pokušajima vrsnih matematičara da ih riješe. Poincaréova slutnja, jedan od tih sedam *milenijskih problema*, prvi je riješen.



Sfera i torus lokalno izgledaju poput ravnine.

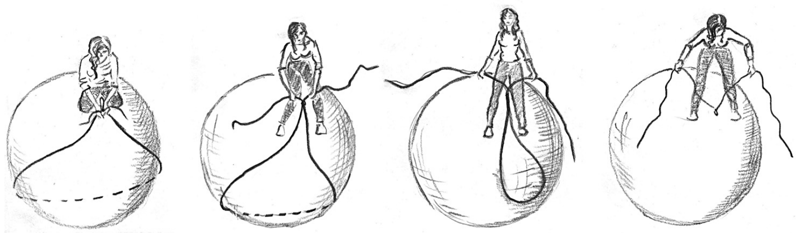
O čemu se radi? Zamislimo da se nalazimo na palubi broda na otvorenom moru. Kamo god uokolo pogledamo, u bilo kojem smjeru, svuda ista slika – jednako plavo more; sada, i za jedan sat, i za dva sata, i .... Nalazimo se na plohi koja u svakom smjeru i u svakoj točki izgleda jednako i lokalno je ravna, kao ravnina – naprijed-natrag, lijevo-desno. Naravno, nalazimo se na *sferi*, kuglinoj plohi. Ali zamislimo da Zemlja nema oblik kugle nego da je poput velikog koluta, i mi se nalazimo na njegovoj površini – plohi poput automobilske zračnice, *torusu*. I tada bismo u svim smjerovima imali istu sliku, lokalno je i torus poput ravnine. A što kada bi Zemljina površina bila poput torusa s dvije rupe? Lokalno bi opet slika bila ista.

Kako onda, bez da se oslonimo na vanjski svijet, svijet izvan Zemljine površine, ustanoviti da je Zemljina površina oblika sfere? Rečeno strožim, matematičkim rječnikom: kako među svim *plohama*, tj. orijentabilnim kompaktnim zatvorenim

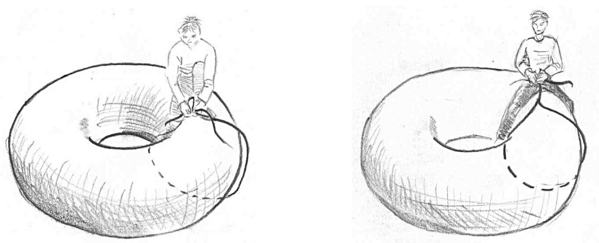
[1] Zahvaljujem Franki Miriam Brückler koja je napravila crteže uz ovaj članak.

[2] Autor je redoviti profesor na Matematičkom odsjeku PMF-a Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: `ungar@math.hr`. Članak je objavljen šk. god. 2010/11.

dvodimenzionalnim mnogostrukostima[3], prepoznati sferu? Koje je to svojstvo koje među svim plohama ima jedino sfera?



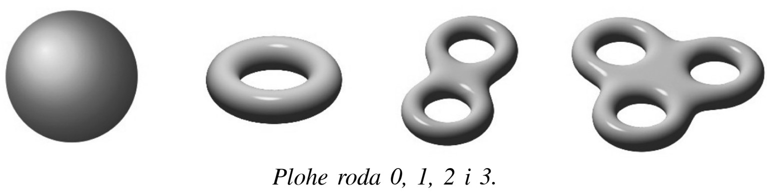
Sfera je jednostavno povezana.



Torus nije jednostavno povezan.

Uzmimo glatku biljarsku kuglu i još ju malo namažimo uljem, pa oko takve kugle pokušajmo čvrsto zavezati običan uzao. Teško da će nam to uspjeti — špaga će skliznuti po površini kugle i ostat će nam samo čvor na špagi. Ali ako istu stvar pokušamo s nekim kolutom, nećemo imati problema. Točnije rečeno, svaka se petlja na sferi može *unutar same sfere*, tj. ne izlazeći u okolni prostor, stegnuti u točku, dok na torusu, i onome s više rupa, postoje petlje koje se na samom torusu ne mogu stegnuti u točku. Kaže se da je sfera *jednostavno povezana*, a torus nije.

