Jedna korisna primjena nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine

Šefket Arslanagić[1]

Dokazivanje nejednakosti u matematici posebno je zanimljivo, kako za učenike tako i za nastavnike. Nejednakosti između brojnih sredina su temelj u tome, a posebno nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine koja glasi

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},\ a_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. (U buduće ćemo ovu nejednakost označavati kao A-G nejednakost). Recimo i to da se u odgovarajućoj matematičkoj literaturi o nejednakostima nalazi na desetine raznih dokaza ove nejednakosti; u [1] se nalaze tri razna.

Ovdje ćemo pokazati kako se razne algebarske nejednakosti mogu elegantno dokazati primjenom nejednakosti (1), ukoliko se stvore pogodni uvjeti za tu primjenu. To ćemo prikazati na nekoliko primjera.

Nejednakost 1. Dokazati da za $a,\ b,\ c > 0$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c. \tag{2}$$

[1] Izvanredni profesor u mirovini na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu,
e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

Dokaz. Direktnom primjenom A-G nejednakosti (1) za $n=3$ imamo

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}\cdot\frac{b^2}{c}\cdot\frac{c^2}{a}}, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqslant 3\sqrt[3]{abc}.$$

Ali iz (1) slijedi i

$$3\sqrt[3]{abc} \leqslant a+b+c,$$

međutim ovo ne možemo iskoristiti. Što sad? Primjenom A-G nejednakosti (1) za $n=2$ dobivamo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right) \geqslant \sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot b}$$

tj.

$$\frac{a^2}{b}+b \geqslant 2a, \tag{3}$$

te analogno

$$\frac{b^2}{c}+c \geqslant 2b, \tag{4}$$

$$\frac{c^2}{a}+a \geqslant 2c. \tag{5}$$

Iz (3), (4) i (5), dobivamo nejednakost (2). Lijepo, zar ne? Hvala A-G nejednakosti za $n=2$. Jednakost u (2) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

Nejednakost 2. Dokazati da za a, b, $c>0$ vrijedi nejednakost

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}). \tag{6}$$

Dokaz. Ne bi se puno usrećili ako bi koristili A-G nejednakost (1) za

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^4b^4c^4}, \qquad \text{tj.} \qquad a^4+b^4+c^4 \geqslant 3abc\sqrt[3]{abc}.$$

No, nakon dijeljenja dane nejednakosti (6) s $abc>0$, imamo ekvivalentnu nejednakost:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}. \tag{7}$$

Sada ćemo dokazati nejednakost (7). Koristeći A-G nejednakost (1) za $n=3$, dobivamo

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{bc}+b+c\right) \geqslant \sqrt[3]{\frac{a^3}{bc}\cdot b\cdot c},$$

tj.

$$\frac{a^3}{bc}+b+c \geqslant 3a, \tag{8}$$

te analogno

$$\frac{b^3}{ac}+a+c \geqslant 3b, \tag{9}$$

$$\frac{c^3}{ab}+a+b \geqslant 3c, \tag{10}$$

a iz (8), (9) i (10)

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab} \geqslant a+b+c. \tag{11}$$

Kako je na osnovu A-G nejednakosti (1) za $n=2$

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \qquad \text{tj.} \qquad a+b \geqslant 2\sqrt{ab},$$

te analogno

$$b+c \geqslant 2\sqrt{bc},$$
$$c+a \geqslant 2\sqrt{ca},$$

te nakon zbrajanja posljednje tri nejednakosti,

$$a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}. \tag{12}$$

Sada iz (11) i (12) slijedi nejednakost (7), odnosno (6). Jednakost u (6)vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

Napomena 1. Nejednakost u (6) vrijedi ako uzmemo da su a, b, c nenegativni realni brojevi, tj. mogu biti i jednaki nuli.

Sada ćemo preći na dokaze nešto složenijih nejednakosti pomoću A-G nejednakosti (1) za $n=2$ i $n=3$.

Nejednakost 3. Dokazati da za a, b, c, $d>0$ takve da je $a+b+c+d=1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Dokaz. Na osnovu A-G nejednakosti (1) za $n=2$, imamo

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\right) \geqslant \sqrt{\frac{a^2}{a+b}\cdot\frac{a+b}{4}}, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{a^2}{a+b}+\frac{a+b}{4} \geqslant a,$$

te analogno

$$\frac{b^2}{b+c}+\frac{b+c}{4} \geqslant b,$$
$$\frac{c^2}{c+d}+\frac{c+d}{4} \geqslant c,$$
$$\frac{d^2}{d+a}+\frac{d+a}{4} \geqslant d.$$

Nakon zbrajanja posljednje četiri nejednakosti, imamo

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}+\frac{1}{2}(a+b+c+d) \geqslant a+b+c+d,$$

a odavde zbog $a+b+c+d=1$,

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Jednakost u (13) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$.

Nejednakost 4. Dokazati da za a, b, c, $d \geqslant 0$ takve da je $ab+bc+cd+da=1$ vrijedi nejednakost

$$\sum_{\text{cikl.}} \frac{a^3}{b+c+d} \geqslant \frac{1}{3}. \tag{14}$$

Dokaz. Napišimo dani izraz

$$\sum_{\text{cikl.}} \frac{a^3}{b+c+d} = \frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{b+a+d} + \frac{d^3}{b+c+a}.$$

Koristeći A-G nejednakost (1) za $n=3$, imamo:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{18} + \frac{1}{12}\right) \geqslant \sqrt[3]{\frac{a^3}{b+c+d} \cdot \frac{b+c+d}{18} \cdot \frac{1}{12}},$$

tj.