Klasifikacija ploha poznata je odavno: svaka je ploha, tj. orijentabilna kompaktna dvodimenzionalna mnogostrukost bez ruba, *homeomorfna* ili *topološki ekvivalentna* sferi ili torusu s jednom ili više rupa (broj rupa naziva se *rod plohe*). Tu je činjenicu, za glatko smještene plohe u euklidskom prostoru $\mathbf{R}^3$, dokazao već August Möbius 60-tih godina 19. stoljeća. Na osnovu te klasifikacije jasno je da je sfera jedina jednostavno povezana ploha.

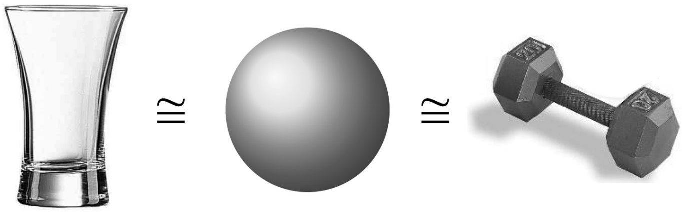


Plohe roda 0, 1, 2 i 3.

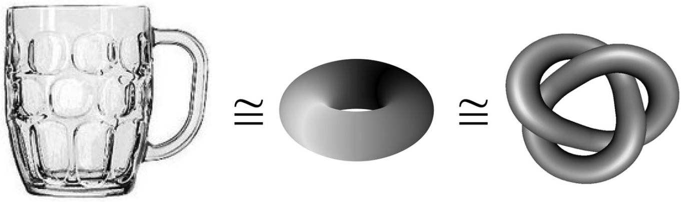
Pojasnimo ovdje jednu važnu stvar. Kada kažemo da je neka mnogostrukost sfera, ne mislimo da je ona zaista okrugla sfera $\mathbf{S}^2$, tj. skup točaka (x, y, z) u $\mathbf{R}^3$ za koje je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, nego da je homeomorfna pravoj, okrugloj sferi, tj. da postoji neprekidna bijekcija naše mnogostrukosti na $\mathbf{S}^2$. (Ovo nije prava definicija homeomorfnosti, ali je

[3] Mnogostrukosti su topološki prostori koji lokalno imaju strukturu euklidskog prostora.

u kompaktnom slučaju kakav nas zanima, tome ekvivalentna.) Analogno vrijedi i kada kažemo da je neka mnogostrukost torus. Dakle, površina obične čaše je homeomorfna sferi, dok je površina krigle za pivo, one s drškom, homeomorfna torusu. Međusobno te dvije plohe nisu topološki ekvivalentne.



Površine čaše i utega su homeomorfne sferi.



Površina krigle je homeomorfna torusu, ali i zauzlanom torusu.

Da je *Zemlja okrugla*, tj. da je njezina površina oblika sfere, znalo se odavno, čak je Eratosten oko 240. godine pr. Kr. sa začuđujućom preciznošću odredio i njezin polumjer. Ali za to su bili potrebni izvanzemaljski objekti: Sunce i zvijezde, dakle okolni prostor.

A kako je s našim stvarnim, trodimenzionalnim prostorom u kojem se nalazimo? U njemu, osim naprijed-natrag i lijevo-desno, imamo i gore-dolje. I nemamo ništa izvan njega, iz njega ne možemo izaći i pogledati "izvana" i vidjeti o kakvoj se trodimenzionalnoj mnogostrukosti radi. Pitanjem kako zapravo izgleda naš svemir bavili su se početkom dvadesetog stoljeća Albert Einstein, Henri Poincaré, David Hilbert i drugi.

Klasifikacija trodimenzionalnih mnogostrukosti, tj. objekata koji su lokalno poput našeg trodimenzionalnog euklidskog prostora $\mathbf{R}^3$, mnogo je teže pitanje od klasifikacije ploha. Svakako je najjednostavniji takav objekt *trodimenzionalna sfera* $\mathbf{S}^3$ koju čini skup točaka (w, x, y, z) u četverodimenzionalnom prostoru $\mathbf{R}^4$ za koje vrijedi $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Poincaré je u jednom svom radu iz 1904. postavio pitanje je li trodimenzionalna sfera jedina orijentabilna kompaktna zatvorena trodimenzionalna mnogostrukost koja je jednostavno povezana, ili, kako bismo kraće rekli, je li svaka homotopska 3-sfera prava 3-sfera? I sam je Poincaré bezuspješno pokušavao odgovoriti na to pitanje. Åak je konstruirao mnogostrukost, *Poincaréov dodekaedarski prostor*, za koju se nadao da će biti protuprimjer, ali se pokazalo da je to "samo" homološka ali ne i homotopska sfera.