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{18} + \frac{1}{12} \geqslant \frac{a}{2},$$

te analogno

$$\frac{b^3}{a+c+d} + \frac{a+c+d}{18} + \frac{1}{12} \geqslant \frac{b}{2},$$
$$\frac{c^3}{b+a+d} + \frac{b+a+d}{18} + \frac{1}{12} \geqslant \frac{c}{2},$$
$$\frac{d^3}{b+c+a} + \frac{b+c+a}{18} + \frac{1}{12} \geqslant \frac{d}{2}.$$

Nakon zbrajanja četiri posljednje nejednakosti, dobivamo:

$$\sum_{\text{cikl.}} \frac{a^3}{b+c+d} + \frac{3(a+b+c+d)}{18} + \frac{4}{12} \geqslant \frac{a+b+c+d}{2},$$

a odavde

$$\sum_{\text{cikl.}} \frac{a^3}{b+c+d} \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c+d-1). \tag{15}$$

Kako je na osnovu A-G nejednakosti (1) za $n=2$,

$$\frac{(a+c)+(b+d)}{2} \geqslant \sqrt{(a+c)(b+d)} \iff (a+b+c+d)^2 \geqslant 4(ab+bc+cd+da)$$

odnosno zbog danog uvjeta $ab+bc+cd+da=1$,

$$(a+b+c+d)^2 \geqslant 4,$$

tj.

$$a+b+c+d \geqslant 2. \tag{16}$$

Sada iz nejednakosti (15) i (16) slijedi nejednakost (14). Jednakost u (13) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c=d=\dfrac{1}{2}$.

Nejednakost 5. Dokazati da za a, b, $c > 0$ takve da je $a+b+c=2$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(a+c)} > 2. \tag{17}$$

Dokaz. Koristeći A-G nejednakost (1) za $n=3$, imamo:

$$\frac{a}{b(a+b)} + (a+b)a + ab \geqslant 3a, \tag{18}$$

$$\frac{b}{c(b+c)} + (b+c)b + cb \geqslant 3b, \tag{19}$$

$$\frac{c}{a(a+c)} + (a+c)c + ac \geqslant 3c, \tag{20}$$

a iz (18), (19) i (20)

$$\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(a+c)} \geqslant 3(a+b+c) - (a+b+c)^2,$$

Odnosno, zbog uvjeta $a+b+c=2$,

$$\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(a+c)} > 2.$$

Ovdje vrijedi stroga nejednakost jer npr. u nejednakosti (18) vrijedi jednakost ako je

$$(a+b)a = ab \left(= \frac{a}{b(a+b)}\right) \Longrightarrow a = 0,$$

što ne može biti zbog uvjeta da su a, b, $c > 0$.

Nejednakost 6. Dokazati da za a, b, $c > 0$ takve da je $abc = 1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geqslant \frac{3}{4} \tag{21}$$

Dokaz. Na osnovu A-G nejednakosti (1) za $n=3$, imamo

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{1+b}{8} + \frac{1+c}{8} \geqslant \frac{3a}{4},$$

te analogno

$$\frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+c}{8} \geqslant \frac{3b}{4},$$

$$\frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+b}{8} \geqslant \frac{3c}{4},$$

a odavde nakon zbrajanja gornjih nejednakosti imamo

$$\sum_{\text{cikl.}} \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{3+a+b+c}{4} \geqslant \frac{3}{4}(a+b+c),$$

odnosno

$$\sum_{\text{cikl.}} \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} \geqslant \frac{1}{2}(a+b+c) - \frac{3}{4}. \tag{22}$$

Kako je na osnovu A-G nejednakosti za $n=3$ i danog uvjeta $abc=1$,

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

tj.

$$a+b+c \geqslant 3 \tag{23}$$

iz nejednakost (22) i (23) dobivamo

$$\sum_{\text{cikl.}} \frac{a^3}{(1+a)(1+c)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Jednakost u (21) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c=1$.

Nejednakost 7. Dokazati da za $a,\ b \geqslant 0$ tako da je $a+b=1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} \geqslant \frac{1}{3}. \tag{24}$$

Dokaz. Na osnovu A-G nejednakosti za $n=2$, imamo:

$$\frac{a^2}{b+1} + \frac{b+1}{9} \geqslant \frac{2a}{3},$$
$$\frac{b^2}{1+a} + \frac{a+1}{9} \geqslant \frac{2b}{3}.$$

a odavde

$$\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{1+a} + \frac{a+b+2}{9} \geqslant \frac{2}{3}(a+b),$$

odnosno zbog danog uvjeta $a+b=1$,

$$\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{1+a} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Jednakost u (24) vrijedi ako i samo ako je $a=b=\frac{1}{2}$.

Napomena 2. Svakako sve dokazane nejednakosti se mogu dokazati i na neki drugi način. No, siguran sam da će ti dokazi biti teži i složeniji nego oni dani u ovom prilogu. Ovime želim istaći značaj dane metode pomoću A-G nejednakosti koju smo ovdje obilato koristili.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Z. Cvetkovski, *Inequalities – Theorems Techniques and Selected Problems*, Springer-Verlag Berlin/ Heidelberg, 2012.