Novi je interes za hipotezu pobudio J. H. C. Whitehead kada je 1930-tih najprije objavio, a zatim, našavši grešku, povukao dokaz Poincaréove slutnje. I više je drugih matematičara polovinom dvadesetog stoljeća objavilo dokaze Poincaréove hipoteze za koje se uskoro pokazalo da nisu valjani, da imaju "rupe". Ovom su se hipotezom bavili i najpoznatiji topolozi toga vremena: R. H. Bing, Wolfgang Haken, Edwin Moise, Christos Papakyriakopoulos, ali sa samo djelomičnim uspjehom.

Većina je matematičara smatrala da je Poincaréova slutnja istinita, ali da generalizirana slutnja, koja kaže kako je svaka n-dimenzionalna homotopska sfera homeomorfna pravoj n-sferi, u višim dimenzijama ne vrijedi. Kao što smo vidjeli, u dimenziji 2 slutnja je istinita. Stephen Smale je 1961. godine uzbudio matematičku javnost dokazavši da je ona istinita u svim dimenzijama od 5 naviše, a Michael Freedman je 1982. dokazao istinitost hipoteze i za dimenziju 4. Pokazalo se da je najtvrđi orah upravo originalna trodimenzionalna Poincaréova slutnja.

Mnogo je teške i "tvrde" matematike razvijeno u pokušajima da se ova slutnja dokaže. Richard Hamilton je početkom 1980-tih predložio sasvim novu tehniku, netipičnu za topologiju i diferencijalnu geometriju, za koju je vjerovao da će dovesti do rješenja trodimenzionalne slutnje. Tehniku je nazvao *Riccijevim tokom*, a radi se o izvjesnoj diferencijalnoj jednadžbi za metriku na mnogostrukosti. I zaista, 2002. godine ruski je diferencijalni geometričar Grigorij Perelman objavio tri preprinta u kojima je Hamiltonov program doveo do kraja. Kako se radi o vrlo složenim matematičkim postupcima iz različitih matematičkih disciplina, malo je matematičara u svijetu koji mogu u potpunosti razumjeti, i provjeriti, sve korake dokaza. Trebalo je nekoliko godina da se više ekipa uvjeri u ispravnost i cjelovitost Perelmanova dokaza. I tako je Poincaréova slutnja postala teorem.

Koje su posljedice i koja je važnost Poincaréove slutnje ili njezina dokaza? Hoće li dobiveni rezultati proširiti naše spoznaje o svemiru? Omogućiti putovanja do drugih zvijezda i galaksija? Ili je to zanimljivo samo matematičarima?

Sasvim je sigurno da će ti rezultati imati velik utjecaj na fiziku. Ali ne odmah, a kada – to nitko ne zna. U mnogim je stvarima matematika cijelo stoljeće ispred fizike. Na slično je pitanje Edward Witten, fizičar s *Institute for Advanced Study* u Princetonu, odgovorio kako je analogon Poincaréove slutnje riješen polovinom 19. stoljeća klasifikacijom ploha, a danas su ti rezultati važni u općoj teoriji relativnosti i u teoriji struna (string theory). A nitko to nije bio predvidio prije stotinjak godina kada je odgovarajuća matematika razvijena. Kada će i kakvu ulogu imati Hamilton-Perelmanovi rezultati, nemoguće je prognozirati.

Preporučam da pogledate izuzetno zanimljivo popularno predavanje [2] profesora Curtisa McMullena s Harvarda. U diskusiji nakon predavanja, u odgovorima na pitanja iz auditorija, ukazao je i na neke moguće ne-matematičke primjene Hamilton-Perelmanove tehnike i rezultata.

Literatura

[1] K. Horvatić, *Klasični problemi geometrijske topologije*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[2] C. T. McMullen, *The geometry of 3-manifolds* (video predavanje), `http://athome.harvard.edu/threemanifolds/watch.html`

[3] J. Milnor, *The Poincaré Conjecture*, `http://www.claymath.org/millennium/Poincare_Conjecture/poincare.pdf`

[4] *Poincaré conjecture*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Poincaré_conjecture`

[5] *The Poincaré conjecture (video)*, `http://www.youtube.com/watch?v=AUoaTrQTM5o`